

СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.3 + 514.142 + 378.147

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРЕСНОЙ ЗАДАЧЕ
НА НАХОЖДЕНИЕ ПЛОЩАДИ

С. В. Костин

ГБОУ города Москвы «Школа № 1788»,
Российский технологический университет МИРЭА,
Москва, Россия

kostinsv77@mail.ru

Приводятся несколько решений задачи о нахождении площади обобщённого эллипса с показателем $1/2$. В одном из решений используются аффинные преобразования. Это решение является очень неожиданным и показывает глубокую внутреннюю взаимосвязь различных разделов математики.

Ключевые слова: обобщённый эллипс, кривая Ламе, площадь фигуры, аффинные преобразования, теорема Архимеда.

1. Введение

Каждый человек, который достаточно долго преподаёт математику, наверняка сталкивался с ситуацией, когда стандартная на первый взгляд задача при более пристальном рассмотрении оказывается настоящим бриллиантом, допускающим сразу несколько очень интересных и необычных решений. Одна такая задача недавно встретила автора данной статьи на занятиях со студентами Российского технологического университета МИРЭА (РТУ МИРЭА). Задача вызвала большой интерес студентов и, после некоторых колебаний и сомнений, было решено посвятить этой задаче отдельную статью.

В задаче речь идёт о нахождении площади плоской фигуры

$$Y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1 \right\}. \quad (1)$$

Границей фигуры Y является кривая

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1 \right\}, \quad (2)$$

которая является частным случаем кривой

$$L_\mu(a, b) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{|x|}{a} \right)^\mu + \left(\frac{|y|}{b} \right)^\mu = 1 \right\} \quad (3)$$

(здесь a , b и μ — произвольные положительные числа).

Кривая $L_\mu(a, b)$ называется *обобщённым эллипсом* с показателем μ и полуосями a и b . Также эту кривую иногда называют *кривой Ламе* (см., например, [1, с. 127]) в честь французского математика, механика и инженера Габриеля Ламе.

Кривая $L_\mu(a, b)$ является замкнутой кривой, проходящей через точки $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $A' = (-a, 0)$, $B' = (0, -b)$. Что касается формы кривой $L_\mu(a, b)$, то она существенным образом зависит от значения параметра μ (см. рис. 1, на котором $a = b = 1$).

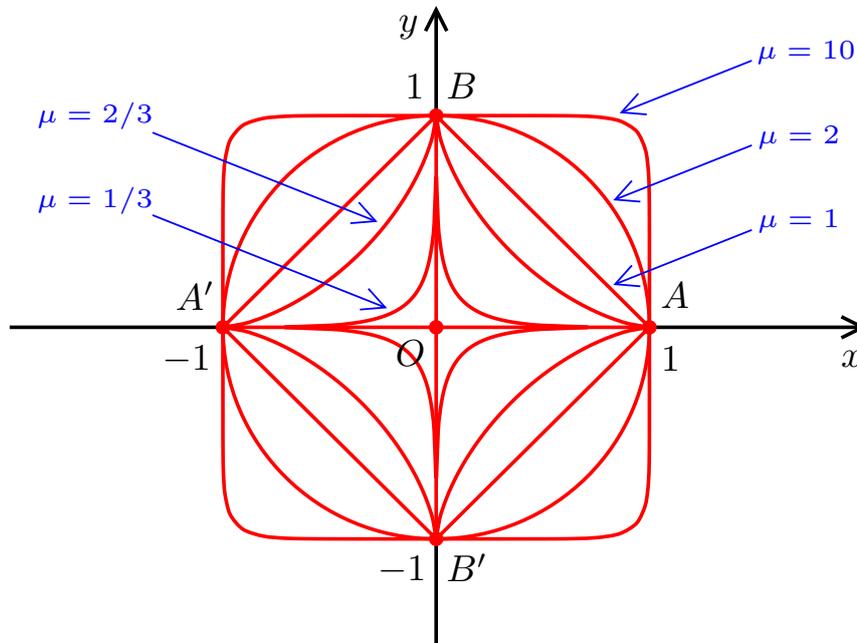


Рис. 1

Случай 1. Если $\mu = 1$, то кривая $L_\mu(a, b)$ представляет собой ромб (при $a = b$ — квадрат). Точки A, B, A', B' являются точками излома кривой $L_\mu(a, b)$.

Случай 2. Если $\mu > 1$, то кривая $L_\mu(a, b)$ представляет собой гладкую кривую. Точки A, B, A', B' являются вершинами кривой $L_\mu(a, b)$. В частности, при $\mu = 2$ кривая $L_\mu(a, b)$ представляет собой эллипс с полуосями a и b (при $a = b$ — окружность).

Случай 3. Если $0 < \mu < 1$, то кривая $L_\mu(a, b)$ представляет собой кусочно-гладкую кривую. Точки A, B, A', B' являются точками возврата кривой $L_\mu(a, b)$. В частности, при $\mu = 2/3$ и $a = b$ кривая $L_\mu(a, b)$ представляет собой астроиду.

При любых значениях параметров a, b, μ (напомним, что все эти параметры положительны) кривая $L_\mu(a, b)$ целиком располагается внутри прямоугольника

$$\Pi(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq b\}, \quad (4)$$

причём при $\mu \rightarrow +\infty$ кривая $L_\mu(a, b)$ приближается к его границе.

Интересующую нас плоскую фигуру Y ограничивает кривая

$$\Gamma = L_{1/2}(1, 1). \quad (5)$$

Кривая Γ и фигура Y изображены на рис. 2.

