СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 519.115

ТЕОРЕМА О ДОСТИЖЕНИИ ЭКСТРЕМУМА ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ НА МНОЖЕСТВЕ МАТРИЦ ПЕРЕСТАНОВОК

А. И. Эгамов[1], Т. П. Киселёва[2], О. В. Приставченко[3]

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

[1]albert.egamov@itmm.unn.ru, [2]kiseleva.chifa@yandex.ru, [3]pristavchenko@unn.ru

В статье представлено относительно простое доказательство теоремы о существовании матрицы перестановки, на которой достигается экстремум целевой функции задачи о назначениях, не требующее дополнительных теоретических материалов, а также большого временного лекционного ресурса. Предполагается, что эта статья поможет преподавателям дисциплин «дискретная математика», «линейное программирование», «методы оптимизации» или «вычислительные методы» более полно раскрыть тему «задача о назначениях» для студентов, не специализирующихся в дисциплине «выпуклое программирование», но имеющих в учебном плане перечисленные дисциплины. Например, эта статья может пригодиться преподавателям, ведущим как теоретические, так и практические занятия студентам ИТ специальностей или студентам экономических специальностей, так как именно математическо-экономические задачи чаще всего имеют тесную связь с дискретной оптимизацией.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, задача о назначениях, матрица перестановки, ориентированный цикл.

Введение

При изучении дисциплины «дискретная математика» в поле зрения студентов появляются различные задачи, связанные с дискретной оптимизацией [1]. Одна из таких задач — задача о назначениях [2–4], для решения которой необходимо найти матрицу X, заполненную числами от 0 до 1 и удовлетворяющую условиям: сумма чисел в каждой строке и каждом столбце матрицы равна 1. Эта задача является частным случаем транспортной задачи и исторически одной из первых исследованных задач комбинаторной оптимизации.

Дж. Данциг, разработавший в 1947 году симплекс-метод для решения задач линейного программирования, обосновал, что задачу о назначениях можно трактовать как задачу линейного программирования, имеющую целочисленное оптимальное решение. Задачу о назначениях также можно решить симплекс-методом, однако, имеются и другие методы, характерные именно для неё.

В 1955 году Г. Кун опубликовал «венгерский алгоритм» [5], позволяющий решить задачу о назначениях, как показал в 1957 году Дж. Манкрес, за полиномиальное время [6]. Оригинальный венгерский алгоритм имеет вычислительную сложность $O(n^4)$, где n — порядок квадратной матрицы в задаче о назначениях, впоследствии был модифицирован до вычислительной сложности $O(n^3)$ [7].

Кроме венгерского алгоритма существуют и другие методы решения задачи о назначениях, например, алгоритм Мака [2], метод Литтла [8] и другие.

Более подробный исторический экскурс о начале развития дискретной (комбинаторной) оптимизации можно найти в [9].

Общеизвестен факт, что экстремум в задаче о назначениях достигается на множестве матриц перестановок (точное определение см. ниже). В известной авторам литературе это утверждение либо доказывается в некоем общем виде после введения множества определений и выводов выпуклого программирования [10] и теоремы Биркгофа [11]; либо доказывается как следствие более общего утверждения (например, как частный случай целочисленного программирования [4]), а в любимой всеми студентами Википедии на страничке «задача о назначениях» [12] утверждение даётся со ссылкой: «Этот факт следует из абсолютной унимодулярности матрицы...», что, в общем-то, не сильно способствует пониманию проблемы без дальнейшего кропотливого разбора.

Ниже представлено доказательство теоремы о том, что экстремум в задаче о назначениях достигается на множестве матриц перестановок, которое авторы статьи считают наиболее приемлемым для студентов, наглядно демонстрирующее заявленное утверждение.

1. Задача о назначениях

Рассмотрим задачу о назначениях.

Квадратная матрица X размера $n \times n$ с элементами x_{ij}, удовлетворяющая условиям

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для } i = \overline{1,n}, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для } j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

называется *бистохастической* [9].

