ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

УДК 514.112.3

РАЗБОР ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЗАДАНИЯ О ТРЕУГОЛЬНИКАХ

В. А. Лецко

Волгоградский гос. социально-педагогический университет, Волгоград, Россия

val-etc@yandex.ru

В статье разобраны исследовательские задачи о треугольниках. Часть задач связана с классификацией треугольников на основании возможности дополнения исходного треугольника до равнобедренного или разрезания его на два равнобедренных. В других задачах решается вопрос о существовании треугольников с заданными свойствами.

Ключевые слова: треугольник, классификация.

1. Исследовательское задание из прошлого выпуска журнала

1. Каждому треугольнику сопоставим целое неотрицательное число k, если из данного треугольника можно получить k разных равнобедренных треугольников, приложив к нему (совместив по стороне) какой-то треугольник (возможно, равный исходному). Полученные таким способом равнобедренные треугольники не должны быть равны, но могут быть подобны. Найти все возможные значения k.
2. Сколько (с точностью до подобия) существует треугольников, каждый из которых может быть разрезан на два равнобедренных треугольника более чем одним способом?

   Рассмотрите два случая:

   (a) способы считаются разными, если разрезающие отрезки не совпадают;

   (b) способы считаются разными лишь в том случае, когда полученная при первом разрезании пара равнобедренных треугольников отличается от аналогичной пары, полученной при втором способе разрезания.

3. Существует ли треугольник, у которого
   (a) сумма двух медиан равна третьей?
   (b) сумма двух биссектрис равна третьей?
   (c) сумма двух высот равна третьей?
   (d) выполняются одновременно два равенства из предыдущих пунктов?
4. Пусть $a \leqslant b \leqslant c$ – стороны некоторого треугольника, а h_a, h_b, h_c, l_a, l_b, l_c, m_a, m_b, m_c – соответствующие им высоты, биссектрисы и медианы. Хорошо известно, что $h_c \leqslant h_b \leqslant h_a$, $l_c \leqslant l_b \leqslant l_a$, $m_c \leqslant m_b \leqslant m_a$, $h_c \leqslant l_c \leqslant m_c$, $h_b \leqslant l_b \leqslant m_b$, $h_a \leqslant l_a \leqslant m_a$.
   (a) А есть ли ещё какие-нибудь соотношения между высотами, биссектрисами и медианами, не вытекающие напрямую из перечисленных выше неравенств и справедливые для любого треугольника?
   (b) Существуют ли разносторонние треугольники, для которых $h_a = l_b = m_c$?

2. Решение первой задачи

На первый взгляд кажется, что задача сложна. Ведь исходные треугольники могут быть какими угодно. Конечно, очевидно, что принадлежность к какому-либо классу определяется только формой треугольника. С точностью до подобия треугольник определяется двумя параметрами (например, двумя углами). Но и две степени свободы — это достаточно много.

Оказывается, эти трудности легко преодолеть, просто упорядочив углы рассматриваемых треугольников. Итак, обозначим углы треугольника через α, β, γ и договоримся считать, что $\alpha < \beta < \gamma$. Мы предположили, что равенства строгие. Это означает, что равнобедренные треугольники нам придётся разобрать отдельно.

Ясно, что две вершины равнобедренного треугольника, образовавшегося приложением к исходному какого-то треугольника, совпадают с вершинами исходного, а третья лежит на продолжении какой-либо стороны исходного треугольника (в противном случае образовавшаяся фигура не будет треугольником). Поэтому новая вершина лежит на одном из шести лучей, являющихся продолжениями сторон исходного треугольника. Остаётся аккуратно перебрать 6 этих случаев. В наших рассуждениях мы будем активно использовать соображения непрерывности (позже мы покажем, как можно оформить решения без явного апеллирования к этим идеям).

Через A, B, C обозначим вершины исходного треугольника, а углы возникающего равнобедренного треугольника через $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (один из них совпадает с соответствующим углом исходного треугольника). Новую вершину

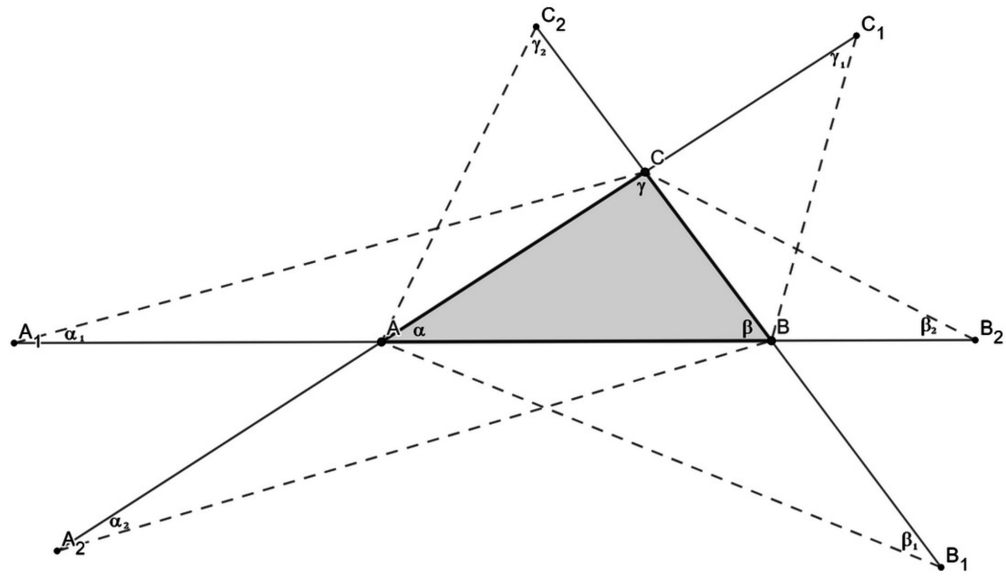

Рис. 1

обозначим через A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 или C_2, в зависимости от того, на каком из шести лучей лежит добавляемая вершина (см. рис. 1).

1. При движении вершины A_1 влево угол α_1 уменьшается, $\beta_1 = \beta$ остаётся неизменным, а γ_1 увеличивается. При этом $\gamma_1 > \gamma$, а α_1 меньше α (α – внешний угол треугольника AA_1C). Поэтому треугольник A_1BC будет оставаться разносторонним при любом положении точки A_1.

2. В процессе удаления точки A_2 от точки A по второму лучу α_1 попрежнему уменьшается. Но теперь $\gamma_1 = \gamma$ остаётся неизменным, а β_1 увеличивается. Найдётся ли при этом такое положение A_2, при котором β_1 сравняется с γ, очевидно зависит от величины угла γ. Такое положение найдётся тогда и только тогда, когда угол γ острый. Таким образом, во втором случае либо найдётся ровно одно положение точки A_2, при котором новый треугольник станет равнобедренным, либо не найдётся ни одного.

3. Пусть теперь вершина B_1 удаляется от вершины B по продолжению стороны CB. Ясно, что в этом случае уменьшаться будет β_1, а увеличиваться – α_1. При этом обязательно найдётся такое положение B_1, при котором углы α_1 и β_1 сравняются. Догонит ли угол α_1 угол γ опять зависит от того, будет ли исходный треугольник остроугольным. Таким образом, на третьем луче найдутся два подходящих положения добавляемой вершины в случае остроугольности исходного треугольника и одно, если исходный треугольник будет тупоугольным или прямоугольным.

4. При движении вершины B_2 вправо обязательно наступит момент, когда углы α_1 и β_1 станут равными. При этом угол γ_1 всегда будет оставаться наибольшим. Поэтому в данном случае возникнет ровно один подходящий треугольник.