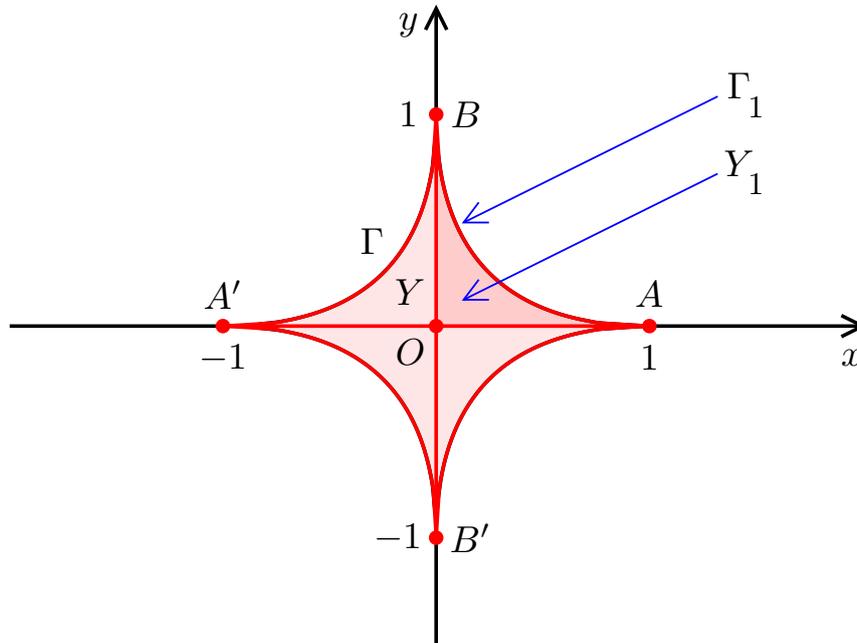


Рис. 2

Поскольку фигура Y симметрична относительно осей Ox и Oy , то

$$S(Y) = 4S(Y_1), \quad (6)$$

где Y_1 — часть фигуры Y , которая расположена в первой четверти:

$$Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} < 1\}. \quad (7)$$

Ниже мы изложим пять решений задачи о нахождении площади фигуры Y . Первые три решения достаточно традиционны. В четвёртом решении существенным образом используется форма кривой. Наиболее необычным является пятое решение, в котором используются (кто бы мог подумать!) аффинные преобразования. Это решение показывает глубокую внутреннюю взаимосвязь различных разделов математики. Собственно, именно из-за этого решения и была написана статья. . . Отметим, что данную статью можно рассматривать как продолжение статей автора [2–5].

2. Первое решение (с помощью определённого интеграла)

Фигура Y_1 ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$ и кривой

$$\Gamma_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \right\}. \quad (8)$$

Из уравнения кривой Γ_1 можно в явном виде выразить переменную y через переменную x :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x. \quad (9)$$

Теперь площадь фигуры Y_1 можно найти с помощью определённого интеграла:

$$S(Y_1) = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = \left(x - \frac{4}{3} x^{3/2} + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \quad (10)$$

Окончательно получаем:

$$S(Y) = 4S(Y_1) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \quad (11)$$

3. Второе решение (с помощью криволинейного интеграла)

Площадь фигуры Y_1 можно найти с помощью криволинейного интеграла второго рода:

$$S(Y_1) = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx. \quad (12)$$

Здесь C — граница области Y_1 , ориентированная в положительном направлении (то есть против часовой стрелки).

Кривая C является объединением трёх кривых:

- а) отрезка оси Ox ($0 \leq x \leq 1, y = 0$);
- б) отрезка оси Oy ($x = 0, 0 \leq y \leq 1$);
- в) кривой Γ_1 (см. формулу (8)).

Криволинейный интеграл (12) по любому отрезку, лежащему на оси Ox или на оси Oy , равен нулю. Поэтому мы приходим к следующей формуле:

$$S(Y_1) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} xdy - ydx. \quad (13)$$

Дальнейшее решение задачи зависит от параметризации кривой Γ_1 . Рассмотрим две параметризации: тригонометрическую и рациональную.

Способ 1 (тригонометрическая параметризация). Параметризуем кривую:

$$\Gamma_1 = \left\{ x = \cos^4 t, y = \sin^4 t; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; t \uparrow \right\} \quad (14)$$

(здесь символ $t \uparrow$ показывает, что кривая Γ_1 ориентирована в направлении возрастания параметра t).

Используя формулы (13) и (14), находим:

$$\begin{aligned} S(Y_1) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\cos^4 t \cdot 4 \sin^3 t \cos t - \sin^4 t \cdot 4 \cos^3 t (-\sin t) \right) dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin^3 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin^3 t dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^3 t d(\sin t) = 2 \left(\frac{\sin^4 t}{4} - \frac{\sin^6 t}{6} \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (15)$$

Окончательно получаем:

$$S(Y) = 4S(Y_1) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \quad (16)$$

Способ 2 (рациональная параметризация). Параметризуем кривую Γ_1 :

$$\Gamma_1 = \left\{ x = \frac{1}{(t+1)^2}, y = \frac{t^2}{(t+1)^2}; t \in [0, +\infty); t \uparrow \right\} \quad (17)$$

(здесь символ $t \uparrow$ показывает, что кривая Γ_1 ориентирована в направлении возрастания параметра t).

Используя формулы (13) и (14), находим:

$$\begin{aligned} S(Y_1) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(t+1)^2} \cdot \frac{2t}{(t+1)^3} - \frac{t^2}{(t+1)^2} \cdot \frac{-2}{(t+1)^3} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2t(t+1)}{(t+1)^5} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t+1)^4} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Раскладываем подынтегральную функцию на элементарные дроби:

$$\frac{t}{(t+1)^4} = \frac{t+1-1}{(t+1)^4} = \frac{1}{(t+1)^3} - \frac{1}{(t+1)^4}. \quad (19)$$

Теперь интеграл легко находится:

$$S(Y_1) = \left(-\frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{1}{3(t+1)^3} \right) \Big|_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}. \quad (20)$$

Окончательно получаем:

$$S(Y) = 4S(Y_1) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \quad (21)$$

4. Третье решение (с помощью двойного интеграла)

Площадь фигуры Y_1 можно найти с помощью двойного интеграла:

$$S(Y_1) = \iint_{Y_1} dx dy. \quad (22)$$

Этот двойной интеграл можно находить по-разному.

Если перейти от двойного интеграла к повторному в декартовых координатах (сделав, например, внешний интеграл по переменной x , а внутренний по переменной y), то мы получим решение, близкое к приведённому выше первому решению.

