

СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 519.21

КЕЙС-ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ  
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН В ВУЗЕ:  
КУРС АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

**Е. Б. Титова**

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
Нижний Новгород, Россия*

`elena.titova@itmm.unn.ru`

Рассмотрены практические стороны внедрения кейс-технологии в преподавание фундаментальных дисциплин бакалавриата ИТ-специальностей на примере курса «Алгебра и геометрия». Представленный кейс направлен на применение знаний бакалавров по аналитической геометрии при нахождении уравнения биссектрисы угла на плоскости и в пространстве. Формируется умение сопоставлять различные способы нахождения уравнения биссектрисы угла в зависимости от размерности пространства.

*Ключевые слова:* кейс-технологии, алгебра и геометрия, прямая на плоскости, прямая в пространстве, уравнение биссектрисы угла, фундаментальные дисциплины.

## 1. Введение

Данный кейс разработан для обучения бакалавров направления 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в рамках фундаментальной дисциплины «Алгебра и геометрия». В ходе работы над проблемной ситуацией обучающиеся разбиваются на группы 5–6 человек, каждая группа получает одинаковые задания для решения. Студенты уже знают уравнения прямой на плоскости и в пространстве в различных видах, имеют навык преобразования одного вида уравнения в другой.

Анализ предложенных заданий способствует выработке алгоритма нахождения биссектрисы угла, заданного пересечением двух прямых на плоскости или в пространстве, и позволяет студентам углубить теоретические знания по данному разделу аналитической геометрии и развить практические навыки.

Данное практико-ориентированное занятие включает в себя учебную ситуацию, предназначенную для отработки одной из типовых задач курса. Применяется игровое проектирование, студенты разрабатывают исследовательски-аналитический проект (см., напр., [1, 2]).

*Цель кейса:* определение оптимального способа нахождения уравнения биссектрисы угла на плоскости и в пространстве, повышение заинтересованности студентов в предмете.

*Задачи кейса:*

- 1) актуализация знаний по аналитической геометрии;
- 2) тренировка умений выдвигать обоснованные решения;
- 3) выбор наилучшего метода нахождения уравнения биссектрисы угла;
- 4) подготовка отчета о полученном результате.

## 2. Описание кейса

Студентам предлагается на время найти различными способами уравнение биссектрисы угла, заданного двумя прямыми. Студенты внутри группы самостоятельно выясняют различные способы решения задачи, распределяют предложенные задания между собой, каждый студент находит координаты направляющих векторов сторон угла, координаты вершины угла и биссектрису угла четырьмя способами. Перед ними ставится задание: учесть время нахождения уравнения биссектрисы угла для одной и той же задачи разными способами, выписать это время и ответы в таблицу, предоставить рекомендации по выбору способа решения в зависимости от размерности пространства.

В качестве примерных заданий кейса предлагается решить следующие задачи ([3, 4]) (одинаковые задания раздаются в каждую группу):

1. Дан  $\triangle ABC$ . Найти уравнение биссектрисы  $\angle A$ , если его вершины имеют координаты  $A(4; 1)$ ,  $B(7; 5)$ ,  $C(-4; 7)$ .
2. Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя прямыми:  $x + 7y - 6 = 0$  и  $5x - 5y + 1 = 0$ . Проверить, что эти биссектрисы перпендикулярны друг другу.
3. Доказать, что две данные прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются, и составить уравнения биссектрис острого и тупого углов между ними.

$$l_1 : \begin{cases} x = 8 + 7t, \\ y = 1 + t \end{cases} \text{ и } l_2 : \frac{x + 4}{2} = \frac{y + 3}{-2}.$$

4. Составить уравнение биссектрисы  $\angle A$  треугольника  $\triangle ABC$  с вершинами  $A(4; 1; -2)$ ,  $B(2; 0; 0)$ ,  $C(-2; 3; -5)$ .
5. Доказать, что две данные прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются, и составить уравнения биссектрис острого и тупого углов между ними.

$$l_1 : \begin{cases} x = 4 - 4t, \\ y = 1 + 4t, \\ z = -5 + 7t \end{cases} \text{ и } l_2 : \frac{x + 3}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 4}{2}.$$

6. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Варианты решения основаны на знаниях школьного курса геометрии [5]:

1. Определение биссектрисы угла (луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла).
2. Свойство биссектрисы (каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон).
3. Основное свойство биссектрисы угла (биссектриса при вершине треугольника делит противоположную сторону на два отрезка, пропорциональных сторонам треугольника, прилежащим к данным отрезкам).
4. Признак ромба (если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм является ромбом).

Основные вопросы, на которые студенты должны дать ответ:

1. Для каждой стороны угла получите координаты направляющего вектора и координаты вершины угла, выпишите ответ.
2. Найдите уравнение биссектрисы угла четырьмя способами.
3. Какое время потрачено на решение для каждой задачи каждым из четырёх способов?
4. Какие типы задач можно выделить?
5. Предоставьте рекомендации по выбору способа решения в зависимости от типа задачи.
6. *Дополнительный вопрос:* Назовите условия, при которых прямая является биссектрисой данного угла.

