ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 517.925

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАДАННЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ М. В. ДОЛОВЫМ

Е. В. Круглов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия

kruglov19@mail.ru

Рассматриваются результаты М. В. Долова (1934 – 2016), касающиеся алгебраических дифференциальных уравнений с интегралами Дарбу и интегралами типа Дарбу. К 90-летию со дня рождения.

Ключевые слова: алгебраические дифференциальные уравнения, канонические интегралы, интегралы Дарбу, центр, фокус, предельный цикл, М. В. Долов

1. Введение

Михаил Васильевич Долов родился 5 ноября 1934 года, в 2024 году ему бы исполнилось 90 лет. Закончив в 1962 году механико-математический факультет Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, он проработал на мехмате ГГУ – ННГУ более 50 лет, защитил кандидатскую и докторскую диссертации, заведовал двумя кафедрами, у него защитились девять аспирантов. Уволившись в 2014 году, продолжал активную научную деятельность фактически до смерти 11 января 2016 года. Биография и библиография М. В. Долова представлены в публикациях [1] и [2].

Главным результатом научной деятельности М. В. Долова является развитая им теория канонических интегралов двумерных автономных систем дифференциальных уравнений — многозначных первых интегралов, ветвящихся при полном обходе предельного или особого цикла с приобретением постоянного множителя. Понятие канонического первого интеграла введено в работе [3]. Оказалось, что наличие или отсутствие у системы канонического интеграла, а также его вид тесным образом связаны со свойствами системы.

Теория получила обширную реализацию на примере известных с девятнадцатого века алгебраических систем с интегралами Дарбу и интегралами типа Дарбу и их обобщений. Используя теорию канонических интегралов в приложении к упомянутым системам, М. В. Долов (единолично или с учениками) получил интересные результаты, в том числе общего характера, касающиеся качественных и аналитических свойств двумерных динамических систем с непрерывным временем на плоскости и цилиндре.

2. Системы, интегрируемые по Дарбу

В середине двадцатого века Н. П. Еругиным [5] была поставлена задача о выделении множества двумерных систем с заданным программным движением. Эта задача послужила толчком к обширным исследованиям систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую специального вида или обладающих специальным аналитическим свойством. При этом значительное внимание уделялось изучению важного класса полиномиальных векторных полей, допускающих те или иные инвариантные алгебраические кривые.

В 1878 году Гастон Дарбу [4] показал, что если у системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \tag{1}$$

где P и Q взаимно простые полиномы комплексных переменных x и y, $\max(\deg P, \deg Q) = n$, существует определённое число алгебраических инвариантных кривых, то система имеет первый интеграл (либо интегрирующий множитель) специального вида, то есть первый интеграл или интегрирующий множитель Дарбу.

По определению, система (1) алгебраически интегрируема, если она имеет первый интеграл $\dfrac{P_1(x,y)}{P_2(x,y)}$, где P_1, P_2 полиномы над полем комплексных чисел. Заметим, что вещественная система (1), имеющая предельный цикл или состояние равновесия типа фокус, алгебраически не интегрируема, так как у этой системы есть инвариантные неалгебраические кривые — спирали. Однако эта система может быть интегрируема по Дарбу.

По определению, система (1) интегрируема по Дарбу, если (1) допускает первый интеграл

$$\Gamma(x,y) \equiv \Phi_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \Phi_k^{\beta_k} = C, \tag{2}$$

называемый первым интегралом Дарбу, где $\Phi_j^{\beta_j} = \Phi_j^{\beta_j}(x,y)$, $j = \overline{1,k}$, попарно взаимно простые полиномы, неприводимые над полем комплексных чисел, величины $\beta_j \neq 0$ в общем случае комплексные числа.

Тот факт, что система (1) является интегрируемой по Дарбу, в дальнейшем мы будем обозначать $(1) \in E_a$.

Заметим, что интегрирующий множитель Дарбу по структуре совпадает с правой частью выражения (2). Будем говорить, что если система (1) имеет интегрирующий множитель Дарбу, то она принадлежит классу M_a.