Если в двойном интеграле перейти в обобщённые полярные координаты по формулам $x = r \cos^4 \varphi$, $y = r \sin^4 \varphi$, то в новых переменных r , φ область интегрирования будет представлять собой прямоугольник $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \pi/2$; возникающие в этом случае вычисления близки к приведённому выше второму решению с первым способом параметризации.

Мы пойдём несколько иным путём и перейдём в двойном интеграле (21) в самые обычные (не обобщённые) полярные координаты:

$$S(Y_1) = \iint_{Y_1} dx dy = \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right] = \iint_{\tilde{Y}_1} r dr d\varphi. \quad (23)$$

Область \tilde{Y}_1 изменения полярных координат (r, φ) взаимно однозначно соответствует области $Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} < 1\}$ изменения декартовых координат (x, y) и равна

$$\tilde{Y}_1 = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < r < \frac{1}{(\sqrt{\cos \varphi} + \sqrt{\sin \varphi})^2} \right\} \quad (24)$$

(для того, чтобы найти «точку выхода» $r(\varphi) = 1/(\sqrt{\cos \varphi} + \sqrt{\sin \varphi})^2$ из фигуры \tilde{Y}_1 по переменной r , надо в уравнении $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ кривой Γ_1 перейти в полярные координаты (r, φ) по формулам $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$).

Переходим от двойного интеграла (23) к повторному, причём внешний интеграл делаем по переменной φ , а внутренний — по переменной r :

$$S(Y_1) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/(\sqrt{\cos \varphi} + \sqrt{\sin \varphi})^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(\sqrt{\cos \varphi} + \sqrt{\sin \varphi})^4}. \quad (25)$$

Последний интеграл на первый взгляд выглядит немного устрашающе, но на самом деле очень сложным не является. Делим числитель и знаменатель на $\cos^2 \varphi$, после чего подводим $\cos^{-2} \varphi$ под знак дифференциала и делаем подстановку $\operatorname{tg} \varphi = u$, а затем замену переменной $t = \sqrt{u}$:

$$\begin{aligned} S(Y_1) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{\left(\frac{\sqrt{\cos \varphi} + \sqrt{\sin \varphi}}{\sqrt{\cos \varphi}} \right)^4} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d(\operatorname{tg} \varphi)}{(1 + \sqrt{\operatorname{tg} \varphi})^4} = [\operatorname{tg} \varphi = u] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1 + \sqrt{u})^4} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{u} \\ u = t^2 \\ du = 2t dt \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(t + 1)^4}. \end{aligned} \quad (26)$$

Мы пришли к интегралу, который нам уже встречался (см. формулу (18)). Как и ранее, раскладываем подынтегральную функцию на элементарные дроби и в результате находим $S(Y_1) = 1/6$.

Окончательно получаем:

$$S(Y) = 4S(Y_1) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \quad (27)$$

5. Выяснение геометрической природы кривой

Рассмотрим более пристально кривую

$$\Gamma_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \right\}. \quad (28)$$

Зададимся следующим вопросом: является ли кривая Γ_1 алгебраической кривой или, может быть, частью некоторой алгебраической кривой?

Напомним, что кривая называется алгебраической кривой степени (или, как ещё говорят, порядка) s , если она может быть задана уравнением вида

$$P(x, y) = 0, \quad (29)$$

где $P(x, y)$ — некоторый многочлен от двух переменных x и y степени s , и не может быть задана уравнением вида (28), в котором многочлен $P(x, y)$ имеет степень меньше s .

Произведём следующую цепочку переходов (в этой цепочке каждое следующее равенство является следствием предыдущего):

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 &\Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 1 - 2\sqrt{x} + x &\Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 + x - y \Rightarrow 4x = (1 + x - y)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Введём обозначение

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \right\}. \quad (31)$$

Очевидно, что Δ — некоторая алгебраическая кривая второго порядка.

Итак, кривая Γ_1 является частью (подмножеством) некоторой алгебраической кривой второго порядка.

Как известно, существуют девять различных типов кривых второго порядка. Но сам вид кривой Γ_1 таков (кривая Γ_1 представляет собой «изогнутую дугу»), что она, естественно, не может быть частью (подмножеством) пустого множества, точки, прямой, пары прямых и т. п. Следовательно, кривая Γ_1 является частью (подмножеством) одной из следующих кривых второго порядка: эллипс, гипербола, парабола.

В этом месте целесообразно остановиться и задать студентам вопрос: частью какой кривой второго порядка, по Вашему мнению, является кривая Γ_1 ?

Опыт показывает, что на этот вопрос можно услышать самые неожиданные ответы, вплоть до того, что кривая Γ_1 является частью (четвертью) окружности радиуса $R = 1$ с центром в точке $(1, 1)$. И студентов можно понять: кривая Γ_1 действительно по внешнему виду напоминает четверть указанной окружности...

Но всё-таки это не четверть окружности хотя бы потому, что кривая Γ_1 пересекает биссектрису первой координатной четверти в точке $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = (0,25; 0,25)$, а окружность радиуса $R = 1$ с центром в точке $(1, 1)$ пересекает биссектрису первой координатной четверти в точке $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx (0,293; 0,293)$.

Тип кривой Δ можно определить, если произвести поворот системы координат на угол 45° против часовой стрелки. В результате указанного поворота член с произведением переменных пропадает и в новой (повернутой) системе координат кривая Δ имеет уравнение вида

$$(y')^2 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right). \quad (32)$$

Теперь становится понятно, что кривая Δ — это парабола с параметром $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$, вершиной в точке $x' = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $y' = 0$ и осью Ox' . Фокус находится в точке $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y' = 0$, а директриса имеет уравнение $x' = 0$.

Возвращаясь в исходную систему координат, приходим к следующим выводам: кривая Δ — это парабола с параметром $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$, вершиной в точке $V = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, осью $L = \{y = x\}$, фокусом в точке $F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и директрисой $D = \{x + y = 0\}$ (см. рис. 3).

Отметим, что отрезок AB — это фокальная хорда параболы (то есть отрезок с концами на параболе, который проходит через фокус F параллельно директрисе D).

