

ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО
ИССЛЕДОВАНИЯ

Задачи этого номера, предлагаемые для самостоятельного решения и исследования, посвящены графам. Более точно, тематика задач связана с арифметическими соотношениями между различными характеристиками классических графов.

В каждой задаче речь идёт о классических графах (то есть, не ориентированных, не имеющих петель и кратных рёбер). Предполагается, что читатель знаком с базовыми понятиями теории графов. Более глубокого владения этой теорией для решения задач не требуется, поскольку основные рассуждения и выкладки, необходимые для решения предлагаемых задач, относятся, скорее, к арифметике и комбинаторике, чем собственно к теории графов.

1. Дерево имеет 2026 вершин, а множество степеней его вершин содержит ровно 2 элемента. Какими могут быть эти элементы?
2. На доске изображены связные графы с минимальным возможным числом вершин такие, что $D = cR$, где D — диаметр графа, R — его радиус, а $c \in \{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2\}$. Сколько вершин у каждого из этих графов?
3. Для каких D существуют деревья диаметра D , у которых
 - а) сумма степеней всех вершин равна D^2 ;
 - б) сумма эксцентриситетов всех вершин равна D^2 ?
4. Пусть n , m и k означают соответственно число вершин, рёбер и связных компонент графа. Какое наименьшее количество изолированных вершин может иметь граф, для которого выполняется соотношение $8k = 7n = 5m$?
5. Компания из 30 отдыхающих собралась для 10-дневного рафтинга. Некоторые их туристов были знакомы между собой. График дежурств (по три человека на каждый день, чтобы каждый отдежурил ровно один раз) составили с помощью жребия. Получилось, что в каждой тройке дежурных ровно двое знакомы между собой. Недовольный такой ситуацией командор предложил свой график, такой что в каждой тройке была ровно одна пара незнакомых. Этот график тоже не всем понравился. Покумекав, туристы смогли совместными усилиями составить такой график, что в каждой тройке дежурных все были знакомы между собой. Какое наименьшее и наибольшее число пар знакомых могло быть в данной группе?

6. На занятии по дискретной математике на доске был изображён некоторый граф. Вася Пупкин записал в тетрадку количество вершин и рёбер каждой связной компоненты графа, а также степени вершин самой большой (по количеству вершин) компоненты. Но само изображение графа он срисовать забыл. Кроме того, он забыл, за какую именно из вышеперечисленных характеристик отвечает каждое из записанных чисел. Помогите Васе, в тетрадке у которого записаны числа 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 9, решить домашнее задание «Найти диаметры каждой связной компоненты».
7. Сколько существует связных графов, таких что произведение степеней вершин равно
 - а) сумме степеней вершин;
 - б) сумме квадратов степеней вершин?

Свои решения присылайте на val-etc@yandex.ru Владимиру Лецко