Результаты измерений предлагается занести в таблицу:

Номер задачи	Ответ	Время, затраченное на решение				Вывод о лучшем способе решения
		1 метод	2 метод	3 метод	4 метод	
1						
2						
3						
4						
5						
6						

После выполнения задания студенты публично обсуждают результаты, полученные в разных группах, и делают выводы о целесообразности применения того или иного метода решения в зависимости от вида задачи.

По итогам занятия формулируются следующие рекомендации:

- при решении задач на плоскости использование направляющих векторов прямых или векторов нормали не влияет на сложность вычислений;
- задачи в двумерном пространстве целесообразнее решать вторым способом, используя формулу расстояния от точки до прямой на плоскости;
- уравнения прямых в трёхмерном пространстве необходимо свести к параметрическому или каноническому видам;
- задачи в трёхмерном пространстве эффективнее решать четвёртым способом. Для этого нужно нормировать направляющие векторы прямых, задающих стороны угла, и найти направляющий вектор биссектрисы, как их сумму.

### 3. Методические рекомендации

Подробное описание плана занятия изложено в [6]. Уточним некоторые детали, относящиеся непосредственно к данному кейсу.

В начале занятия требуется повторение основных определений (направляющий вектор прямой, вектор нормали, нормированный вектор), различных уравнений прямой (параметрические, канонические, в общем виде на плоскости и в пространстве), свойств биссектрисы угла, критерия коллинеарности векторов, свойств скалярного и векторного произведения векторов, формул расстояния от точки до прямой на плоскости и в пространстве и длины вектора.

В ходе выполнения кейса основное внимание уделяется эффективности нахождения уравнения биссектрисы угла рассматриваемой задачи. На проведение занятия отводится 4 академических часа (сдвоенное занятие).

*Критерии оценивания:*

Студенты, правильно определившие координаты направляющего вектора прямой и вершины угла, получают 25 баллов.

Студенты, правильно определившие уравнение биссектрисы угла, получают 40 баллов.

Студенты, заполнившие таблицу, получают 15 баллов.

Студенты, сформулировавшие рекомендации по выбору метода нахождения уравнения биссектрисы угла, получают 20 баллов.

Сопоставление оценки за занятие с баллами описано в [6]. По результатам занятия оценку получает каждый студент.

### Заключение

Применение представленной педагогической методики способствует развитию исследовательских способностей студентов, формированию навыков группового взаимодействия, эффективного общения, а также развитию системного подхода к решению задач.

Анализируя итоги реализации данного кейса, можно обоснованно считать, что степень освоения учебной программы существенно возрастает. Студенты быстрее находят уравнение биссектрисы угла, увереннее решают задачи, связанные с уравнениями прямых, что в свою очередь способствует более эффективному решению задач в рамках последующих тем.

Другие варианты использования кейс-технологии в преподавании фундаментальных дисциплин рассмотрены автором на примере курса «Алгебра» бакалавриата ИТ-специальностей [6, 7].

### Литература

- [1] Педагогические технологии в 3 ч. Часть 1. Образовательные технологии: учебник и практикум для вузов / под общей редакцией Л. В. Байбородовой, А. П. Чернявской. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 258 с.
- [2] Попова С. Ю., Пронина Е. В. Современные образовательные технологии. Кейс-стади: учебник для вузов. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2025. — 123 с.
- [3] Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие для вузов. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 496 с.
- [4] Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии: учебное пособие для вузов. — Санкт-Петербург: Лань, 2024. — 336 с.
- [5] Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. — 336 с.
- [6] Титова Е. Б. Пример использования кейс-технологии в курсе алгебры // Математика в высшем образовании. 2023. № 21. С. 71–76.
- [7] Титова Е. Б. Применение кейс-технологий в преподавании фундаментальных дисциплин на примере курса алгебры // Математика в высшем образовании. 2024. № 22. С. 63–68.

Поступила 21.12.2025

**CASE-BASED TECHNOLOGIES IN TEACHING  
FUNDAMENTAL DISCIPLINES AT UNIVERSITY:  
ALGEBRA AND GEOMETRY**

*E. B. Titova*

This paper examines practical aspects of implementing case-based technology in teaching fundamental disciplines for bachelor's degree programs in Information Technology specialties using the example of an «Algebra and Geometry» course. The presented case study focuses on applying bachelors' knowledge from analytic geometry to find the equation of the angle bisector both in a plane and in space. It develops students' ability to compare different methods of finding equation of the angle bisector depending on the dimension of the space.

*Keywords:* case technology, algebra and geometry, straight line on a plane, straight line in space, equation of the angle bisector, fundamental disciplines.