Пусть P — квадратная матрица размера $n \times n$, $n \geqslant 2$, с неотрицательными элементами p_{ij}. Целевая функция имеет вид:

$$S(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij}. \tag{3}$$

Задача оптимизации состоит в нахождении бистохастической матрицы X, при которой целевая функция (3) принимает максимальное значение.

Если необходимо не максимизировать, а минимизировать целевую функцию (3), то в качестве матрицы P следует взять матрицу $P_1 = \widetilde{P} - P$, где $\widetilde{P}$ — матрица с элементами $\widetilde{p}_{ij} = p_0 = max\{p_{ij},\, i = \overline{1,n},\, j = \overline{1,n}\}$. Действительно, в этом случае целевая функция (3) перепишется как

$$S(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{p}_{ij} - p_{ij}) x_{ij} = np_0 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij},$$

где np_0 — константа, и, значит, задача минимизации $S(X)$ для матрицы P сводится к задаче максимизации $S(X)$ для матрицы P_1. Исходя из этого, далее будем решать только задачу максимизации.

2. Основная теорема

Матрица называется *матрицей перестановки*, если для её элементов выполняются условия (2) и

$$x_{ij} = 0 \text{ или } x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что матрица перестановки является частным случаем бистохастической матрицы.

Теорема 1. *Наибольшее значение целевой функции S(X) всегда может быть достигнуто на множестве матриц перестановок.*

Доказательство. Назовём элементы матрицы X, лежащие в интервале (0,1), плохими. Если x_{ij} — плохой элемент бистохастической матрицы X, то и в i-й строке, и в j-м столбце существует хотя бы ещё один плохой элемент матрицы. Обозначим эти элементы x_{ij}, x_{im}, x_{kj}, $m \neq j$, $k \neq i$. Тогда и в m-м столбце, и в k-й строке существует хотя бы ещё один плохой элемент матрицы. Обозначим эти элементы x_{qm}, x_{kl}, $q \neq i$, $l \neq j$. Элементы x_{qm} и x_{kl} могут совпадать, следовательно, плохих элементов матрицы X не менее четырёх.

Пусть среди экстремальных бистохастических матриц X, на которых достигается максимум целевой функции (3), нет ни одной матрицы перестановки, иначе доказательство окончено. Возьмём бистохастическую экстремальную матрицу X^* с наименьшим числом плохих элементов x_{ij}, положим $S^* = S(X^*)$.

Приведём алгоритм, который находит по нижеописанным правилам список рёбер, составляющих простой ориентированный цикл [13], вершинами которого являются плохие числа матрицы. Рёбра ориентированного графа будут горизонтальные, соединяющие вершины одной строки и вертикальные, соединяющие вершины одного столбца.

Алгоритм нахождения цикла.

1. Пусть в начале работы алгоритма все строки и столбцы матрицы X будут «не вычеркнутые». Вычеркнем все строки и столбцы в матрице X, в которых есть число 1. Из условий (2) следует, что в вычеркнутых строках и столбцах все остальные элементы (кроме единицы) равны нулю, в них нет плохих элементов.

2. Возьмём в качестве начала цикла любое плохое число $x_{i_1j_1} \in (0,1)$, вычеркнем i_1-ю строку.

3. В i_1-й строке есть ещё хотя бы один плохой элемент, например, $x_{i_1j_2}$, $j_2 \neq j_1$. Вычеркнем j_2-й столбец. Понятно, что до этого j_2-й столбец не мог быть вычеркнут. Построим горизонтальное ребро $(x_{i_1j_1}, x_{i_1j_2})$.

4. В j_2-м столбце есть ещё хотя бы один плохой элемент, например, $x_{i_2j_2}$, $i_2 \neq i_1$. Вычеркнем i_2-ю строку. Понятно, что до этого i_2-я строка не могла быть вычеркнута. Построим вертикальное ребро $(x_{i_1j_2}, x_{i_2j_2})$.

