

ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

УДК 511.13

РАЗБОР ЗАДАНИЯ
О ФУНКЦИЯХ НАТУРАЛЬНОГО АРГУМЕНТА

В. А. Лецко

*Волгоградский гос. социально-педагогический университет,
Волгоград, Россия*

val-etc@yandex.ru

В статье представлен разбор заданий, нацеленных на исследование функций натурального аргумента, в определении которых фигурируют последовательные натуральные числа.

Ключевые слова: функции натурального аргумента, последовательные натуральные числа.

Исследовательское задание из прошлого выпуска журнала

Рассматриваемые задачи посвящены функциям натурального аргумента, в определении которых используются последовательные натуральные числа. Для понимания решений потребуются знания по теории делимости и теории сравнений.

1. Для каждого натурального числа k рассмотрим функцию натурального аргумента

$$G_k(n) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n+i)}{\text{НОК}_{i=0}^{k-1} (n+i)}.$$

- (а) Каковы наименьшее и наибольшее значения $G_k(n)$?
(б) Обозначим через $NG(k)$ количество всевозможных значений $G_k(n)$ при данном k . Существует ли k такое, что

$$NG(k) > NG(k+1) > NG(k+2) > NG(k+3)?$$

- (с) Докажите, что $G_k(n)$ периодична, и найдите наименьший период функции.

2. Рассмотрим функцию натурального аргумента

$$F(n) = \frac{\text{НОК}(n+1, n+2, n+3, n+4, n+5)}{\text{НОК}(n, n+1, n+2, n+3, n+4)}.$$

- (a) Конечно ли множество значений $F(n)$?
- (b) Ограничена ли функция? Достигаются ли наименьшее и наибольшее значения $F(n)$?
- (c) Может ли функция принимать целые значения и какие?
- (d) Какие значения достигаются более одного раза и сколько раз достигаются эти значения?

3. Для каждого натурального числа k рассмотрим функцию натурального аргумента

$$Q_k(n) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n+i)}{\sum_{i=0}^{k-1} (n+i)}.$$

- (a) При каких k все значения функции $Q_k(n)$ будут целыми?
- (b) При каких k множество целочисленных значений функции $Q_k(n)$ конечно?
- (c) Найти количество целочисленных значений $Q_{68}(n)$?

Решение первой задачи

Среди k последовательных чисел не более одного делится на простое число p , большее либо равное k . Поэтому в каноническом разложении $G_k(n)$ могут (а если $2p \leq k$, то и обязаны) присутствовать только простые числа, меньшие k .

Осталось понять, в каких степенях простые p , меньшие k , могут входить в разложение $G_k(n)$. Ясно, что среди n последовательных чисел каждое p -е кратно p . Среди чисел, кратных p , каждое p -е кратно p^2 и т. д. Понятно, что p будет входить в $G_k(n)$ с наименьшим возможным показателем, в частности, всякий раз, когда $n \equiv 1 \pmod{p^s}$, где $p^s \geq k$. Таким образом, наименьшее значение $G_k(n)$ впервые достигается уже при $n = 1$ и равно

$$\frac{k!}{\text{НОК}(1, 2, \dots, k)}.$$

Пусть теперь $n = (k-1)!$. В какой степени простое p , меньшее k , входит в $G_k(n)$? В первый сомножитель произведения в числителе функции оно входит ровно в той степени, в которой оно входит в НОК чисел в знаменателе. В остальные же сомножители числителя оно входит с суммарным показате-

лем $\lfloor \frac{k-1}{p} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{p^2} \rfloor + \dots$, т.е. в точности с тем показателем, с которым оно входит в $(k-1)!$. Поэтому $G_k((k-1)!) = (k-1)!$.

Легко понять, что это наибольшее возможное значение $G_k(n)$. Таким образом, мы нашли ответ на вопрос пункта (а). Заметим, что $(k-1)!$ не обязано быть наименьшим значением n , при котором значение функции достигает $(k-1)!$. Например, при $k=6$ наибольшее значение функции $G_k(n)$ впервые достигается уже при $n=15$.

