

ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО
ИССЛЕДОВАНИЯ

Задачи этого номера, предлагаемые для самостоятельного решения и исследования, посвящены избитой, но неисчерпаемой теме. В центре нашего внимания будут треугольники.

1. Каждому треугольнику сопоставим целое неотрицательное число k , если из данного треугольника можно получить k разных равнобедренных треугольников, приложив к нему (совместив по стороне) какой-то треугольник (возможно, равный исходному). Полученные таким способом равнобедренные треугольники не должны быть равны, но могут быть подобны. Найти все возможные значения k .
2. Сколько (с точностью до подобия) существует треугольников, каждый из которых может быть разрезан на два равнобедренных треугольника более чем одним способом? Рассмотрите два случая:
 - (а) способы считаются разными, если разрезающие отрезки не совпадают;
 - (б) способы считаются разными лишь в том случае, когда полученная при первом разрезании пара равнобедренных треугольников отличается от аналогичной пары, полученной при втором способе разрезания.
3. Существует ли треугольник, у которого
 - (а) сумма двух медиан равна третьей?
 - (б) сумма двух биссектрис равна третьей?
 - (с) сумма двух высот равна третьей?
 - (д) выполняются одновременно два равенства из предыдущих пунктов?
4. Пусть $a \leq b \leq c$ – стороны некоторого треугольника, а $h_a, h_b, h_c, l_a, l_b, l_c, m_a, m_b, m_c$ – соответствующие им высоты, биссектрисы и медианы. Хорошо известно, что $h_c \leq h_b \leq h_a, l_c \leq l_b \leq l_a, m_c \leq m_b \leq m_a, h_c \leq l_c \leq m_c, h_b \leq l_b \leq m_b, h_a \leq l_a \leq m_a$.
 - (а) А есть ли ещё какие-нибудь соотношения между высотами, биссектрисами и медианами, не вытекающие напрямую из перечисленных выше неравенств и справедливые для любого треугольника?
 - (б) Существуют ли разносторонние треугольники, для которых $h_a = l_b = m_c$?

Свои решения присылайте на val-etc@yandex.ru Владимиру Лецко.