Легко проверить также следующий очень важный для дальнейшего изложения факт: прямые $y = 0$ и $x = 0$ касаются параболы Δ в точках $A = (1, 0)$ и $B = (0, 1)$ соответственно. Чтобы это доказать, достаточно подставить $y = 0$ ($x = 0$) в уравнение (31) параболы Δ и убедиться, что полученное уравнение относительно x (y) имеет ровно одно решение $x = 1$ ($y = 1$). А прямая, которая не параллельна оси параболы L и имеет с параболой ровно одну общую точку, как известно, является касательной к параболе.

Посмотрите на рисунок 3. Точки A и B делят параболу Δ на три части. Та часть параболы Δ , которая расположена между точками A и B (кривая Γ_1) имеет уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Можно доказать, что та часть параболы Δ , которая расположена «от точки A до бесконечности» имеет уравнение $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$, а та часть параболы Δ , которая расположена «от точки B до бесконечности» имеет уравнение $\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1$.

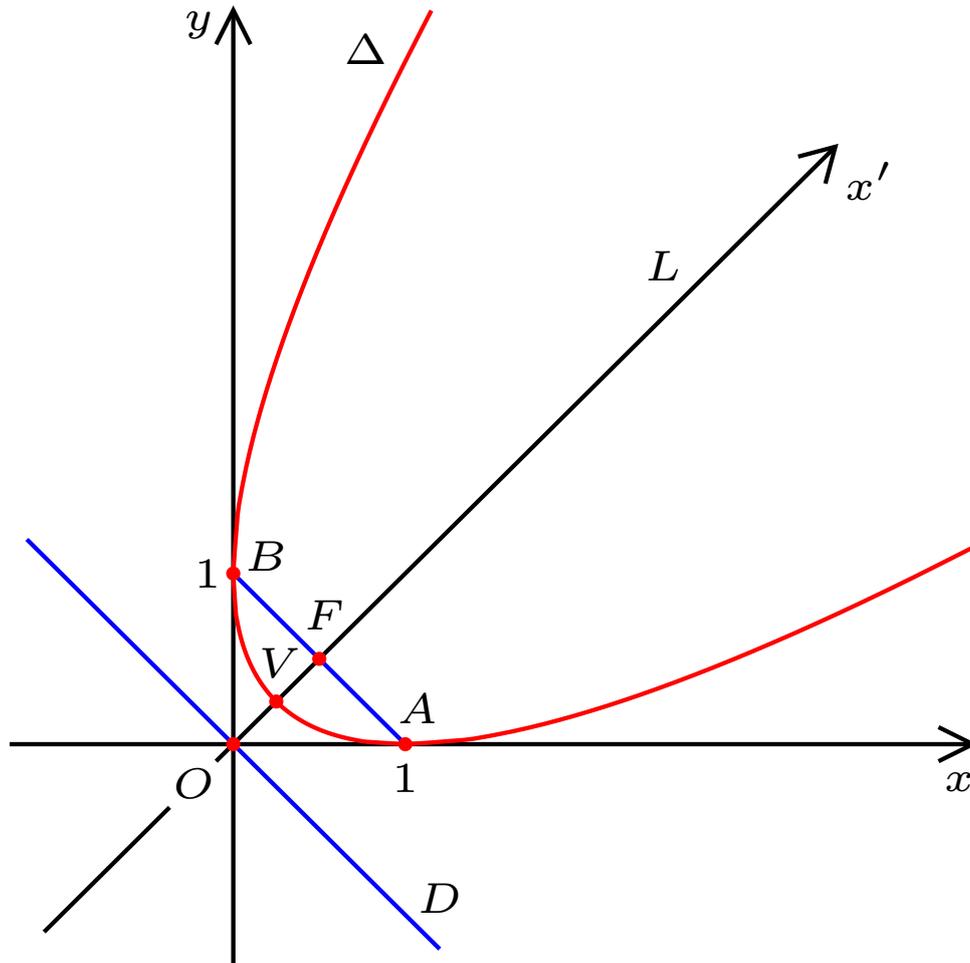


Рис. 3

Итак, геометрическую природу кривой Γ_1 мы выяснили — это часть параболы Δ . В следующих двух пунктах мы рассмотрим ещё два решения задачи о нахождении площади фигуры Y . В этих решениях установленный нами факт («параболичность» кривой Γ_1) будет играть существенную роль.

В завершение данного пункта рассмотрим ещё один вопрос.

Если уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ задаёт на плоскости часть параболы, то что в пространстве задаёт уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$? Будет ли задаваемая этим уравнением поверхность поверхностью второго порядка (или частью поверхности второго порядка)?

Нет, не будет. Дело в том, что, уединяя радикалы и возводя уравнение два раза в квадрат, приходим к уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 2xy - 2xz - 2yz + 1 = 8\sqrt{xyz}. \quad (33)$$

Отсюда видно, что это часть поверхности четвёртого порядка (для окончательного избавления от корней надо уравнение ещё раз возвести в квадрат; в результате получаем уравнение четвёртой степени).

Однако поверхность четвёртого порядка (часть которой задаётся уравнением (33)) обладает интересным свойством: в пересечении с любой из координатных плоскостей Oxy , Oxz , Oyz она даёт кривую второго порядка (поскольку в этом случае корень в правой части равенства (33) обращается в ноль). Мы уже знаем, что эти три сечения координатными плоскостями являются параболлами.