Для ответа на второй вопрос первой задачи найдём явное выражение для $NG(k)$. Во-первых, заметим, что для показателей каждого p , входящего в разложения значений функции, достигаются все промежуточные значения между минимальным и максимальным. Во-вторых, Китайская теорема об остатках гарантирует любые сочетания этих показателей по разным p . Отсюда следует, что

$$NG(k) = \tau \left(\frac{G_k((k-1)!) }{G_k(1)} \right) = \tau \left(\frac{\text{НОК}(1, 2, \dots, k)}{k} \right).$$

Ясно, что в целом $NG(k)$ имеет тенденцию к возрастанию. Но это возрастание не монотонно. Уменьшению значения $NG(k)$ способствует увеличение количества делителей k . Это обстоятельство помогает ответить на вопрос пункта (b) первой задачи.

В таблице 1 представлены первые 16 значений $NG(k)$.

Таблица 1

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$NG(k)$	1	1	2	2	6	4	12	8
k	9	10	11	12	13	14	15	16
$NG(k)$	16	18	48	32	96	72	64	48

Из таблицы видно, что $NG(13) > NG(14) > NG(15) > NG(16)$, и ответ на вопрос пункта (b) положителен. Четыре последовательно убывающих значения $NG(k)$ — не предел. Например, $NG(1103)$ открывает цепочку из пяти последовательных убывающих значений.

Если значения аргумента $G_k(n)$ отличаются на $t = \text{НОК}(1, 2, \dots, k)$, то значения функции будут одинаковы (все простые множители будут входить в разложения $G_k(n)$ и $G_k(n+t)$ в одинаковых степенях). Для многих k указанное значение и будет наименьшим периодом.

Однако непосредственная проверка показывает, что, например, период $G_6(n)$ равен 20, в то время как $\text{НОК}(1, 2, \dots, k-1) = 60$. Оказывается на период $G_k(n)$ влияет ещё и каноническое разложение k .

В произведение шести последовательных чисел независимо от остатка от деления первого из них на 3 войдут ровно два числа, кратных 3. Поэтому тройка всегда войдет в разложение $G_6(n)$ в первой степени. Но ведь 6 кратно ещё и 2!? Да. Но в произведение шести последовательных чисел могут войти как одно, так и два числа, кратных 4. Влияют на уменьшение периода только те простые множители k , которые входят в разложение k с показателем, не меньшим их показателя в разложении $\text{НОК}(1, 2, \dots, k-1)$.

Итак, наименьший период $G_k(n)$ можно получить из канонического разложения $\text{НОК}(1, 2, \dots, k-1)$, убрав из него все простые множители, показатель которых в каноническом разложении k не меньше показателя в каноническом разложении $\text{НОК}(1, 2, \dots, k-1)$. В таблице 2 представлены наименьшие периоды $G_k(n)$ для первых 16 значений k .

Таблица 2

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$TG(k)$	1	1	2	3	12	20	60	105
k	9	10	11	12	13	14	15	16
$TG(k)$	280	504	2520	27720	27720	51480	72072	45045

Ответы к первой задаче:

- (a) $\min(G_k(n)) = \frac{k!}{\text{НОК}(1,2,\dots,k)}$, $\max(G_k(n)) = (k-1)!$
 (b) Да. Например, $NG(13) > NG(14) > NG(15) > NG(16)$.
 (c) $TG(k) = \prod p_i^{\alpha_i}$, где $p_i^{\alpha_i}$ берётся из канонического разложения $\text{НОК}(1, 2, \dots, k-1)$ при условии, что α_i меньше показателя p_i в каноническом разложении k .

Решение второй задачи

Вычислим несколько начальных значений $F(n)$: $F(1) = 1$, $F(2) = 7$, $F(3) = 2$, $F(4) = 3$, $F(5) = 1$, $F(6) = 11$, $F(7) = \frac{1}{7}$, $F(8) = \frac{13}{2}$, $F(9) = \frac{7}{3}$.