5. При движении точки C_1 по продолжению стороны AC за точку C уменьшающийся угол γ_1 сначала сравняется с возрастающим углом β_1, а затем и с неизменным α_1. Поэтому на пятом луче всегда найдутся два интересующих нас положения точки C_1.

6. Самый результативный и интересный случай возникает, когда вершина C_2 удаляется от C по продолжению стороны BC. Уменьшающийся угол γ_1 обязательно станет равным и возрастающему углу α_1, и неизменному углу β. Кроме того, возрастающий угол α_1 в какой-то момент сравняется с углом β. Значит, к найденным ранее вариантам добавятся ещё три? Но в какой последовательности произойдут эти три события? Это определяется величиной угла β. При этом, если $\beta = 60^o$, все три события наступят одновременно, а новый треугольник будет равносторонним! Таким образом на шестом луче всегда найдутся три подходящие точки, за исключения случая $\beta = 60^o$, когда все эти три точки совпадут.

Итак, в случае разностороннего треугольника наибольшее значение искомого числа k достигается для остроугольных треугольников без угла в 60^o (если в разностороннем треугольнике есть такой угол, он может быть только средним по величине) и равно $0 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 = 9$ (см. рис. 2).

Но для всех ли таких треугольников $k = 9$? Вдруг среди полученных равнобедренных треугольников окажутся равные, в то время как по условию все они должны быть различны? Покажем, что в рассматриваемом случае равных треугольников не возникнет. В самом деле, равные треугольники подобны между собой и, следовательно, имеют равные углы. Но в каждом из новых треугольников один из углов наследуется от исходного. Поэтому достаточно отследить, какой из углов исходного треугольника имеется в каждом из новых. При этом следует различать случаи, когда «старый» угол является углом при основании нового треугольника или углом при вершине.

На рисунке 2 хорошо видно, что каждый из углов исходного треугольника ровно один раз является углом при вершине нового треугольника: α для треугольника BAH; β для треугольника ABI; γ для треугольника ACG. Значит, эти треугольники «бесподобны». В то же время, каждый из исходных углов дважды встречается в качестве угла при основании нового треугольника. Поэтому оставшиеся 6 треугольников разбиваются на 3 пары подобных между собой: $ABI \sim ACG$; $AJB \sim BAL$; $AFC \sim BDC$. Но, поскольку исходный треугольник разносторонний, очевидно, что соответствующие стороны в каждой из пар не равны. Следовательно, и сами треугольники не равны.

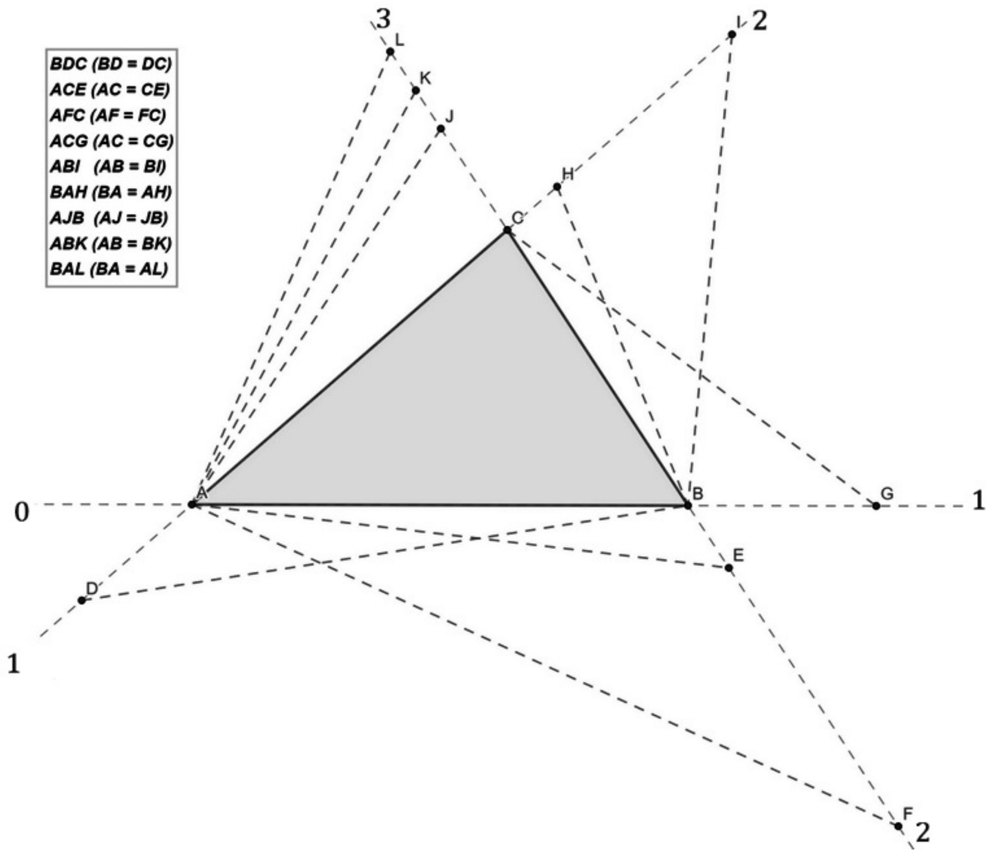

Рис. 2

Если исходный разносторонний треугольник не является остроугольным, но при этом не содержит угла в 60^o, то описанным в условии способом его можно достроить до семи разных равнобедренных треугольников (пропадают по одной новой вершине на втором и третьем лучах). То есть, в этом случае $k = 7$.

Для разностороннего остроугольного треугольника интересующее нас значение k тоже равно 7. Но теперь сливаются в одну три потенциальных новых вершины на шестом луче.

Наконец, если треугольник содержит угол в 60^o и одновременно с этим не является остроугольным (таковым является, например, «любимый школьный» треугольник с углами $30^o, 60^o, 90^o$), то $k = 5$.

Мы разобрались с разносторонними треугольниками, осталось посмотреть, чему может равняться k для равнобедренных.

Малое количество способов получения равнобедренного треугольника при равнобедренности исходного обусловлено двумя обстоятельствами:

– невозможность уравнять углы α_1 и β_1 приложением дополнительного треугольника, в случае, когда α и β были изначально равны;

– новые треугольники, которые в случае разностороннего треугольника оказывались подобными, в случае равнобедренного могут оказаться равными, а такие варианты по условию считаются за один.

Самое радикальное сокращение возможности достроить исходный равнобедренный треугольник до нового происходит в случае, когда исходный имеет угол в 60^o, то есть, является равносторонним. При размещении новой вершины на продолжении любой стороны исходного треугольника один из трёх изначально равных углов уменьшается, другой не меняется, а третий увеличивается. Это исключает равенство углов нового треугольника. Значит, для равностороннего треугольника $k = 0$.