6. Четвёртое решение (с помощью нахождения площади параболического сектора)

Рассмотрим параболлу, заданную в прямоугольной декартовой системе координат Oxy своим хорошо известным каноническим уравнением

$$y^2 = 2px. \quad (34)$$

Когда на занятиях по линейной алгебре и аналитической геометрии студенты впервые видят уравнение (34), то у многих из них возникает вопрос: «Зачем Вы повернули параболлу на 90 градусов? Ведь в школе обычно рассматривают параболлу $y = ax^2 + bx + c$, у которой ось параллельна оси Oy . . . »

Ответ на этот вопрос следующий: при «горизонтальной» ориентации параболла лучше «встаёт в один ряд» с эллипсом и гиперболой. В этом случае у всех трёх кривых фокусы расположены на оси Ox , а директрисы параллельны оси Oy . Но, пожалуй, наиболее чётко аналогия прослеживается после перехода в смещённые полярные координаты. Если полюс полярной системы координат поместить в точке F (фокус параболлы, левый фокус эллипса, правый фокус гиперболы), а отсчёт полярного угла вести от положительного луча оси Ox против часовой стрелки, то уравнения всех трёх кривых будут одинаковы:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (35)$$

Здесь ε — эксцентриситет кривой (у параболлы он равен единице, у эллипса меньше единицы, у гиперболы больше единицы), а p — параметр кривой (он равен половине длины фокальной хорды, то есть половине длины отрезка с концами на кривой, проходящего через фокус параллельно директрисе). Также заметим, что если (как это обычно принято) мы не рассматриваем отрицательные значения полярного радиуса r , то уравнение (35) задаёт не всю гиперболу, а только её правую ветвь.

Пусть точки M и N лежат на кривой (35) и им соответствуют значения полярного угла α и β ($\alpha < \beta$).

Найдём площадь «криволинейного сектора» FMN , который «заматывается» радиус-вектором \overrightarrow{FX} , когда точка X движется по кривой от M к N (отметим, что именно об этой площади идет речь во втором законе Кеплера).

Имеем:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (36)$$

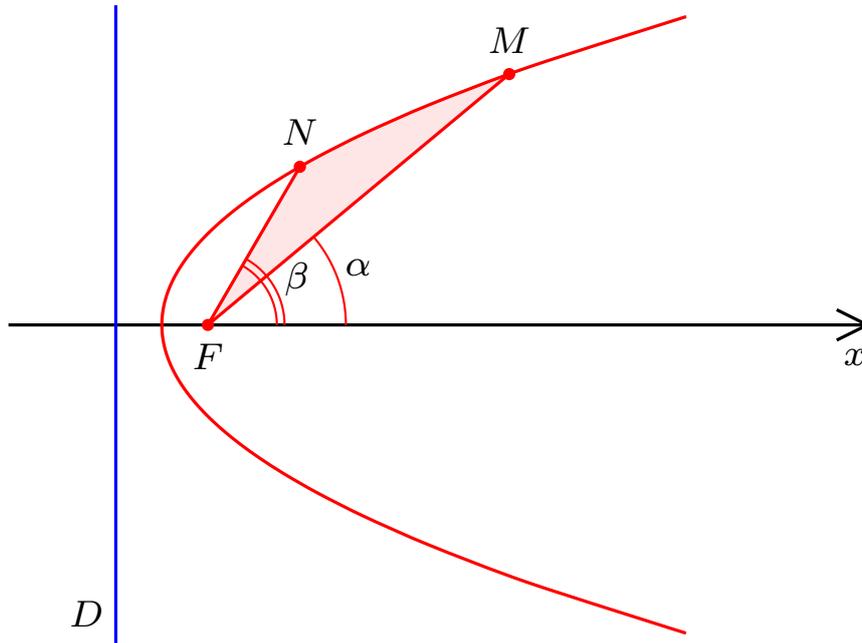


Рис. 4

Далее нас будет интересовать случай параболы (см. рис. 4). В этом случае $\varepsilon = 1$, и мы получаем:

$$\begin{aligned} S &= \frac{p^2}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} = \frac{p^2}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(2 \sin^2(\varphi/2))^2} = \frac{p^2}{8} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi/2)} = \\ &= -\frac{p^2}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} + 1 \right) d\left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) = -\frac{p^2}{4} \left(\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \\ &= \frac{p^2}{4} \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) + \frac{p^2}{12} \left(\operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Мы вывели формулу, которая позволяет найти площадь произвольного параболического сектора. Используя эту формулу, найдём площадь сектора FBA (рис. 3). В этом случае $\alpha = \pi/2$, $\beta = 3\pi/2$, и мы приходим к равенству

$$S_{FBA} = \frac{p^2}{4} \cdot (1 - (-1)) + \frac{p^2}{12} \cdot (1 - (-1)) = \frac{2}{3} p^2. \quad (38)$$

Поскольку параметр параболы $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то

$$S_{FBA} = \frac{2}{3} p^2 = \frac{1}{3}. \quad (39)$$

Находим площадь треугольника OAB :

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \quad (40)$$

Находим площадь фигуры Y_1 как разность между площадью треугольника OAB и площадью параболического сектора FBA (см. рис. 3):

$$S(Y_1) = S_{OAB} - S_{FBA} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \quad (41)$$

Окончательно получаем:

$$S(Y) = 4S(Y_1) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \quad (42)$$

7. Пятое решение (с помощью теоремы Архимеда)

Сформулируем очень важную теорему.

Теорема Архимеда. *Если из точки C проведены две касательные к параболе, касающиеся параболы в точках A и B , то площадь криволинейного треугольника $AnBC$ в три раза меньше площади обычного («прямолинейного») треугольника ABC , то есть*

$$S_{AnBC} = \frac{1}{3} S_{ABC}. \quad (43)$$

Данная теорема проиллюстрирована на рис. 5.

Доказательство теоремы Архимеда приведём чуть позже, а сейчас применим эту теорему для решения задачи о нахождении площади фигуры Y .

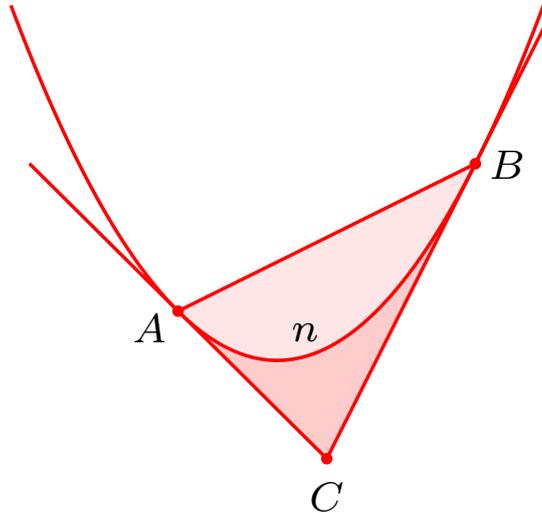


Рис. 5

Мы уже знаем, что фигура Y_1 представляет собой криволинейный треугольник, ограниченный частью Γ_1 параболы Δ , а также отрезками двух касательных, проведённых из точки $O = (0, 0)$ к параболе Δ и касающихся параболы Δ в точках $A = (1, 0)$ и $B = (0, 1)$ соответственно.