Не правда ли, этот набор выглядит хаотично? Тем интереснее будет выявить присущие ему закономерности.

Преобразуем выражение для $F(n)$, используя известные свойства НОД и НОК и положив $a = \text{НОК}(n+1, n+2, n+3, n+4)$.

$$\frac{\text{НОК}(n+1, \dots, n+5)}{\text{НОК}(n, \dots, n+4)} = \frac{\text{НОК}(a, n+5)}{\text{НОК}(n, a)} = \frac{a(n+5)}{\text{НОД}(a, n+5)} \cdot \frac{\text{НОД}(n, a)}{na} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n+5}{n} \cdot \frac{\text{НОД}(n, \text{НОК}(n+1, n+2, n+3, n+4))}{\text{НОД}(\text{НОК}(n+1, n+2, n+3, n+4), n+5)} = \\
&= \frac{n+5}{n} \cdot \frac{\text{НОК}(\text{НОД}(n, 1), \text{НОД}(n, 2), \text{НОД}(n, 3), \text{НОД}(n, 4),)}{\text{НОК}(\text{НОД}(n+5, 1), \text{НОД}(n+5, 2), \text{НОД}(n+5, 3), \text{НОД}(n+5, 4))} = \\
&= \frac{n+5}{n} \cdot \frac{\text{НОД}(n, 12)}{\text{НОД}(n+5, 12)}.
\end{aligned}$$

Итак, $F(n)$ является произведением двух функций. Первая функция монотонно убывает, асимптотически приближаясь к 1. А вторая, очевидно, периодична с периодом 12. Вычислив значение

$$\frac{\text{НОД}(n, 12)}{\text{НОД}(n+5, 12)}$$

в каждом из классов вычетов по модулю 12, получим довольно громоздкое, но вполне прозрачное выражение для $F(n)$:

$$F(n) = \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 1 \pmod{12}, \\ 2 \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 2 \pmod{12}, \\ \frac{3}{4} \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 3 \pmod{12}, \\ \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 4 \pmod{12}, \\ \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 5 \pmod{12}, \\ 6 \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 6 \pmod{12}, \\ \frac{1}{12} \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 7 \pmod{12}, \\ 4 \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 8 \pmod{12}, \\ \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 9 \pmod{12}, \\ \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 10 \pmod{12}, \\ \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 11 \pmod{12}, \\ 12 \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right), & \text{если } n \equiv 0 \pmod{12}. \end{cases} \quad (1)$$

Теперь мы готовы получить ответы на все вопросы второй задачи.

Множество значений $F(n)$, очевидно, бесконечно. Это сразу следует, например, из того, что сначала в числителе, а затем знаменателе значений функции последовательно побывают все простые числа, большие 5. Так что, ответ на вопрос пункта (а) отрицателен.

Не сложно найти ответы и на вопросы пункта (b).

Из формулы (1) следует, что в каждом из двенадцати классов вычетов по модулю 12 функция монотонно убывает. Поэтому наибольшее значение достигается для первого представителя одного из классов, а именно $F(12) = 17$ (множитель $\frac{n+5}{n}$ будет иметь при этом наименьшее значение, но множитель 12, очевидно, «перетянет»).

При $n \equiv 7 \pmod{12}$ значения функции будут неограниченно приближаться к $\frac{1}{12}$, оставаясь больше этого числа. Ясно, что $\frac{1}{12}$ — недостижимая точная нижняя грань значений функции.

Для нахождения целых значений $F(n)$ рассмотрим сужения функции на каждый класс вычетов по модулю 12 отдельно.

Для $n \equiv 0 \pmod{12}$ имеем: $F(12) = 17$, $F(24)$, $F(36)$ и $F(48)$ не являются целыми, а $F(60) = 13$. Дальнейшие значения меньше 13, но больше 12 и поэтому не могут быть целыми. Таким образом, в этом классе имеется ровно два целых значения $F(n)$.