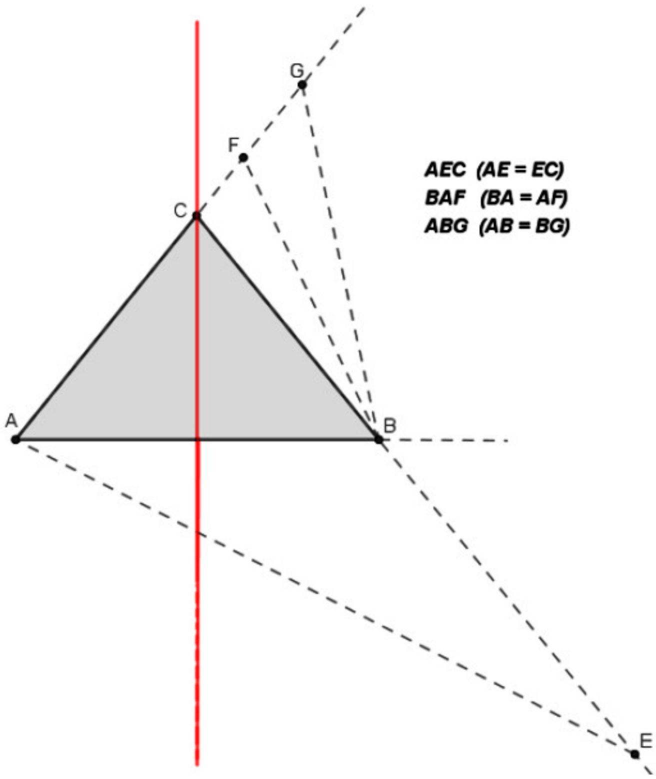

Рис. 3

На рисунке 3 отображён исходный треугольник для которого $\alpha = \beta < \gamma$ и при этом $\gamma < 90^o$. Достаточно рассмотреть положение новых вершин на трёх из шести возможных лучах. Расположение новых вершин на трёх других лучах, не может привести к новым подходящим треугольникам в силу симметрии. На рис. 3 указаны все возможные положения новой вершины, приводящие к равнобедренным треугольникам. Таким образом, для рассматриваемого случая $k = 3$. Легко убедиться, что при равенстве двух больших, а не двух меньших углов исходного треугольника значение k будет тем же.

А вот если отказаться от условия $\gamma < 90^o$, значение k станет равным 2, поскольку исчезнет треугольник, который на рис. 3 обозначен AEC.

Окончательно получаем, что искомое множество значений k состоит из чисел $0, 2, 3, 5, 7, 9$.

Заметим, что все новые вершины можно было получить как пересечения срединного перпендикуляра к стороне (или окружности с центром в вершине исходного треугольника и радиусом, равным стороне) с продолжением другой стороны без явного упоминания непрерывности изменения углов.

3. Решение второй задачи

Как и в предыдущей задаче упорядочим углы исходного треугольника ABC, положив $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Но, в отличие от первой задачи, нам удобнее не рассматривать равнобедренные треугольники отдельно от разносторонних. Это позволит нам искать ответы на вопросы обоих пунктов задачи одновременно.

Сначала исследуем, для каких треугольников существует хотя бы один требуемый разрез. Ясно, что этот разрез обязан проходить через вершину исходного треугольника. В противном случае одна из фигур, полученных в результате разрезания, будет четырёхугольником.

Пусть сначала линия разреза проходит через вершину A, рассекая меньший из углов ABC (см. рис. 4). Угол ψ строго больше γ, как внешний угол треугольника ACD. Поэтому $\omega < \beta < \psi$ и треугольник ABD не может быть равнобедренным.

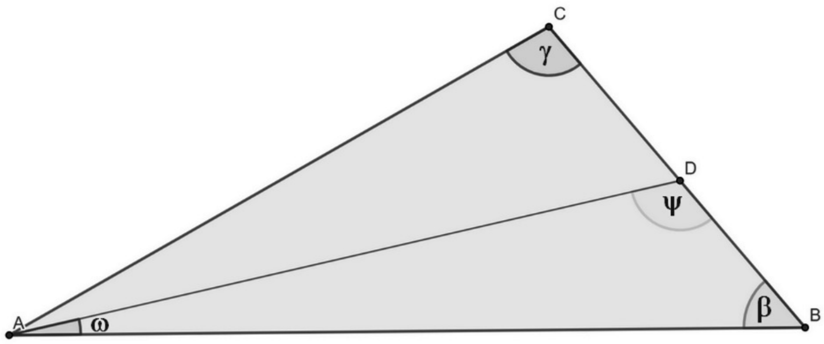

Рис. 4

Пусть теперь прямая, рассекающая треугольник ABC на два равнобедренных, проходит через B и пересекает сторону AC в точке D (рис. 5).

В этом случае угол α может быть только углом при основании одного из равнобедренных треугольников, иначе угол BDC был бы тупым (и, значит, большим γ), а треугольник BCD разносторонним. Угол α заведомо меньше угла ADB. Тогда он равен углу ABD, а угол BDC равен 2α.

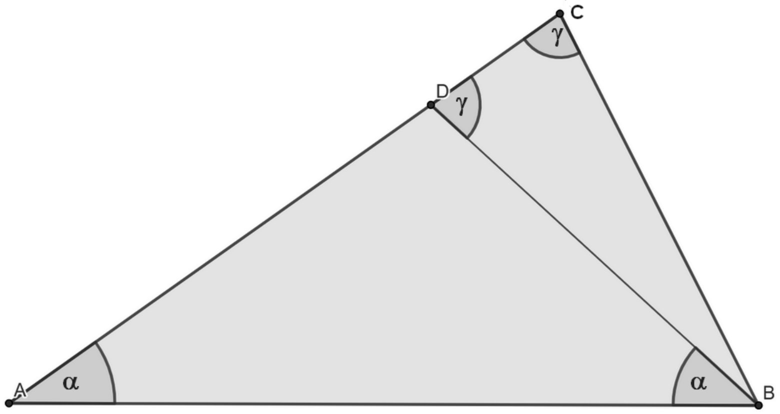

Рис. 5

Угол BDC не может быть углом при вершине равнобедренного треугольника (угол CBD меньше γ). Пусть вершиной равнобедренного треугольника BCD является точка B (рис. 5). Тогда $\gamma = 2\alpha$. Для отыскания диапазона изменения α учтём, что с одной стороны $\beta = \alpha + \pi - 4\alpha \leqslant \gamma = 2\alpha$, откуда $\alpha \geqslant \frac{\pi}{5}$, а с другой — $\gamma < \frac{\pi}{2}$, откуда $\alpha < \frac{\pi}{4}$. Окончательно, первый разрез существует при условиях

$$\gamma = 2\alpha, \quad \frac{\pi}{5} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

Если вершиной равнобедренного треугольника BCD будет точка C, то $\beta = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ (см. рис. 6). Найдём диапазон, в котором может изменяться α с сохранением всех требуемых соотношений. Имеем $\gamma = \pi - 4\alpha \geqslant \beta = 3\alpha$, откуда $\alpha \leqslant \frac{\pi}{7}$. Итак, второй подходящий разрез существует при условиях

$$\beta = 3\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{7}. \tag{2}$$

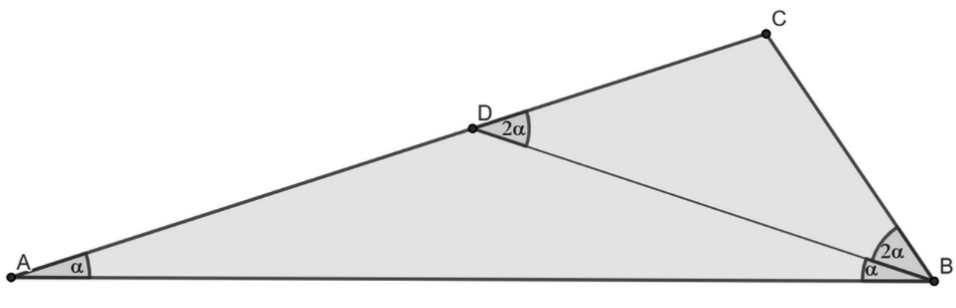

Рис. 6

Переходим к рассмотрению сечений, проходящих через вершину C. Точку пересечения секущей прямой со стороной AB вновь обозначим через D. На этот раз α может быть как углом при основании, так и углом при вершине равнобедренного треугольника ADC. В первом случае угол ACD также будет равен α, а каждый из углов равнобедренного треугольника BCD может быть его вершиной.