5. В i_2-й строке есть ещё хотя бы один плохой элемент, например, $x_{i_2j_3}$, $j_3 \neq j_2$. Вычеркнем j_3-й столбец. Понятно, что до этого j_3-й столбец не мог быть вычеркнут. Построим горизонтальное ребро $(x_{i_2j_2}, x_{i_2j_3})$.

6. В j_3-м столбце есть ещё один плохой элемент. Сначала проверим имеется ли среди плохих элементов x_{ij_3}, $i = \overline{1,n}$, $i \neq i_2$, стоящий в вычеркнутых строках.

Если да, то для данного i, элемент x_{ij_3} станет последней вершиной цикла, обозначим $i_3 = i$, а первой будет та вершина, которая находится в i_3-й строке, ранее была выбрана в качестве вершины ломаной, и из неё выходит вертикальное ребро цикла. Далее соединяем последнюю вершину и первую.

Если нет, то берём в этой строке любой плохой элемент из невычеркнутых строк. Пусть элемент $x_{i_3j_3}$ — плохой, вычёркиваем i_3-ю строку (до этого она была не вычеркнута). Построим вертикальное ребро $(x_{i_2j_3}, x_{i_3j_3})$.

7. В i_3-й строке есть ещё плохие элементы. Сначала проверим имеется ли среди элементов x_{i_3j}, $j = \overline{1,n}$, $j \neq j_3$, такой плохой элемент, чтобы j-й столбец был бы вычеркнут.

Если да, то для данного j, элемент x_{i_3j} становится последней вершиной цикла, обозначим $j_4 = j$, а первой будет та вершина, которая находится в j_4-м столбце, ранее была выбрана в качестве вершины цикла, и из неё выходит горизонтальное ребро цикла. Далее соединяем последнюю вершину и первую.

Если нет, то берём в этой строке любой плохой элемент из невычеркнутых столбцов. Пусть элемент $x_{i_3j_4}$ — плохой, вычёркиваем j_4-й столбец (до этого он не был вычеркнут). Построим горизонтальное ребро $(x_{i_3j_3}, x_{i_3j_4})$.

8. Повторяя пункты 6 и 7, выбираем плохие элементы, увеличивая номера индексов у индексов столбцов и строк выбранных плохих элементов, и строим ориентированный простой цикл далее. На каком-то этапе найдём последнюю вершину замкнутого цикла в силу наличия конечного числа строк и столбцов, так как каждый раз общее количество невычеркнутых строк и столбцов уменьшается, а значит процесс не может продолжаться бесконечно.

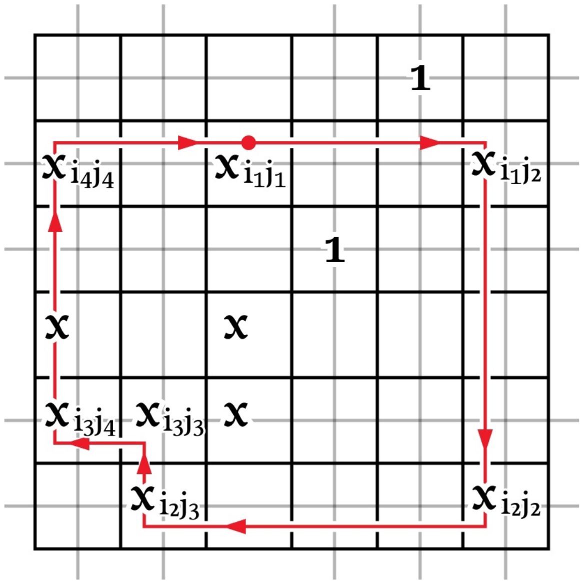

Рис. 1. Пример работы алгоритма, здесь $n = 6$, $i_4 = i_1$.

На рис. 1 показан пример работы алгоритма. На нём показан итоговый результат применения вышеописанного алгоритма. По рис. 1 несложно понять его работу. Символами x обозначены плохие числа, не входящие в ориентированный цикл. Также в него не входит выбранный элемент $x_{i_1j_1}$. Жирной точкой показан элемент, с которого алгоритм начинает работу. В итоге получен ориентированный цикл: $x_{i_1j_2} \to x_{i_2j_2} \to x_{i_2j_3} \to x_{i_3j_3} \to x_{i_3j_4} \to x_{i_4j_4} \to x_{i_1j_2}$, здесь $i_4 = i_1$.