При $n \equiv 1 \pmod{12}$ целым будет $F(1)$, равное 1, а остальные значения заведомо меньше 1 и больше $\frac{1}{6}$.

При $n \equiv 2 \pmod{12}$ имеем $F(2) = 7$, а остальные значения заведомо меньше 3, но больше 2.

При $n \equiv 3 \pmod{12}$ получим $F(3) = 3$, $F(15)$ вернёт уже встречавшееся значение 1, а остальные значения, будучи меньше 1, не могут быть целыми.

Аналогично рассмотрев остальные классы, найдём ещё два целых значения: $F(4) = 3$ и $F(20) = 5$. При этом значение 7 встретится нам ещё раз (при $n = 30$), а значение 1 ещё дважды (при $n = 5$ и $n = 10$).

Таким образом, ответ на вопрос пункта (с) — $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 17\}$.

В процессе нахождения целых значений функции мы уже нашли повторяющиеся значения 1 и 7. Но, разумеется, повторяющиеся значения не обязаны быть целыми. Для получения остальных ответов на вопрос пункта (d) разобьём область, которой принадлежат все значения $F(n)$ на 12 «этажей».

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{12}; 17\right] &= \left(\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right] \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right] \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right] \cup \left(\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right] \cup \\ &\cup \left(\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right] \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right] \cup (2; 4] \cup (4; 6] \cup (6; 12] \cup (12; 17]. \end{aligned}$$

В каждом классе вычетов наша функция убывает. При этом начальные значения могут оказаться выше своего этажа, но, начиная с некоторого значения аргумента, все значения функции попадут на свой этаж. Очевидно, что какие-то значения могут совпасть только в том случае, когда хотя бы для одного аргумента это значение лежит выше своего этажа.

Таким образом, для нахождения повторов остаётся проверить конечное (и, как выяснится, не слишком большое) количество значений. При этом часть значений $F(n)$, лежащих выше своего этажа, оказываются целыми, а среди них все повторяющиеся значения мы уже нашли. После их исключения «на подозрении» остаются всего 5 значений: $F(16) = \frac{7}{4}$, $F(30) = \frac{11}{7}$, $F(9) = \frac{7}{3}$, $F(22) = \frac{9}{11}$, $F(34) = \frac{13}{17}$. Рассмотрим каждое из них.

Кроме аргумента 16, значение $\frac{7}{4}$ могут давать только аргументы, лежащие в классе 9 по модулю 12. Для остальных классов значения функции лежат либо всегда выше (классы 2, 6 и 12), либо всегда ниже рассматриваемого этажа. Но уравнение $\frac{3}{2} \left(1 + \frac{5}{9+12t}\right) = \frac{7}{4}$ не имеет решений в целых неотрицательных числах. Поэтому значение $\frac{7}{4}$ уникально.

Заметим, что можно было и не решать вышеприведенное уравнение, а рассматривать последовательные значения $F(n)$ от аргументов, лежащих в классе 9, пока не «наступим» на $\frac{7}{4}$ или на меньшее число. В нашем случае $F(21)$ ещё больше, а $F(33)$ уже меньше $\frac{7}{4}$.

Значения $\frac{11}{7}$, кроме аргумента 28, вновь могут получаться только при значениях аргумента, сравнимых с 9 по модулю 12. В этом случае уравнение $\frac{3}{2} \left(1 + \frac{5}{9+12t}\right) = \frac{11}{7}$ имеет решение $t = 8$. Поэтому и значение $\frac{11}{7}$ получается ещё и при $n = 9 + 12 \cdot 8 = 105$.

Кроме аргумента 9, значение $\frac{7}{3}$ может возникнуть в классах 4 и 2. Но в классе 4 первое значение больше $\frac{7}{3}$, а остальные лежат «этажом ниже». Уравнение $2 \left(1 + \frac{5}{2+12t}\right) = \frac{7}{3}$ неразрешимо в целых неотрицательных числах. Поэтому значение $\frac{7}{3}$ не повторяется.