Поэтому, согласно теореме Архимеда, площадь фигуры Y_1 ровно в три раза меньше, чем площадь обычного («прямолинейного») треугольника OAB . Следовательно,

$$S(Y_1) = \frac{1}{3} \cdot S_{OAB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}. \quad (44)$$

Окончательно получаем:

$$S(Y) = 4S(Y_1) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \quad (45)$$

8. Доказательство теоремы Архимеда

Докажем теорему Архимеда. У этой очень красивой теоремы существуют несколько различных доказательств. Сейчас мы приведём два из них. Первое доказательство достаточно традиционно и использует аппарат дифференциального и интегрального исчисления. Второе доказательство, по нашему мнению, более интересно и необычно и основано на использовании свойств аффинных преобразований.

Введём на плоскости, на которой расположена парабола, правую прямоугольную декартову систему координат Oxy , поместив начало системы координат O в вершине параболы и направив ось Oy по оси параболы (см. рис. 6).

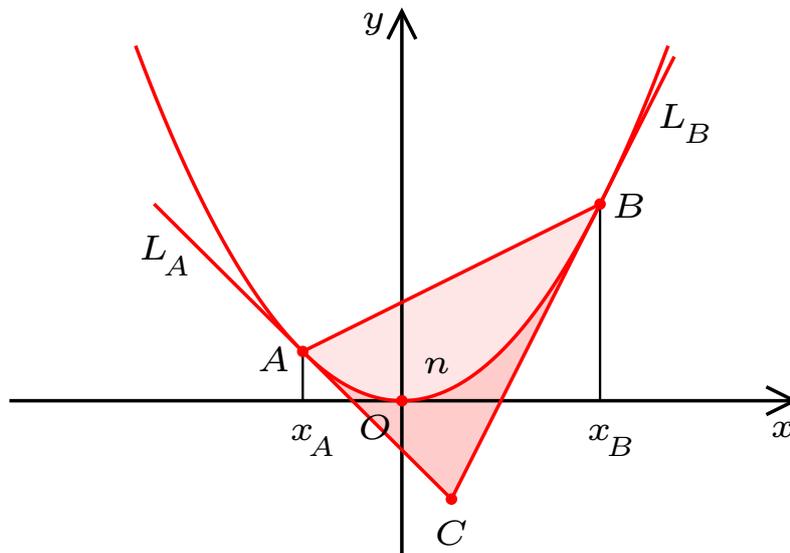


Рис. 6

В системе Oxy парабола имеет уравнение

$$y = kx^2 \quad (k > 0). \quad (46)$$

Будем считать, что точки A и B имеют координаты

$$A = (x_A, kx_A^2), \quad B = (x_B, kx_B^2). \quad (47)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $x_A < x_B$.

Первое доказательство

Используя аппарат дифференциального исчисления, составляем уравнения касательных L_A и L_B к параболе (46) в точках A и B :

$$L_A: y = 2kx_Ax - kx_A^2; \quad (48)$$

$$L_B: y = 2kx_Bx - kx_B^2. \quad (49)$$

Находим абсциссу x_C точки C пересечения прямых (48) и (49):

$$2kx_Ax - kx_A^2 = 2kx_Bx - kx_B^2 \Rightarrow x_C = \frac{x_A + x_B}{2}. \quad (50)$$

Подставляя x_C в уравнение прямой L_A (или в уравнение прямой L_B), находим ординату точки C :

$$y_C = kx_Ax_B. \quad (51)$$

Используя аппарат интегрального исчисления, находим площадь криволинейного треугольника $AnBC$:

$$\begin{aligned}
 S_{AnBC} &= \int_{x_A}^{x_C} \left(kx^2 - (2kx_Ax - kx_A^2) \right) + \int_{x_C}^{x_B} \left(kx^2 - (2kx_Bx - kx_B^2) \right) = \\
 &= k \int_{x_A}^{x_C} (x - x_A)^2 + k \int_{x_C}^{x_B} (x - x_B)^2 = k \frac{(x - x_A)^3}{3} \Big|_{x_A}^{x_C} + k \frac{(x - x_B)^3}{3} \Big|_{x_C}^{x_B} = \\
 &= k \frac{(x_C - x_A)^3}{3} + k \frac{(x_C - x_B)^3}{3} = k \frac{(x_B - x_A)^3}{24} + k \frac{(x_B - x_A)^3}{24} = \\
 &= k \frac{(x_B - x_A)^3}{12}. \tag{52}
 \end{aligned}$$

Теперь переходим к нахождению площади обычного («прямолинейного») треугольника ABC , вершины которого имеют следующие координаты:

$$A = (x_A, kx_A^2), \quad B = (x_B, kx_B^2), \quad C = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, kx_Ax_B \right). \tag{53}$$

Находим координаты векторов \vec{CA} и \vec{CB} :

$$\vec{CA} = \left(\frac{x_A - x_B}{2}, kx_A(x_A - x_B) \right), \quad \vec{CB} = \left(\frac{x_B - x_A}{2}, kx_B(x_B - x_A) \right). \tag{54}$$

Дописываем к этим координатам третью (равную нулю) координату и находим векторное произведение полученных векторов:

$$[\vec{CA} \times \vec{CB}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{x_A - x_B}{2} & kx_A(x_A - x_B) & 0 \\ \frac{x_B - x_A}{2} & kx_B(x_B - x_A) & 0 \end{vmatrix} = -k \frac{(x_B - x_A)^3}{2} \mathbf{k}. \tag{55}$$

Площадь треугольника ABC равна половине модуля этого векторного произведения, то есть

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{CA} \times \vec{CB}]| = k \frac{(x_B - x_A)^3}{4}. \tag{56}$$

Сравнивая формулы (52) и (56), получаем, что

$$S_{AnBC} = \frac{1}{3} S_{ABC}. \tag{57}$$

Теорема Архимеда доказана.

