

СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 519.21

ПРИМЕНЕНИЕ КЕЙС-ТЕХНОЛОГИИ
В ПРЕПОДАВАНИИ
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН
НА ПРИМЕРЕ КУРСА АЛГЕБРЫ

Е. Б. Титова

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия*

Рассмотрены практические аспекты применения кейс-технологии в преподавании фундаментальных дисциплин на примере курса алгебры бакалавриата ИТ-специальностей. Представленный кейс направлен на закрепление и углубление знаний бакалавров по теме «характеристический многочлен матрицы». Формируется умение выбирать наиболее подходящий и менее трудозатратный способ нахождения характеристического многочлена.

Ключевые слова: кейс-технологии, характеристический многочлен матрицы, главные миноры, собственные числа матрицы.

1. Введение

Данный кейс разработан для обучения бакалавров направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» в рамках фундаментальной дисциплины «Алгебра».

В ходе работы с кейсом обучающиеся разбиваются на группы 5–6 человек, каждая группа получает одинаковые задания для решения. Студенты уже имеют навык нахождения характеристического многочлена матрицы непосредственным вычислением детерминанта, методом нахождения характеристического многочлена через сумму главных миноров. Данное занятие можно рассматривать как закрепляющее и обобщающее пройденный материал.

Студентам необходимо сопоставить трудоёмкость нахождения характеристического многочлена матрицы по затраченному времени решения, оценить полученный многочлен с точки зрения простоты разложения на множители и сделать выводы о целесообразности применения того или иного метода для

нахождения характеристического многочлена матрицы конкретного вида и, в дальнейшем, собственных чисел.

Кейс содержит в себе ситуацию для отработки ключевой задачи курса, решение которой в дальнейшем потребуется, например, в курсах «Дифференциальные уравнения», «Теория управления». Применяется игровое проектирование, студенты разрабатывают исследовательско-аналитический проект (см., напр., [1, 2]).

Цель кейса: повышение навыков нахождения характеристического многочлена матрицы, повышение заинтересованности студентов в предмете.

Задачи кейса:

- 1) актуализация знаний по линейной алгебре;
- 2) тренировка умений выдвигать обоснованные решения;
- 3) выбор наилучшего метода нахождения характеристического многочлена матрицы;
- 4) подготовка отчёта о полученном результате.

2. Описание кейса

Студентам предлагается найти характеристический многочлен $\det |A - \lambda E|$ следующих матриц тремя способами:

- 1) непосредственным вычислением детерминанта разложением по строке;
- 2) предварительно упростив до определителя с единственным ненулевым элементом в строке или столбце;
- 3) используя сумму главных миноров.

Студенты внутри группы распределяют матрицы между собой, каждый студент находит характеристический многочлен матрицы тремя способами, а так же её собственные числа. Перед ними ставится задание: учесть время получения многочлена для одной и той же матрицы разными способами, выписать это время и ответы в таблицу, предоставить рекомендации по выбору способа решения в зависимости от вида матрицы и сопоставить вид полученного многочлена со сложностью нахождения собственных чисел из характеристического уравнения для данной матрицы.

В качестве примерных заданий кейса предлагается найти характеристические многочлены и собственные числа следующих матриц ([3, 4]) (одинаковые задания раздаются в каждую группу):

1. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
3. & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\
4. & \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\
5. & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \\
6. & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Студентам предоставляется справочная информация [5].

Для матрицы A порядка n характеристический многочлен можно записать в виде

$$\det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + s_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + s_{n-1}(-\lambda) + s_n,$$

где s_i — сумма главных миноров порядка i (минор называется главным, если номера занимаемых им строк совпадают с номерами столбцов). В частности, $s_1 = \text{tr} A$ ($\text{tr} A$ — след матрицы A), $s_n = \det A$.

При $n = 2$ получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

При $n = 3$ получим

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - \\
& - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Перечислим основные вопросы, на которые студенты должны дать ответ.

1. Получите характеристический многочлен для каждой матрицы тремя способами, выпишите ответ.
2. Выпишите собственные числа для каждой матрицы.
3. Какое время потрачено на решение для каждой матрицы каждым из трёх способов?