На этаже $(\frac{3}{4}; \frac{4}{3}]$, кроме значений $\frac{9}{11}$, $\frac{13}{17}$, достижимых при аргументе из класса 10, лежат значения для аргумента из классов 1, 7 и 3. Для первых двух — это только 1, с которой мы уже разобрались. Остаётся проверить класс 3. Уравнение $\frac{3}{4} \left(1 + \frac{5}{3+12t}\right) = \frac{9}{11}$ не имеет подходящих решений, а уравнению $\frac{3}{4} \left(1 + \frac{5}{3+12t}\right) = \frac{13}{17}$ удовлетворяет $t = 21$. Поэтому, значение $\frac{13}{17}$ повторно достигается при $n = 3 + 12 \cdot 21 = 255$.

Окончательно для пункта (d) получаем $F(1) = F(5) = F(10) = F(15) = 1$, $F(2) = F(30) = 7$, $F(28) = F(105) = \frac{11}{7}$, $F(34) = F(255) = \frac{13}{17}$.

Конечно, функция $F(n)$ может рассматриваться как представитель семейства функций

$$F_k(n) = \frac{\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k)}{\text{НОК}(n, n+1, \dots, n+k-1)}.$$

Большинство проведённых нами рассуждений естественным образом переносится на общий случай. Подробнее об этом можно прочесть в [1, 3.3].

Ответы ко второй задаче:

- (a) Нет.
- (b) $\max(F(n)) = 17$, недостижимый $\inf(F(n)) = \frac{1}{12}$.
- (c) Может. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 17.
- (d) $F(1) = F(5) = F(10) = F(15) = 1$,
 $F(2) = F(30) = 7$,
 $F(28) = F(105) = \frac{11}{7}$,
 $F(34) = F(255) = \frac{13}{17}$.

Решение третьей задачи

Исследование функций $Q_k(n)$ разбивается на два принципиально разных случая. Начнём с лёгкого, предположив сначала, что k — нечётно.

Функция $Q_1(n)$ тождественно равна 1. Это, в частности, означает, что все её значения целочисленны. Пусть $k = 2t + 1$ для некоторого натурального t . Используя формулу суммы арифметической прогрессии, запишем $Q_k(n)$ в виде

$$\frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n+i)}{k(n+t)} = \frac{n(n+1) \dots (n+t-1)(n+t+1) \dots (n+2t)}{k}.$$

Среди k последовательных чисел ровно одно делится на k . Если оно отлично от $n+t$, то $Q_k(n)$, очевидно, будет целым.

Остаётся рассмотреть случай $n \equiv t+1 \pmod{k}$. Если k простое, то оставшиеся в числителе выражения для $Q_k(n)$ взаимно просты с k и, следовательно, $Q_k(n)$ не будет целым. Если же $k = k_1 k_2$, где оба сомножителя больше 1, то среди чисел $n, n+1, \dots, n+t-1$ найдётся кратное k_1 , среди чисел $n+t+1, \dots, n+2t$ — кратное k_2 , и $Q_k(n)$ — целое при любом n .

Случай $k = 2t$ гораздо сложнее. При $k = 2$ имеем $Q_2(n) = \frac{n(n+1)}{2n+1}$. Каждый из сомножителей числителя, очевидно, взаимно прост со знаменателем. Учитывая, что этот знаменатель больше 1, приходим к выводу, что $Q_2(n)$ не может быть целым. Но уже для $k = 4$ имеем $Q_4(3) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3+4+5+6} = 20$. Покажем, что для $k = 4$ это целое значение единственно (уже в этом частном случае выявятся идеи, характерные для больших чётных k).