Итак, для любой бистохастической матрицы существует цикл с чётным количеством вершин — плохих элементов матрицы X. Если в строке (столбце) есть плохой элемент — вершина ориентированного цикла, то таких вершин в строке (столбце) ровно две. Отметим, что попасть в цикл могут не все выбранные плохие элементы.

Назовём первую, третью, пятую и т.п. вершины цикла нечётными вершинами, вторую, четвёртую и т.п. вершины цикла — чётными вершинами.

На рис. 2 показано, что процесс построения цикла может «затянуться», здесь приходится в итоге вычёркивать все строки и столбцы.

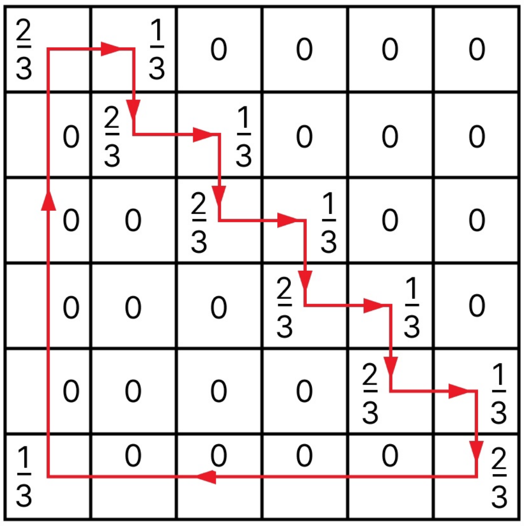

Рис. 2. Пример матрицы, для которой построение цикла происходит в наибольшее количество этапов.

В простейшем случае цикл представляет из себя границу прямоугольника со сторонами, «паралельными» строкам и столбцам матрицы X.

Для всех вершин построенного цикла обозначим $\theta_{1ij} = x_{ij}$, $\theta_{2ij} = 1 - x_{ij}$, числа x_{ij} стоят в вершинах цикла. Пусть θ_1 — минимальное из всех чисел θ_{1ij}, а θ_2 — минимальное из всех чисел θ_{2ij}. Положительное θ — минимальное из чисел θ_1 и θ_2.

Пусть матрица Δ — матрица размера $n \times n$, у которой на местах нечётных вершин цикла стоят числа $-\theta$, на местах чётных вершин цикла стоят числа θ, на всех остальных — 0.

Рассмотрим матрицы $Z_1 = X^* + \Delta$, $Z_2 = X^* - \Delta$. Нетрудно видеть, что они являются бистохастическими и отличаются от матрицы X только элементами, стоящими в вершинах построенного цикла.

Заметим, что

$$S(Z_1) = S(X^*) + S(\Delta) = S^* + \Theta,$$

$$S(Z_2) = S(X^*) - S(\Delta) = S^* - \Theta,$$

где

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\sigma(i,j)} \theta p_{ij},$$

$$\sigma(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{ij} \text{ — нечётная вершина цикла,} \\ 0, & \text{если } x_{ij} \text{ — чётная вершина цикла.} \end{cases}$$

Таким образом, если $\Theta \neq 0$, то матрица X — не экстремальная, так как либо $S(Z_1) > S^*$, либо $S(Z_2) > S^*$. Противоречие.

Если $\Theta = 0$, то матрицы Z_1 и Z_2 также являются экстремальными. Однако, у одной из матриц число плохих элементов меньше, чем у X^*. Действительно, матрицы X^*, Z_1 и Z_2 отличаются друг от друга только плохими элементами, стоящими в вершинах построенного цикла.

Если $\theta = \theta_{1ij}$ и вершина нечётная, то у матрицы Z_1 на месте плохого элемента x_{ij} стоит 0, а если $\theta = \theta_{1ij}$ и вершина чётная, то у матрицы Z_2 на месте плохого элемента x_{ij} стоит 0. Следовательно, число плохих элементов или у матрицы Z_1, или у матрицы Z_2, хотя бы на единицу меньше, чем у матрицы X^*.