4. Какие типы матриц можно выделить в зависимости от коэффициентов?
5. Предоставьте рекомендации по выбору способа решения в зависимости от вида и размерности матрицы.
6. *Дополнительный вопрос:* Каков характеристический многочлен для матрицы, обратной данной?

Результаты измерений предлагается занести в таблицу:

Номер матрицы	Ответ	Время, затраченное на решение			Вывод о лучшем способе решения
		1 метод	2 метод	3 метод	
1					
2					
3					
4					
5					
6					

После выполнения задания студенты публично обсуждают результаты, полученные в разных группах, и делают выводы о целесообразности применения того или иного метода решения в зависимости от вида матрицы.

По итогам занятия формулируются следующие рекомендации:

- для кососимметрических матриц при $n = 3$ эффективнее вычислять характеристический многочлен через сумму главных миноров, так как одно из собственных чисел равно 0;
- для матриц, содержащих большое количество нулевых элементов, эффективнее непосредственное разложение по строке (столбцу);
- для симметрических матриц эффективно применить преобразование со строками, а затем со столбцами для упрощения вида определителя.

3. Методические рекомендации

Подробное описание плана занятия с использованием кейс-технологий изложено в [6]. Уточним некоторые детали, относящиеся непосредственно к данному кейсу.

В начале занятия требуется повторение основных определений (собственного вектора, собственного числа, характеристического многочлена матрицы) и уточнение этапов вычисления определителей.

В ходе выполнения кейса основное внимание уделяется виду полученного характеристического многочлена и эффективности нахождения собственных чисел рассматриваемой матрицы. На проведение занятия отводится 4 академических часа (сдвоенное занятие).

Критерии оценивания:

Студенты, правильно нашедшие характеристический многочлен, получают **35 баллов**.

Студенты, правильно нашедшие собственные числа, получают **30 баллов**.

Студенты, заполнившие таблицу, получают **15 баллов**.

Студенты, сформулировавшие рекомендации по выбору метода нахождения характеристического многочлена, получают **20 баллов**.

Сопоставление оценки за занятие с баллами описано в [6]. По результатам занятия оценку получает каждый студент.

Заключение

Применение данной педагогической технологии способствует активизации исследовательского потенциала студентов и развитию таких компетенций, как командная работа, коммуникация, системное и критическое мышление.

Анализ результатов внедрения этого кейса позволяет с уверенностью сказать, что уровень усвоения учебного материала значительно повышается. Студенты быстрее находят характеристический многочлен матрицы, что в свою очередь способствует более эффективному решению задач в рамках последующих тем.

Другой пример использования кейс-технологии в курсе «Алгебра» бакалавриата ИТ-специальностей рассмотрен в [6].

Литература

- [1] Педагогические технологии в 3 ч. Часть 1. Образовательные технологии: учебник и практикум для вузов /под общей редакцией Л.В. Байбородовой, А.П. Чернявской. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 258 с.
- [2] Попова С. Ю., Пронина Е. В. Современные образовательные технологии. Кейс-стади: учебное пособие для вузов. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 126 с.
- [3] Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 476 с.
- [4] Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 288 с.
- [5] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука, 1972. — 232 с.
- [6] Титова Е. Б. Пример использования кейс-технологии в курсе алгебры // Математика в высшем образовании. 2023. Т. 21. С. 71–76.

Поступила 05.12.2024

**APPLICATION OF CASE TECHNOLOGY
IN TEACHING FUNDAMENTAL DISCIPLINES
USING THE EXAMPLE OF AN ALGEBRA COURSE**

E. B. Titova

The practical aspects of using case technology in teaching fundamental disciplines are considered using the example of the algebra course of the bachelor's degree in IT specialties. The presented case is aimed at consolidating and deepening the knowledge of bachelors on the topic of the characteristic polynomial of a matrix. The ability to choose the most suitable and less labor-intensive way to find the characteristic polynomial is formed.

Keywords: case-technology, characteristic polynomial of a matrix, principal minor, eigenvalues of a matrix.