Имеем $Q_4(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2(2n+3)}$. Поскольку $(n+1)(n+2)$ чётно и взаимно просто с $2n+3$, для того, чтобы $Q_4(n)$ было целым, необходимо и достаточно, чтобы $n(n+3)$ было кратно $2n+3$. Но каждое из чисел $n, n+3$ либо взаимно просто с $2n+3$, либо имеет с $2n+3$ наибольший общий делитель 3. Таким образом, наибольшее значение НОД $n(n+3)$ и $2n+3$ равно 9. При $n = 3$

возникает именно этот НОД, совпадающий с $2n+3$, а при $n > 3$ в знаменателе остаётся несократимый с числителем нетривиальный множитель числа $2n+3$.

Приступим к рассмотрению общего случая. Применяя формулу суммы арифметической прогрессии, перепишем знаменатель $Q_k(n)$ в виде

$$d_k(n) = n + (n+1) + \dots + (n+2t-1) = t(2n+2t-1). \quad (2)$$

Из формулы (2) видно, что показатель степени двойки в каноническом разложении знаменателя $Q_k(n)$ всегда на 1 меньше её показателя в каноническом разложении k . Это заведомо меньше, чем показатель двойки в числителе $Q_k(n)$. Поэтому простой множитель 2 не препятствует целочисленности $Q_k(n)$, но, в то же время, никак не влияет на разнообразие возможных канонических разложений знаменателей, для которых $Q_k(n)$ целочисленно.

Для того, чтобы $Q_k(n)$ было целым, нужно, чтобы все простые множители (а не только двойка) входили в каноническое разложение знаменателя с показателями, не превосходящими их показатели в числителе.

Пусть $p > 2t$ — простой множитель знаменателя. Тогда он входит в каноническое разложение $2n+2t-1$.

Допустим, что p входит в каноническое разложение числителя, и следовательно, в силу простоты, он должен делить хотя бы одно из чисел $n+i$, где $i \in \{0, 1, \dots, 2t-1\}$, а значит, и число $2n+2t-1-2n-2i=2t-1-2i$. Но это число не равно 0 и по абсолютной величине меньше p . Полученное противоречие показывает, что в разложении (2) могут участвовать только простые числа, меньшие k .

Нам осталось выяснить, с какими показателями степени допустимые простые множители могут входить в разложение (2). Разумеется, простое p , меньшее k , может по отдельности входить в каноническое разложение как числителя, так и знаменателя $Q_k(n)$ в сколь угодно большой степени. Но нас интересует максимальный показатель у p , достижимый одновременно и в числителе, и в знаменателе.

Чтобы разобраться в этом непростом вопросе, вновь обратимся сначала к частному случаю. Пусть $k=2t=10$. Тогда $d_{10}(n)=5(2n+9)$, и в знаменателе $Q_{10}(n)$ могут быть только нечётные числа. Как мы знаем, для того, чтобы числитель нацело поделился на $d_{10}(n)$, необходимо, чтобы в каноническом разложении $d_{10}(n)$ присутствовали только тройки, пятёрки и семёрки. Причём в нашем случае кратность знаменателя 5 обязательна.

Разберёмся с возможными показателями тройки в разложении знаменателя. Понятно, что ни при каких натуральных n знаменатель не может равняться 15 и 45, поскольку эти числа меньше суммы десяти наименьших натуральных чисел. Отметим, что это не означает невозможности вхождения в $d_{10}(n)$ тройки в первой и второй степенях. Например, при $n=3$ знаменатель

будет равен 75, а значение $Q_{10}(n)$ — целым. Аналогично, при $n = 18$ получим $d_{10}(n) = 225$ и целое $Q_{10}(n)$.

Легко убедиться, что при n , равных 9, 36, 117 и 360, число 3 будет входить в $d_{10}(n)$ соответственно в 3-й, 4-й, 5-й и 6-й степенях, а значения $Q_{10}(n)$ всякий раз будут целыми. Так, может быть, эти показатели не ограничены сверху и бесконечное множество целых значений $Q_{10}(n)$ возможно не только при нечётных k ? Нет! Уже 7-я степень тройки не может встречаться в $d_{10}(n)$.