Если $\theta = \theta_{2ij}$ и вершина нечётная, то у матрицы Z_2 на месте плохого элемента x_{ij} стоит 1, а если $\theta = \theta_{2ij}$ и вершина чётная, то у матрицы Z_1 на месте элемента x_{ij} стоит 1. Следовательно, число плохих элементов или матрицы Z_1, или матрицы Z_2, хотя бы на 1 меньше, чем у матрицы X^*. Все случаи разобраны. Противоречие.

Таким образом, среди экстремальных матриц всегда найдётся матрица перестановки (кстати, именно у неё будет минимальное число плохих элементов — ноль). Теорема доказана.

∎

3. Заключение

Нетрудно видеть, что основная идея доказательства сродни перераспределению поставок в транспортной задаче, частным случаем которой является задача о назначениях.

Авторы статьи предлагают своё доказательство утверждения о достижении экстремума задачи о назначениях на множестве матриц перестановок, которое, на их взгляд, в наибольшей степени подходит для студенческого понимания, не претендуя на свою первоочерёдность представленного выше доказательства теоремы. Оно привлекает внимание тем, что является интуитивно-понятным и не требует большого количества введённого предварительно теоретического материала и значительных временных затрат при чтении лекций по этой тематике. Возможно, самые первые доказательства этой теоремы опирались именно на те идеи, которые представлены в настоящей статье.

Литература

[1] Леонтьев В.К. Дискретная оптимизация // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2007. — Т. 47, № 2. — С. 338-352.

[2] Банди Б. Основы линейного программирования М.: Радио и связь, 1989. 176 с.

[3] Rainer B. Assignment problems. Society for Industrial and Applied Mathematics. USA, Philadelphia, 2009. 382 p.

[4] Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2004. 154 с.

[5] Kuhn H.W. The Hungarian Method for the Assignment Problem // Naval Research Logistics Quarterly. 1955. 2. P.83—97.

[6] Munkres J. Algorithms for the Assignment and Transportation Problems // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1957 March. 5(1). P. 32—38.

[7] Hopcroft J.E., Karp R.M. An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs // SIAM Journal on Computing. 1973. 2 (4). P. 225—231.

[8] Щукина Н.А. Некоторые подходы к решению задачи о назначениях // Проблемы экономики и менеджмента. 2016. № 5(57). С. 169-174.

[9] Schrijver A. On the History of Combinatorial Optimization (Till 1960) // Handbooks in Operations Research and Management Science. Editor(s): K. Aardal, G.L. Nemhauser, R. Weismantel. 2005. V.12. P. 1-68.

[10] Аоки М. Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1977. 344 с.

[11] Емеличев В.А., Ковалёв М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, Оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с.

[12] Википедия. Задача о назначениях. [Электронный ресурс] URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_о_назначениях (Дата обращения 23.06.24).

[13] Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.

Поступила 24.06.2024

THE THEOREM ON REACHING THE EXTREMUM OF THE ASSIGNMENT PROBLEM ON THE SET OF PERMUTATION MATRICES

A. I. Egamov, T. P. Kiseleva, O. V. Pristavchenko

The article presents a relatively simple proof of the theorem on the existence of a permutation matrix, on which the extremum of the objective function of the assignment problem is achieved. The proof does not require additional theoretical materials, as well as a large temporary lecture resource. It is assumed that this article will help teachers of the disciplines "discrete mathematics", "linear programming", "optimization methods" or "computational methods" to more fully disclose the topic "assignment problem" for students who do not specialize in the discipline "convex optimization", but having the listed disciplines in the curriculum. For example, this article may be useful for teachers conducting both theoretical and practical classes for students of IT specialties or students of economic specialties, since it is mathematical and economic problems that most often have a close connection with discrete optimization.

Keywords: discrete optimization, assignment problem, permutation matrix, directed cycle.