Если вершина находится в точке B (рис. 7), углы BCD и BDC равны по 2α. Тогда $\gamma = 3\alpha$ и $\beta = \pi - 4\alpha$. Подставляя эти значения в соотношение между углами ABC, получим условия существования третьего разреза

$$\gamma = 3\alpha, \quad \frac{\pi}{7} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{5}. \tag{3}$$

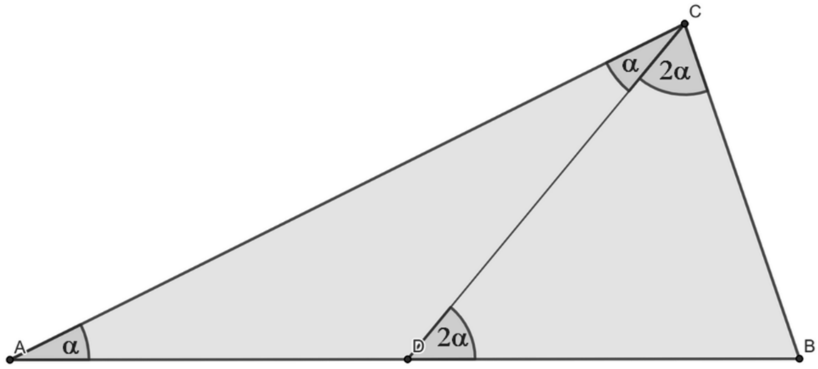

Рис. 7

Если вершина равнобедренного треугольника BCD находится в C (рис. 8), то угол BDC, а значит, и равный ему угол β равны по 2α. Тогда $\gamma = \pi - 4\alpha$. С учётом неравенства $\beta \leqslant \gamma$ получаем условия для четвёртого разреза

$$\beta = 2\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{5}. \tag{4}$$

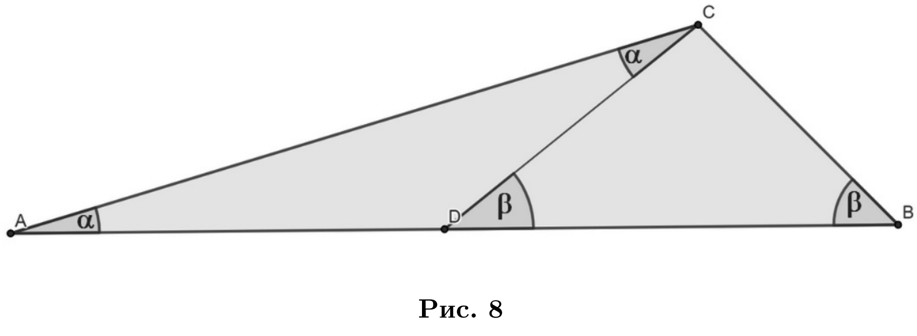

Рис. 8

Если же вершина равнобедренного треугольника BCD находится в D (рис. 9), то угол BDC равен 2α. Тогда $\gamma = \alpha + \frac{\pi-2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ и мы, наконец, добрались до наиболее известного способа разрезания треугольника на два равнобедренных. С учётом соотношения $\alpha \leqslant \beta$ условия его существования выглядят так

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}. \tag{5}$$

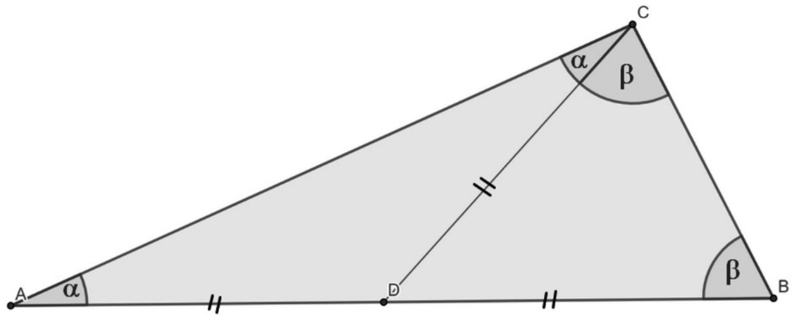

Рис. 9

Нам осталось рассмотреть ситуацию, при которой вершина равнобедренного треугольника ACD находится в A (рис. 10). В этом случае угол BDC обязан быть тупым. Поэтому только он может быть вершиной равнобедренного треугольника BCD.

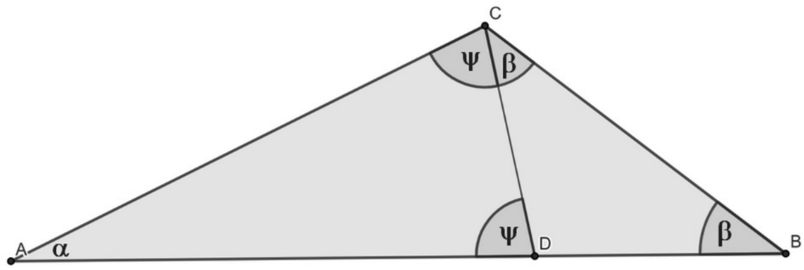

Рис. 10

Угол ADC в 2 раза больше β, как внешний угол треугольника BCD. Поэтому $\gamma = 2\beta + \beta = 3\beta$. Для получения ограничений на α заметим, что $\alpha = \pi - 4\beta$. Вместе с соотношением $\alpha \leqslant \beta$ это даёт окончательные условия существования шестого способа разрезания

$$\gamma = 3\beta, \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{5}. \tag{6}$$

Мы получили все возможные условия существования разреза исходного треугольника на два равнобедренных. Но в задаче требуется найти треугольники, для которых существует не менее двух таких разрезов. Для этого переберём сочетания условий (1)–(6) по 2.

К сожалению (или к счастью, поскольку наше решение и без того затянулось), многие пары полученных условий не совместны:

- (1) и (2) имеют не пересекающиеся диапазоны для α;
- (1) и (3) приводят к невозможному значению $\alpha = 0$;
- (1) и (5) дают $\alpha = \frac{\pi}{4}$, противоречащее (1);
- (1) и (6) дают $\alpha > \beta$;
- (2) и (4) вновь влекут $\alpha = 0$;
- (5) и (6) снова приводят к $\alpha > \beta$;

Любопытная ситуация возникает при проверке совместности условий (3), (4) и (5). Они совместны не только попарно, но и все три одновременно. Треугольник с углами $30^o, 60^o, 90^o$ удовлетворяет всем трём условиям.

Значит, мы нашли треугольник, допускающий сразу 3 интересующих нас разреза?! Нет! Дело в том, что все три условия приводят к одному и тому же разрезу с помощью медианы из прямого угла. То есть разрез всего один, но оказался сосчитанным три раза. Возникающий в результате разрезания треугольник BCD — равносторонний. Такой треугольник можно считать «трижды равнобедренным» (мы уже сталкивались с этим моментом при решении первой задачи).

Итак, 9 из 15 сочетаний условий (1)–(6) не приводят к решениям. Остальные более результативны. Три пары позволяют обнаружить треугольники, удовлетворяющие первому (но не второму) пункту условия.

Сочетание условий (1) и (4) приводит к равнобедренному треугольнику с углом 36^o при вершине. Очевидно, разрез по каждой из биссектрис угла при основании такого треугольника даёт два равнобедренных треугольника. Один из них подобен исходному треугольнику, а другой имеет при вершине угол 108^o.