В самом деле, пусть $d_{10}(n) : 3^7$ и $n(n+1) \dots (n+9) : 3^7$. Но тогда

$$(2n - d_{10}(n))(2n + 2 - d_{10}(n)) \dots (2n + 18 - d_{10}(n)) = (-9)(-7) \dots 9 : 3^7. \quad (3)$$

Однако последнее невозможно, поскольку тройка входит в выражение в правой части (3) в 6-й степени.

Совершенно аналогично доказывается, что показатель степени простого числа 7 в каноническом разложении $d_{10}(n)$, для которого $Q_{10}(n)$ целое, может, и обязан, быть меньше 3. Это следует из того, что произведение нечётных целых чисел от -9 до 9 делится на 7^2 , но не на 7^3 .

Для показателей пятёрки ситуация немного иная. Знаменатель $Q_{10}(n)$ кратен 5 при любом n . Поэтому возможных показателей пятёрки всего два: 1 и 2. Для того, чтобы показать, что числитель и знаменатель $Q_{10}(n)$ не могут одновременно делиться на 5^3 , «развернём» наше предыдущее рассуждение.

Числитель представляет собой произведение 10 последовательных чисел. Для того, чтобы он был кратен 5^3 , необходимо и достаточно, чтобы одно из этих чисел было кратно 25.

Если это одно из чисел $n, n+1, n+3, n+4, n+5, n+6, n+8, n+9$, то $2n+9$ не кратно 5, и пятёрка входит в знаменатель в первой степени. Если же 25 кратны числа $n+2$ или $n+7$, то $2n+9$ кратно 5, но не 25, и, следовательно, $d_{10}(n)$ всё равно не делится на 5^3 .

Итак, $d_{10}(n)$, для которых $Q_{10}(n)$ является целым, имеют вид $3^\alpha 5^\beta 7^\gamma$, где $\alpha \in \{0, 1, \dots, 6\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $\gamma \in \{0, 1, 2\}$. Таких чисел 42, но из них надо исключить числа 5, 15, 25, 35 и 45, которые слишком малы, чтобы быть суммами последовательных натуральных чисел. Окончательно получаем, что количество целочисленных значений $Q_{10}(n)$ равно 37.

По сути, последний пример уже содержит все составляющие для вывода формулы количества целочисленных значений $Q_k(n)$ для чётных k в общем случае. Как мы уже знаем, целочисленные значения $Q_k(n)$ получаются для знаменателей

$$d_k(n) = 2^{\alpha_0} \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i},$$

где α_0 — показатель степени двойки в каноническом разложении t , а p_i — нечётные простые числа, меньшие k , показатели степени которых ограничены

снизу их показателями в разложении t (в частности, для всех p_i , больших t , их показатели ограничены снизу нулём). Нам нужно узнать, чем показатели степени нечётных простых делителей $l_k(n)$ ограничены сверху.

Зафиксируем и обозначим через q одно из p_i , а через β — показатель степени, с которым q входит в каноническое разложение $\prod_{j=-t}^{t-1} 2j+1$. Число $2n+2t-1$ обозначим через d . Как и ранее (для $k=10$) разберём два случая.

Сначала допустим, что q не делит t . В этом случае делимость $d_k(n)$ на $q^{\beta+1}$ равносильна делимости на $q^{\beta+1}$ числа d . Однако, если это число кратно $q^{\beta+1}$ одновременно с выражением $n(n+1)\dots(n+2t-1)$, то и $(2n-d)(2n+2-d)\dots(2n+4t-2-d)$ будет кратно $q^{\beta+1}$. Но это невозможно, поскольку последнее выражение равно $\prod_{j=-t}^{t-1} (2j+1)$. (Заметим, что приведённое рассуждение, по сути, дублирует рассуждение для $k=10, n=3$.)

Пусть теперь $t \vdots q$, γ — показатель q в каноническом разложении t , а δ — максимум показателей q в разложениях нечётных чисел, не превосходящих $2t-1$. Отметим, что $\beta - \gamma \geq \delta$ (равенство достигается только при $q=t$) и $\delta \geq \beta$.