Второе доказательство

Обозначим отношение площади криволинейного треугольника $AnBC$ к площади обычного («прямолинейного») треугольника ABC буквой λ . Докажем, что число λ не зависит от положения точек A и B на параболе (46).

Рассмотрим аффинное преобразование, при котором точка с координатами (x, y) переходит в точку с координатами

$$x' = \alpha x + \beta; \quad (58)$$

$$y' = 2k\alpha\beta x + \alpha^2 y + k\beta^2 \quad (59)$$

(здесь α и β — параметры аффинного преобразования, $\alpha \neq 0$).

Выясним, в каком случае точка с координатами (x', y') принадлежит параболе (46):

$$\begin{aligned} y' &= k(x')^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2k\alpha\beta x + \alpha^2 y + k\beta^2 &= k(\alpha x + \beta)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2k\alpha\beta x + \alpha^2 y + k\beta^2 &= k\alpha^2 x^2 + 2k\alpha\beta x + k\beta^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= kx^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Итак, образ (x', y') точки (x, y) лежит на параболе (46) тогда и только тогда, когда сама точка (x, y) лежит на параболе (46). Если ещё учесть, что аффинное преобразование является взаимно однозначным отображением плоскости на себя, то мы приходим к следующему важному выводу: при аффинном преобразовании (58)–(59) парабола (46) взаимно однозначно отображается на себя. В некоторых книгах (см., например, [6, с. 79]) говорят, что аффинное преобразование (58)–(59) является *автоморфизмом* параболы (46).

Подберём параметры α и β аффинного преобразования (58)–(59) так, чтобы точки $A = (x_A, kx_A^2)$ и $B = (x_B, kx_B^2)$ отобразились в точки $A_0 = (-1, k)$ и $B_0 = (1, k)$. Это будет иметь место, если выполняются равенства

$$\alpha x_A + \beta = -1; \quad (61)$$

$$\alpha x_B + \beta = 1. \quad (62)$$

Разрешая эти соотношения относительно α и β , находим:

$$\alpha = \frac{2}{x_B - x_A}, \quad \beta = -\frac{x_B + x_A}{x_B - x_A}. \quad (63)$$

Итак, если произвести аффинное преобразование (58)–(59) с коэффициентами α и β , которые даются формулами (63), то:

- а) парабола (46) отобразится сама на себя;
- б) точки A и B перейдут в две фиксированные точки на параболе (а именно в точки $A_0 = (-1, k)$ и $B_0 = (1, k)$);
- в) касательные к параболе в точках A и B перейдут в касательные к параболе в точках A_0 и B_0 .

Пусть C_0 — точка пересечения касательных к параболе, проведённых в точках A_0 и B_0 . Тогда при аффинном преобразовании (58)–(59) криволинейный треугольник $AnBC$ переходит в криволинейный треугольник $A_0pqB_0C_0$, а обычный («прямолинейный») треугольник ABC переходит в обычный («прямолинейный») треугольник $A_0B_0C_0$ (см. рис. 7).

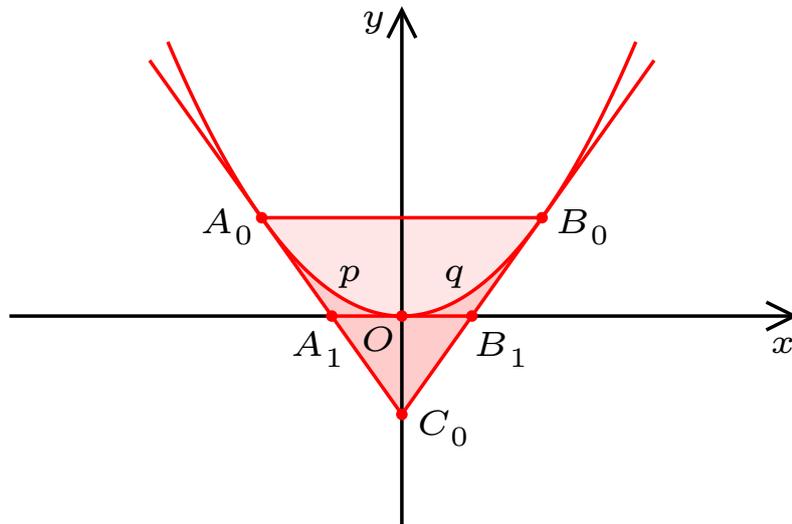


Рис. 7

Воспользуемся теперь следующим свойством аффинных преобразований: аффинные преобразования сохраняют отношения площадей фигур.

Следовательно,

$$\lambda = \frac{S_{AnBC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{A_0pqB_0C_0}}{S_{A_0B_0C_0}} = \text{const.} \quad (64)$$

Итак, мы доказали (используя свойства аффинных преобразований), что отношение λ площади криволинейного треугольника $AnBC$ к площади обычного («прямолинейного») треугольника ABC не зависит от положения точек A и B на параболе (46).

Осталось найти численное значение коэффициента λ .

Рассмотрим треугольник $A_0B_0C_0$.

Координаты точек A_0 и B_0 равны $A_0 = (-1, k)$, $B_0 = (1, k)$. Координаты точки C_0 , в которой пересекаются касательные к параболе в точках A_0 и B_0 , равны $C_0 = (0, -k)$. Пусть A_1 — точка пересечения отрезка A_0C_0 с осью Ox , B_1 — точка пересечения отрезка B_0C_0 с осью Ox . Координаты точек A_1 и B_1 равны $A_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $B_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Площади треугольников $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_0$, A_0OA_1 , B_0OB_1 легко находятся (по формуле «половина произведения основания на высоту»):

$$S_{A_0B_0C_0} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2k = 2k; \quad (65)$$

$$S_{A_1B_1C_0} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot k = \frac{k}{2}; \quad (66)$$

$$S_{A_0OA_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot k = \frac{k}{4}; \quad (67)$$

$$S_{B_0OB_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot k = \frac{k}{4}. \quad (68)$$

Найдём площадь криволинейного треугольника $A_0pqB_0C_0$.