Комбинация условий (3) и (6) приводит к равнобедренному треугольнику, в некотором смысле, двойственному предыдущему. Угол при вершине у этого треугольника равен 108^o. А разрезание по каждой из двух трисектрис угла при вершине даёт два равнобедренных треугольника. Один из них подобен исходному треугольнику, а другой — треугольнику из предыдущего пункта.

Комбинация условий (2) и (3) приводит к ещё одному равнобедренному треугольнику. Его угол при вершине равен $\dfrac{\pi}{7}$. Одна из трисектрис угла при основании разбивает такой треугольник на треугольник с углами $\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{\pi}{7}, \dfrac{5\pi}{7}$ и треугольник с углами $\dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{3\pi}{7}$. Разумеется, такие же треугольники возникают при разрезании по симметричной трисектрисе.

Оставшиеся три пары ограничений приводят к «полноценным» (удовлетворяющим обоим пунктам условия) треугольникам.

Объединяя условия (2) и (5), придём к треугольнику, который школьники и студенты, коим автор давал эту задачу, обычно находят первым. А именно прямоугольный треугольник с острым углом $\frac{5\pi}{8}$. Один подходящий разрез, медианой из вершины прямого угла, годится для любых прямоугольных треугольников. В дополнение к этому разрезу у данного треугольника имеется разрез, в результате которого возникают прямоугольный равнобедренный треугольник и равнобедренный треугольник с углом 135^o при вершине.

Комбинация условий (2) и (6) приводит к треугольнику с углами $\frac{\pi}{13}, \frac{3\pi}{13}, \frac{9\pi}{13}$. Разрезом, проходящим через B, он разбивается на равнобедренные треугольники с углами $\frac{9\pi}{13}$ и $\frac{11\pi}{13}$ при вершинах. А разрезом через вершину C — на равнобедренные треугольники с углами $\frac{\pi}{13}$ и $\frac{7\pi}{13}$ при вершинах.

Наконец, совмещение условий (4) и (6) даёт треугольник с углами $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}$. Оба подходящих разреза проходят через C. В одном случае возникают равнобедренные треугольники с углами $\frac{\pi}{9}$ и $\frac{5\pi}{9}$ при вершинах, а в другом — $\frac{7\pi}{9}$ и вновь $\frac{5\pi}{9}$.

На рис. 11 представлены все шесть подходящих треугольников. Три треугольника в левой части рисунка дают ответ на вопрос пункта (b). Добавляя к ним три равнобедренных треугольника из правой части, получим ответ на вопрос пункта (a).

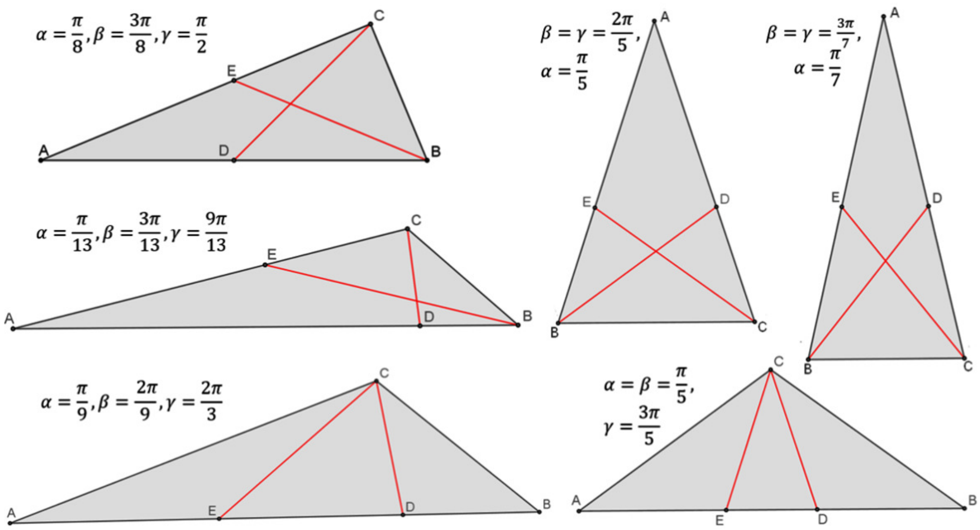

Рис. 11

Заметим, что все шесть треугольников могут быть получены фиксацией трёх подходящих вершин подходящего правильного многоугольника.

Подробный разбор первых двух задач автор проводил для московских учителей в рамках проекта «Математическая вертикаль» (см. [1]).

4. О параметризации треугольников

Как уже было отмечено, во всех задачах нас интересует только форма, но не размеры рассматриваемых треугольников. С точностью до подобия треугольник определяется двумя параметрами, например, парой углов. Именно на углах мы сосредотачивали своё внимание при разборе первых двух задач.

Формально мы могли поступить так. Рассмотреть треугольную область OPQ. Вершины этого треугольника имеют координаты $O(0;\,0)$, $P\left(\dfrac{\pi}{3};\,\dfrac{\pi}{3}\right)$, $Q\left(0;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ в координатной плоскости $\alpha O\beta$. Каждая точка внутри области и на границах OP и PQ (но не OQ) задаёт треугольник с углами $\alpha \leqslant \beta \leqslant \pi - \alpha - \beta$. Обратно, каждому треугольнику с заданными углами соответствует ровно одна точка в области OPQ.

На рисунке 12 показано, как можно было использовать данную параметризацию для решения второй задачи. Полуинтервалы OR и QS соответствуют точкам, отвечающим условиям (2) и (5). На их пересечении лежит точка $T\left(\dfrac{\pi}{8};\,\dfrac{3\pi}{8}\right)$, соответствующая искомому треугольнику.

Найденные нами в процессе решения второй задачи соотношения между углами были настолько просты, что мы легко справились, не прибегая к параметризации. Зависимости между рассматриваемыми объектами в следующих

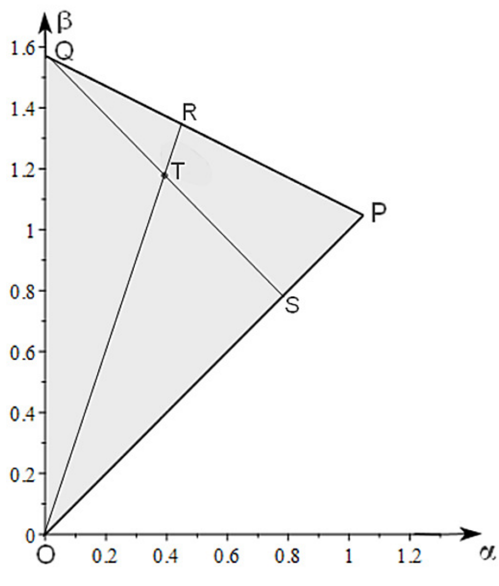

Рис. 12

двух задачах будут намного сложнее. Но подход, описанный в этом разделе, сработает почти без изменений.

Однако параметризация всех треугольников с точностью до подобия возможна не только через углы. В решении оставшихся задач мы воспользуемся другой параметризацией.

Зафиксируем в системе координат xOy точки $A(-1;0)$ и $B(1;0)$. Рассмотрим область, ограниченную осями координат и дугой BD, представляющей из себя часть окружности с центром в точке A, лежащую в первом квадранте (см. рис. 13). Будем считать, что отрезок OB не принадлежит данной области, а отрезок OD и дуга BD принадлежат. В дальнейшем для краткости будем называть указанную область «парусом».