Допустим, что один из сомножителей числителя кратен $q^{\delta+1}$. Пусть это будет $n+c$, где $c \in \{0, 1, \dots, 2t-1\}$. Тогда $d = (2n+2c) + (2t-1-2c)$ содержит множитель q в степени, не большей δ , поскольку первое слагаемое кратно $q^{\delta+1}$, а второе, будучи нечётным числом в диапазоне от $-(2t-1)$ до $2t-1$, кратно q в степени, не превосходящей δ . Но тогда в $d_k(n)$ число q входит в степени, не превосходящей $\gamma + \delta$, что заведомо меньше $\beta + 1$. (А это рассуждение обобщает рассмотренный выше случай $k=10, q=5$.)

Если же ни одно из чисел в числителе не кратно $q^{\delta+1}$, а $d_k(n)$ кратно $q^{\beta+1}$, то показатель q в числителе будет равен показателю q в произведении $(2n-d)(2n+2-d)\dots(2n+4t-2-d)$, то есть β .

Итак, числитель и знаменатель $Q_k(n)$ не могут одновременно быть кратны $q^{\beta+1}$, и показатели нечётных простых делителей $d_k(n)$, в случае когда $Q_k(n)$ — целое, ограничены показателями этих делителей в каноническом разложении $\prod_{j=-t}^{t-1} (2j+1)$ или равными им показателями в каноническом разложении $(k-1)!!$.

Пусть теперь число a нечётно, не меньше $2t+1$, все простые множители a меньше k и показатель каждого q , являющегося нечётным простым множителем a , не превосходит $\beta - \gamma$ (мы придерживаемся принятых выше обозначений). Тогда значение $Q_k(\frac{a-2t+1}{2})$ будет целочисленным.

В самом деле, если показатель q в разложении a превышает δ , то, как мы знаем, он входит в числитель $Q_k(n)$ в точности с показателем β , что не меньше его показателя в $d_k(n)$, равного at . Если же показатель q не превышает δ , то он заведомо не превосходит показателя q в произведении любых k последовательных чисел. Таким образом, количество целочисленных значений функции $Q_k(n)$ для чётных k будет равно количеству описанных выше

чисел a , которое, в свою очередь, удобно выразить, используя функцию количества натуральных делителей.

Обозначим через $NQ(k)$ количество целых значений функции $Q_k(n)$ для чётных k . С учётом проведенных рассуждений мы можем выписать формулу для $NQ(k)$.

$$NQ(k) = \tau \left(\frac{((k-1)!!)^2}{\text{НОД}(((k-1)!!)^2, k)} \right) - \frac{k}{2}. \quad (4)$$

Используя формулу (4), получим $NQ(68) = 1266094409546$.

В таблице 3 приведены 16 первых значений $NQ(k)$ для чётных k . Обратим внимание на очень неравномерный рост значений $NQ(k)$.

Таблица 3

k	2	4	6	8	10	12	14	16
$NQ(k)$	0	1	3	23	37	156	371	1207
k	18	20	22	24	26	28	30	32
$NQ(k)$	2826	8738	14839	60338	80177	148702	466545	1673039

Больше значений $NQ(k)$ можно найти в [2, A370601].

Ответы к третьей задаче:

- (а) При нечётных k , не являющихся простыми.
- (b) При чётных k .
- (с) $NQ(68) = 1266094409546$.

Литература

- [1] Лецко В. А. От задачи к исследованию. СММО Пресс, СПб. 2021. 336 с.
- [2] Sloane, N. J. A. The OEIS Foundation. The on-line encyclopedia of integer sequences. url=<http://oeis.org/>. 2024

Поступила 19.11.2024

**ANALYSIS OF THE TASK
ABOUT THE FUNCTIONS
OF A POSITIVE INTEGER ARGUMENT**

V. A. Letsko

The article presents an analysis of tasks aimed at studying the functions, the definition of which includes consecutive positive integers.

Keywords: functions of positive integer argument, consecutive positive integers.