Первые интегралы Дарбу (2) эффективно использовались К. С. Сибирским [6] и его учениками при решении локальной задачи различения центра и фокуса в случае чисто мнимых корней характеристического уравнения, соответствующего состоянию покоя (x_0, y_0).

В 1972 году Сибирский сформулировал гипотезу о всюду плотности множества E_a во множестве вещественных систем (1) с простым состоянием покоя центр [7].

В связи с этой гипотезой и построением контрпримера к ней [8] М. В. Доловым изучено влияние топологических и аналитических свойств инвариантных кривых системы (1) на интегрируемость по Дарбу.

Отметим некоторые свойства систем (1) из E_a.

1. Система (1) из E_a имеет интегрирующий множитель $\mu = \frac{N}{\Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \ldots \cdot \Phi_k}$, где полином N не делится на $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ ([8], [9]).
2. Если система (1) имеет два первых интеграла Дарбу $\Gamma = C$ и $\Gamma_1 = C_1$ таких, что хотя бы один полином, содержащийся в аналитическом выражении Γ, не входит в Γ_1, то система алгебраически интегрируема [9].
3. Если вещественная система (1) из E_a имеет предельный цикл ℓ, то:
a) ℓ является овалом вещественной алгебраической кривой, при этом полином, определяющий цикл ℓ, входит в аналитическое выражение $\Gamma(x, y)$;
b) цикл ℓ гиперболический;
c) при $\beta_1 = 1$ и $\ell \in \{(x, y) : \Phi_1 = 0\}$ функция
$$\Gamma(x, y) = \Phi_1 \cdot \Phi_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot \Phi_m^{a_m} \cdot \Phi_{m+1}^{\beta_{m+1}} \cdot \overline{\Phi_{m+1}^{\beta_{m+1}}} \cdot \ldots \cdot \Phi_{m+\nu}^{\beta_{m+\nu}} \cdot \overline{\Phi_{m+\nu}^{\beta_{m+\nu}}}, \quad (3)$$
где $\mathrm{Im}\Phi_1 \equiv \mathrm{Im}\Phi_2 \equiv \ldots \equiv \mathrm{Im}\Phi_m \equiv 0$, $\mathrm{Im}a_2 = \ldots = \mathrm{Im}a_m = 0$, $\mathrm{Im}\Phi_{m+j}$ тождественно не равно нулю и $\mathrm{Im}\beta_{m+j} \neq 0$ для $j = \overline{1, \nu}$ хотя бы для одного j, $m \geqslant 1$, $\nu \geqslant 1$, при этом функция $\Gamma(x, y)$ многозначна в окрестности $S(\ell, \varepsilon)$ цикла ℓ [10].
4. Система (1) из E_a не имеет состояний покоя с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения типа фокус [11].
5. Пусть (1) из E_a — алгебраически не интегрируемая система и полиномы $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ содержатся в качестве множителей в выражении (2) для первого интеграла Дарбу. Тогда если система (1) помимо $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_k = 0$ имеет другие инвариантные алгебраические кривые $\Phi_{k+1} = 0, \ldots, \Phi_s = 0$, то $s - k \leqslant n - 1$ и $\deg(\Phi_{k+1} \ldots \Phi_s) \leqslant n - 1$ [12].
6. Свойства 1 и 2 позволили получить следующую оценку. Если система (1) из E_a алгебраически не интегрируема, то существует единственная

(с точностью до обозначений) совокупность различных нераспадающихся алгебраических инвариантных кривых $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_k = 0$, где $k \leqslant \frac{n^2+n+2}{2}$, таких, что (2) является первым интегралом системы (1), причём всякий первый интерал Дарбу для (1) имеет вид $G(x, y) = K(\Gamma(x, y))^{\alpha}$. Здесь $K \equiv const$, $\alpha \in \mathbb{C}$ [9]. Заметим, что равенство $S = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ для $n = 2$ и $n = 3$ доказано с использованием систем (1), допускающих только линейные частные интегралы [13].