Легко убедиться, что для произвольного треугольника в парусе найдётся ровно одна точка $C(x;y)$ такая, что исходный треугольник подобен треугольнику ABC. В частности, точки, лежащие на интервале OD, соответствуют равнобедренным треугольникам, у которых угол при вершине больше 60^o. Внутренние точки дуги BD соответствуют равнобедренным треугольникам с углом при вершине меньше 60^o. А сама точка D отвечает равносторонним треугольникам. Треугольник ABC будет прямоугольным тогда и только тогда, когда C принадлежит дуге BE окружности с центром в начале координат. Точкам C, расположенным выше этой дуги, соответствуют остроугольные треугольники, а ниже — тупоугольные.

Некоторые интересные подробности, касающиеся различных параметризаций треугольников, можно найти, например, в [2].

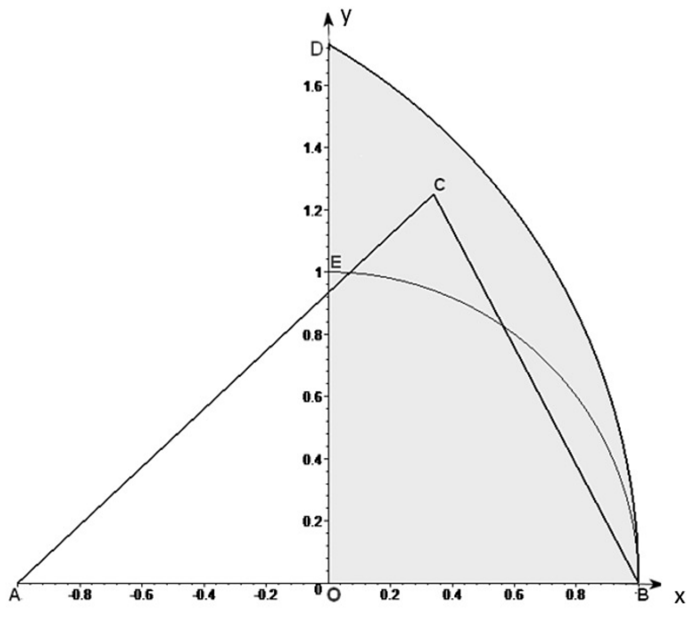

Рис. 13

5. Решение третьей задачи

Пункт (а) совсем прост и не требует обращения к параметризации, описанной в предыдущем разделе.

Пусть медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке F. Проведём отрезок C_1K, где K — середина BF. Легко видеть, что каждая из сторон треугольника C_1FK составляет третью часть какой-то (для каждой стороны своей) медианы исходного треугольника (рис. 14). Таким образом, треугольник C_1FK подобен треугольнику, составленному из медиан ABC. Значит, медианы исходного треугольника удовлетворяют неравенству треугольника и ни одна из них не может быть равна сумме двух других.

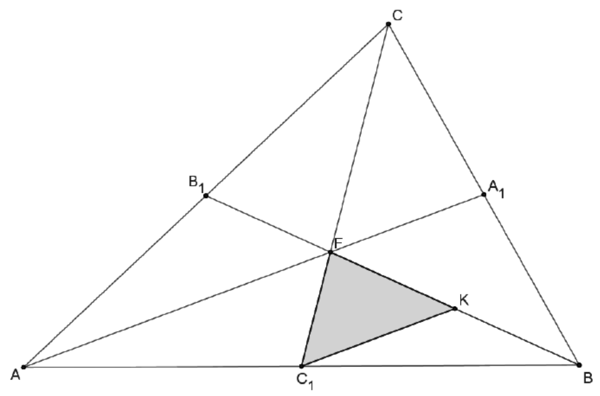

Рис. 14

Для решения остальных пунктов воспользуемся нашей второй параметризацией. Тогда вершины исследуемого треугольника будут иметь координаты $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(x;y)$, причём координаты C удовлетворяют ограничениям, задающим парус.

Для сторон треугольника ABC имеем

$$a=\sqrt{(1-x)^2+y^2},\quad b=\sqrt{(1+x)^2+y^2},\quad c=2. \tag{7}$$

Как известно, биссектрисы треугольника выражаются через его стороны (p — полупериметр треугольника ABC):

$$l_a=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c},\quad l_b=\frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c},\quad l_c=\frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}. \tag{8}$$

Сумме двух других биссектрис может равняться только l_a. После подстановки соответствующих значений из (7) и (8) в соотношение $l_b+l_c=l_a$ получим уравнение (мы не приводим его ввиду большой громоздкости), описывающее точки C, для которых в треугольнике ABC выполнено требуемое соотношение между биссектрисами. С помощью какого-либо математическо-

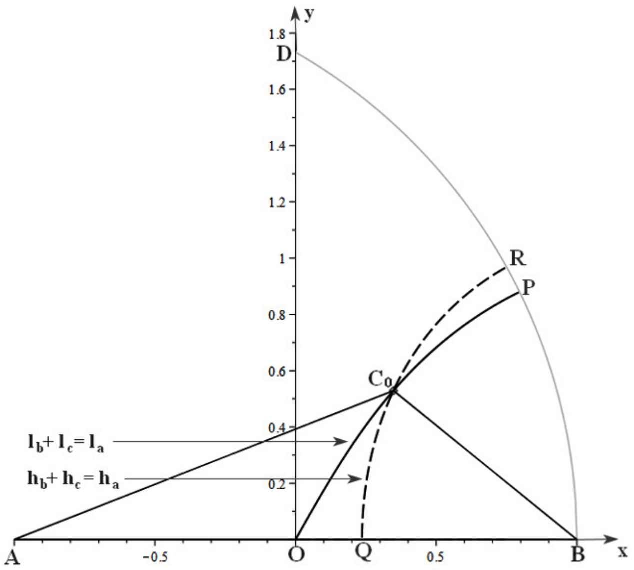

Рис. 15

го пакета (мы использовали *maple*) отобразим соответствующую кривую в области парус (дуга OP на рис. 15).

Таким образом, ответ на вопрос пункта (b) положителен.

Пункт (c) рассматривается аналогично, с той разницей, что интересующие нас соотношения будут менее громоздки. В самом деле, очевидно, $h_c = y = S_{ABC}$. С учётом $h_a = \dfrac{2S_{ABC}}{a}$, $h_b = \dfrac{2S_{ABC}}{b}$ уравнение $h_b + h_c = h_a$ примет вид

$$\frac{2y}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}} + y = \frac{2y}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}. \tag{9}$$

Соответствующая кривая (QR), также представленная на рис. 15, показывает, что и ответ на вопрос пункта (c) положителен.

Более того, исследуя вопросы о равенстве одной из биссектрис или высот треугольника сумме двух других, мы уже получили положительный ответ и на вопрос пункта (d). В точке пересечения дуг OP и QR выполняются оба интересующих нас равенства. Соответственно в треугольнике ABC_0 сумма двух биссектрис равна третьей и аналогичное соотношение имеет место для высот. Ввиду громоздкости и высокой степени уравнения $l_b + l_c = l_a$ координаты точки пересечения дуг OP и QR удаётся найти только численно $C_0(\,0.3478\ldots;\,0.5292\ldots)$.

Въедливый читатель вполне вероятно критически отнесётся к приведённому решению. Мол, нарисовали картинку и увидели, что две линии пересекаются... Что это за решение?!