С одной стороны:

$$S_{A_0pqB_0C_0} = \lambda S_{A_0B_0C_0} = \lambda \cdot 2k = 2k\lambda. \quad (69)$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} S_{A_0pqB_0C_0} &= S_{A_1B_1C_0} + S_{A_0pOA_1} + S_{B_0qOB_1} = \frac{k}{2} + \lambda S_{A_0OA_1} + \lambda S_{B_0OB_1} = \\ &= \frac{k}{2} + \lambda \cdot \frac{k}{4} + \lambda \cdot \frac{k}{4} = \frac{k}{2} + \frac{k\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (70)$$

Сопоставляя формулы (69) и (70), получаем равенство

$$2k\lambda = \frac{k}{2} + \frac{k\lambda}{2}. \quad (71)$$

Сокращая это равенство на k , получаем

$$\lambda = \frac{1}{3}. \quad (72)$$

Итак, имеет место равенство

$$S_{AnBC} = \frac{1}{3} S_{ABC}. \quad (73)$$

Теорема Архимеда доказана.

9. Заключение

Мы рассмотрели пять решений задачи о нахождении площади фигуры Y . Если первые четыре из этих решений более или менее традиционны, то пятое решение, основанное на использовании теоремы Архимеда, честно говоря, производит очень сильное впечатление. Результат получается как будто «из ничего», на основе свойств (как это на первый взгляд не неожиданно) аффинных преобразований. . .

Когда-то уже достаточно давно (около 30 лет назад) автор этих строк был студентом Московского физико-технического института. И хотя программа курса аналитической геометрии и линейной алгебры была сильно перегруженной и времени (как лектору для изложения теоретического материала, так и семинаристам для закрепления теории на практике и разбора различных методов решения задач) катастрофически не хватало, тем не менее, я точно помню, что мы (студенты 1-го курса МФТИ) изучали аффинные преобразования, сопряжённые диаметры кривых второго порядка и другие, на первый взгляд, достаточно специфические вопросы.

Кажется, тогда мало кто из студентов понимал, для чего все это нужно и где всё это может встретиться и пригодиться. . . И лишь спустя годы начинаешь понимать, насколько продуманным и системно выстроенным был курс аналитической геометрии и линейной алгебры, насколько важный и совершенно «рабочий», нужный для практики, математический аппарат разрабатывался в этом курсе. . .

По моему мнению, кафедра высшей математики МФТИ, в значительной степени сформированная известным отечественным математиком Львом Дмитриевичем Кудрявцевым, который более 40 лет был заведующим этой кафедрой, несомненно, является выдающимся явлением отечественной науки и образования. По сплочённости коллектива единомышленников, по количеству и качеству созданных учебников и задачникков (по самым разным разделам высшей математики), кафедра высшей математики МФТИ, вполне возможно, не имеет себе равных в нашей стране. . .

Автор данных строк очень благодарен физтеху за прекрасную фундаментальную математическую подготовку. Работая 20 лет на кафедре высшей математики Российского технологического университета МИРЭА (РТУ МИРЭА), которая тоже имеет очень давние и славные традиции (недавно вышла интересная статья [7], посвящённая многолетнему заведующему кафедрой высшей математики РТУ МИРЭА Г. И. Кручковичу), я стараюсь использовать в работе всё лучшее (чёткость, понятность и лаконичность формулировок, разъяснение смысла всех вводимых понятий, наличие

большого количества поясняющих примеров), чему меня когда-то учили преподаватели физтеха. Ну, а насколько мне удаётся (или не удаётся) соответствовать этим принципам (в частности, в данной статье) — судить Вам, уважаемые читатели.

Автор надеется, что данная статья заинтересовала читателей, и будет очень благодарен за любые комментарии или замечания по затронутым в статье вопросам.

Литература

- [1] Шикин Е. В., Франк-Каменецкий М. М. Кривые на плоскости и в пространстве. М.: ФАЗИС, 1997. 336 с.
- [2] Костин С. В. Об инвариантности неопределённого интеграла относительно метода его нахождения // Математика в высшем образовании. 2019. № 17. С. 21–32.
- [3] Костин С. В. Методические особенности изучения интеграла Римана в курсе математического анализа для студентов технических вузов // CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование. 2016. № 1. С. 73–84.
- [4] Костин С. В. Задачи повышенной сложности в курсе математического анализа технического вуза // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе: материалы V международной заочной научной конференции / Под общ. ред. Л. И. Боженковой, М. В. Егуповой. М.: МПГУ, 2020. С. 369–376.
- [5] Костин С. В. Несколько замечаний о каноническом уравнении параболы в вузовском курсе аналитической геометрии // Математическое образование в школе и вузе: опыт, проблемы, перспективы (MATHEDU'21): материалы X международной научно-практической конференции (Казань, 22–28 марта 2021 г.). Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2021. С. 93–98.
- [6] Понарин Я. П. Аффинная и проективная геометрия. М.: МЦНМО, 2009. 288 с.
- [7] Розанова С. А., Мельников Р. А. Георгий Ионович Кручкович — выдающийся ученый, методист, руководитель кафедры ВЗЭИ – МИРЭА (к 100-летию со дня рождения) // CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование. 2025. № 1. С. 86–99.

Поступила 07.04.2025

**ABOUT ONE INTERESTING PROBLEM
OF FINDING AREA**

S. V. Kostin

Several solutions are presented to the problem of finding the area of a generalized ellipse with exponent $1/2$. One of the solutions uses affine transformations. This solution is very unexpected and shows the deep internal interconnection of different branches of mathematics.

Keywords: generalized ellipse, Lamé curve, area of a figure, affine transformations, Archimedes' theorem.