Превентивно отвечая на критику, заметим, что координаты точек пересечения интересующих нас дуг с осью абсцисс легко находятся: $O(0;0)$ и $Q(\sqrt{5}-2;0)$. Очевидно также, что точка R лежит выше точки P (биссектрисы из вершин основания равнобедренного треугольника длиннее высот, опущенных из тех же вершин). Но тогда наличие точки пересечения дуг OP и QR следует из непрерывности функций, задающих эти дуги, внутри области парус. А наша картинка просто позволяет воочию увидеть искомый треугольник.

6. Решение четвёртой задачи

На рис. 16 известные со школьной скамьи соотношения между медианами, биссектрисами и высотами произвольного треугольника отображены с помощью, так называемой, диаграммы Хассе: один элемент меньше либо равен другому, если из кружочка, соответствующего первому элементу, можно попасть в кружочек, соответствующий второму, двигаясь по линиям диаграммы вверх.

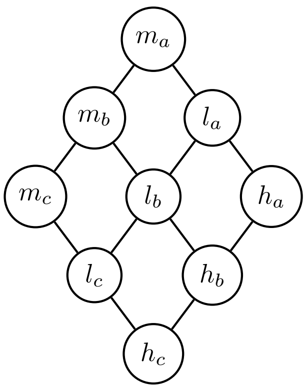

Рис. 16

Чтобы ответить на вопрос о существовании (или отсутствии) каких-либо соотношений, не отмеченных на рис. 16, вновь обратимся к параметризации треугольников, которая позволила нам наглядно увидеть решение предыдущей задачи.

Из рис. 16 видно, что отмеченные в условии неравенства оставляют открытым вопрос о соотношении между 9-ю парами элементов: (l_c, h_b); (l_c, h_a); (m_c, h_b); (m_c, l_b); (m_c, h_a); (m_c, l_a); (l_b, h_a); (m_b, h_a); (m_b, l_a).

При решении предыдущей задачи мы уже выразили биссектрисы и высоты треугольника через координаты точки C, «плавающей» вершины нашего треугольника. Найдём выражения медиан в нашей параметризации:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{(x+3)^2+y^2},\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2+y^2},\ m_c = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{10}$$

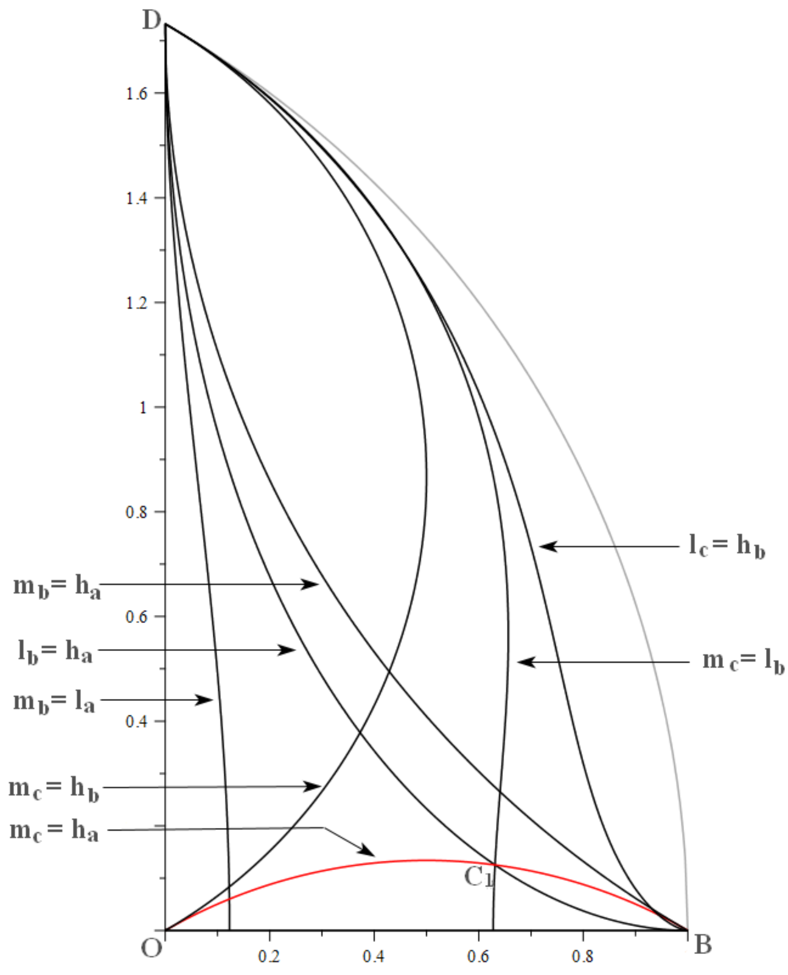

Рис. 17

Уравнение $l_c = h_b$ задаёт в области «парус» некоторую кривую, геометрическое место вершин C тех треугольников, у которых меньшая биссектриса равна средней высоте (рис. 17).

Возьмём какую-нибудь точку левее этой кривой, например, $C(0;1)$. Для прямоугольного равнобедренного треугольника очевидно, имеет место $l_c < h_b$. Но тогда в силу непрерывности такое соотношение имеет место для всех вершин C, лежащих левее нашей кривой. Справа же от этой кривой для всех C очевидно выполняется противоположное неравенство.

Поступим аналогично с остальными парами сравниваемых величин. При этом мы столкнёмся с несколькими «странностями».

Во-первых, у нас возникло не 9, а лишь 7 кривых. Соотношения $l_c = h_a$ и $m_c = l_a$ не оставили никаких следов в области «парус». Объяснение этого факта напрямую связано с решением первого пункта рассматриваемой задачи. Мы вернёмся к нему ниже, а пока обсудим другие «странности».

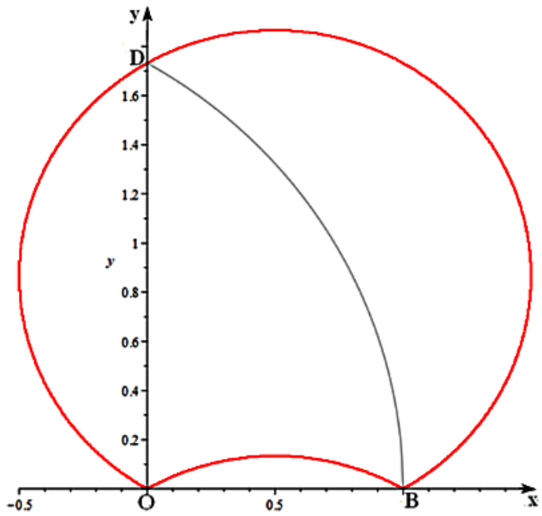

Рис. 18

Дуга $m_c = h_a$ ведёт себя очень подозрительно. В отличие от всех остальных кривых она не проходит через точку D, соответствующую равносторонним треугольникам. Но ведь этого не может быть: в равностороннем треугольнике выполняются все рассматриваемые равенства! Объяснение загадочному поведению кривой $m_c = h_a$ дано на рис. 18, на котором мы не ограничились рассмотрением области «парус». Да, оказывается соотношение $m_c = h_a$ задаёт на плоскости окружность (это легко проверить аналитически), дуга которой (как раз, та, что попала в парус) отразилась от оси абсцисс. И эта окружность, как и положено, проходит через D.

Ещё несколько вопросов возникает по поводу взаимного расположения нескольких кривых. Так, кривые $l_c = h_b$ и $m_c = l_b$ в верхней части рисунка почти сливаются. Не слишком ясно и как ведут себя наши кривые в районе точки B. Оказывается, кривые $l_c = h_b$ и $m_c = l_b$ прежде чем встретиться в точке D, пересекаются внутри паруса, образуя узкую серповидную область. Поведение кривых $l_c = h_b$, $m_c = h_a$ и $m_b = h_a$ показано на рис. 19. Таким образом, наши кривые делят парус на 18 областей.

Можно строго доказать, что дальнейшее масштабирование участков рис. 17 не выявит новых областей, но для решения нашей задачи потребуется лишь часть этого доказательства, связанная с поведением кривых $l_c = h_a$ и $m_c = l_a$. Их отсутствие на рис. 17 ничего не доказывает. Ведь и области, перечисленные в предыдущем абзаце, не слишком просматриваются. Вдруг кривые $l_c = h_a$ и $m_c = l_a$ очень близко примыкают к точке D или к границам паруса? Так что, картинка — это не доказательство. Но она наводит на мысль. На мысль о том, что между парами величин l_c, h_a и m_c, l_a есть какое-то соотношение, справедливое в любом треугольнике. Ведь именно об этом нас спрашивают в пункте (а).

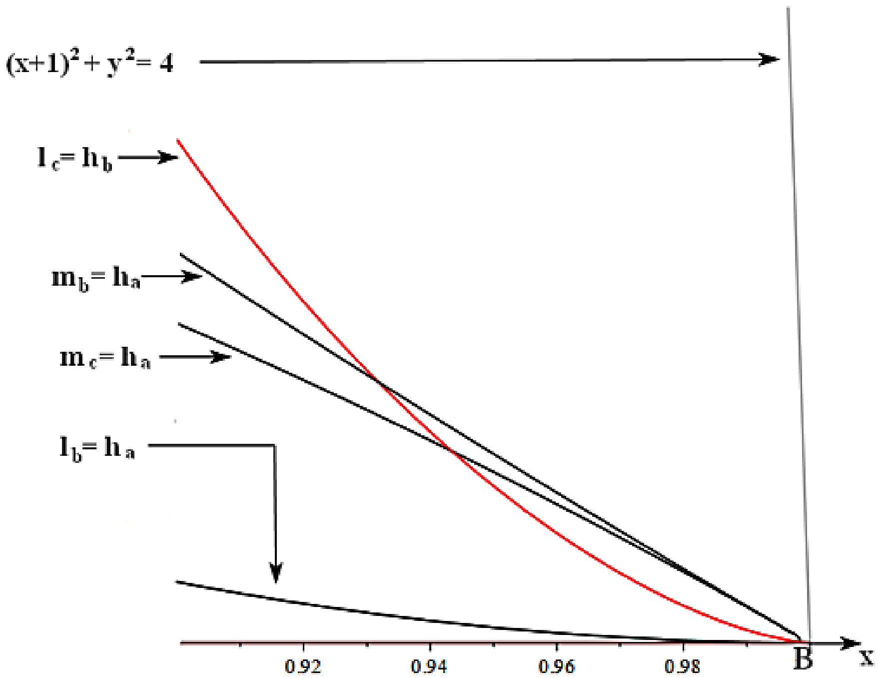

Рис. 19

Возьмём какой-нибудь «хороший» треугольник (например, прямоугольный с углом 30^o) и убедимся, что в нём $l_c < h_a$ и $m_c < l_a$. Теперь, когда у нас осталось не 9, а лишь 2 соотношения, легко доказать, что они справедливы в любом неравностороннем треугольнике.

С учётом формул (8) и известного выражения медианы через стороны треугольника нам достаточно доказать неравенство

$$\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} \leqslant \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}. \tag{11}$$

После очевидных элементарных преобразований неравенство (11) приводится к виду

$$2a^2b^2+8a^2bc+2a^2c^2+2b^4-7b^2c^2-6bc^3-c^4 \leqslant 0. \tag{12}$$

Неравенство (12) выглядит страшновато. Но только на первый взгляд. В самом деле, сумма коэффициентов при всех положительных слагаемых равна сумме коэффициентов отрицательных. При этом с учётом соотношения $a \leqslant b \leqslant c$ каждое слагаемое, входящее в левую часть неравенства со знаком плюс, не превосходит каждого слагаемого со знаком минус. Равенство нулю, очевидно, достигается только при $a=b=c$.

Неравенство $l_c \leqslant h_a$ доказывается аналогично.

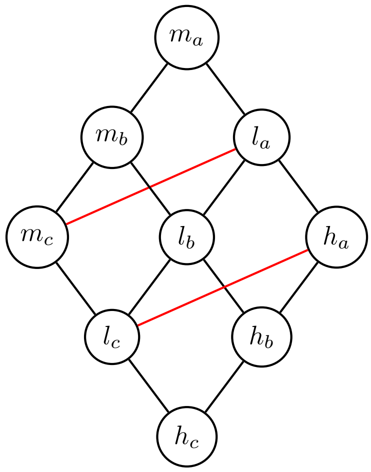

Рис. 20

Таким образом, кроме общеизвестных «школьных» соотношений в произвольном треугольнике выполняется ещё два неравенства между высотами, биссектрисами и медианами. Схематично все имеющиеся неравенства отражены на рис. 20.

Рис. 17 наводит на мысль, что ответ на вопрос второго пункта третьей задачи положителен. Но и здесь картинка не является доказательством. Соображение «равенства $h_c = l_b$ и $l_b = m_c$ влекут за собой $h_c = m_a$» тоже не проходит. Вдруг эти равенства достигаются для разных положений точки C, и соответствующие кривые не пересекаются в одной точке, а образуют маленькую треугольную область, которая из-за низкого разрешения выглядит на картинке как точка?

Оказывается, то, что такое взаимное расположение кривых невозможно, легко показать без вычислений, из соображений непрерывности. Если бы кривые $h_c = l_b$, $l_b = m_c$ и $h_c = m_a$ высекали бы внутри паруса криволинейную треугольную область, в некоторой окрестности этой области образовалось бы 7 зон (сам внутренний криволинейный треугольник, 3 продолжения за стороны и 3 — за вершины этого треугольника) с различным строгим упорядочиванием величин h_c, l_b и m_c. Но это, очевидно, невозможно.

Таким образом, кривые $h_c = l_b$, $l_b = m_c$ и $h_c = m_a$ пересекаются в одной точке, для которой выполняются все три соответствующих равенства. На рис. 17 эта точка обозначена C_1. Её примерные координаты: $x \approx 0.63111$, $y \approx 0.12534$. В треугольнике ABC_1 и подобных ему большая из высот, средняя из биссектрис и меньшая из медиан равны между собой.

Используя наш подход, не сложно выписать все возможные упорядочивания высот, биссектрис и медиан треугольника. При условии, что все 9 величин различны, таковых будет 18 (по числу областей, на которые разбился парус). Подробнее об этом можно почитать в [3].

Литература

[1] Лецко В. А. Исследовательские задачи о разрезании (дополнении) треугольников // Мат. вертикаль, Ресурсный центр «Интеллектуал», 2022.
URL: https://www.youtube.com/watch?v=xJ5SEJav4KI

[2] Алексеев В. Н. Геометрические этюды в множестве классов подобия треугольников // Математика в высшем образовании. 2018. № 16. С. 9–20.

[3] Лецко В. А. От задачи к исследованию. СПб: СМИО Пресс, 2021. 336 с.

Поступила 26.11.2025

ANALYSIS OF THE RESEARCH ASSIGNMENT ABOUT TRIANGLES

V. A. Letsko

The article discusses research problems about triangles. Some of the tasks are related to the classification of triangles based on the possibility of supplementing the original triangle to an isosceles one or cutting it into two isosceles ones. In other problems, the question of the existence of triangles with specified properties is solved.

Keywords: Triangle, classification.