7. При изменении в [2] коэффициентов полиномов Φ_j и величин β_j в множестве систем из E_a невозможно слияние предельных циклов кратности 1 в цикл кратности более, чем 1. При изменении в [2] коэффициентов полиномов Φ_j и величин β_j в множестве систем из E_a невозможно стягивание циклов в состояние покоя с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения [10], [11].
8. Если вещественная система (1) из E_a допускает особый предельный цикл — петлю сепаратрисы L простого седла A, то (с точностью до обозначений) $L \subset \{(x, y) : \Phi_1 = 0\}$, $\mathrm{Im}\Phi_1 \equiv 0$; если $\beta_1 = 1$, то функция $\Gamma(x, y)$ имеет вид (3), при этом первый интеграл $\Gamma(x, y) = C$ многозначен в одной из полуокрестностей петли L, $P'_x(A) + Q'_y(A) = 0$ и $h(L) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (P'_x + Q'_y)|_L dt \neq 0$ [14].
9. Если сепаратрисы простого седла A не являются алгебраическими кривыми и $P'_x(A) + Q'_y(A) \neq 0$, то система (1) не интегрируема по Дарбу [14].

Свойство 3 существенно используется при оценке сверху числа S попарно различных неприводимых алгебраических кривых, содержащих предельные циклы вещественной системы (1).

В работе [15] доказано, что $S \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$, при этом для системы из E_a:

1) число $S \leqslant \frac{n(n+1)}{2} - 1$;
2) все полиномы $\Phi_j(x, y)$, $\mathrm{Im}\Phi_j(x, y) \equiv 0$, $j = \overline{1, S}$, определяющие циклы, входят в аналитическое выражение (2);
3) у системы (1) нет других предельных циклов, отличных от овалов кривых $\Phi_j(x, y) = 0$;
4) характеристический показатель любого цикла отличен от нуля;
5) при $S = \frac{n(n+1)}{2}$ система (1) не интегрируема по Дарбу, не имеет других предельных циклов, кроме алгебраических $\Phi_j(x, y) = 0$, $\mathrm{Im}\Phi_j(x, y) \equiv 0$, $j = \overline{1, S}$ и (1) допускает вещественный интегрирующий множитель $\mu = \Phi_1^{-b_1} \ldots \Phi_S^{-b_S}$, где величина b_j равна порядку кратности предельного цикла, определяемого уравнением $\Phi_j(x, y) = 0$.

Важным частным случаем являются системы (1), порождённые первым интегралом Дарбу. Для таких систем в свойстве 1 $N \equiv const \neq 0$.

В работе Долова [16] получены результаты, касающиеся необходимых условий существования предельных циклов и структуры правых частей системы (1) при наличии предельных циклов. При этом не делалось никаких ограничений как на степени полиномов, входящих в первый интеграл Дарбу, так и на количество сомножителей и на степени правых частей системы (1).

Реализации некоторых результатов М. В. Долова в заданном классе систем посвящена кандидатская диссертация Т. В. Лухмановой [17], в которой найдены необходимые и достаточные условия существования предельного цикла системы (1) при $n = 3$ с двумя комплексно сопряжёнными линейными частными интегралами.

Эти результаты позволили Лухмановой дать новое решение проблемы Еругина ([18], с. 402) о существовании алгебраических дифференциальных уравнений, имеющих изолированные периодические движения в случае, когда хотя бы одна особая точка является центром в смысле Пуанкаре: в диссертации при $n = 3$ построен пример системы (1), порождённой первым интегралом Дарбу, имеющей предельным циклом окружность, которая охватывает два центра, два седла и фокус.

Существование при $n = 3$ систем (1) с центром и предельными циклами, не являющимися овалами алгебраических кривых, доказано Доловым в статье [34] методами теории бифуркаций.

3. Полиномиальные дифференциальные системы, имеющие первым интегралом дарбуксиан

В работе М. В. Долова [20] изучаются системы (1) из множества E_d. По определению, система (1)$\in E_d$, если (1) допускает первый интеграл

$$G(x, y) \equiv \Gamma(x, y) \exp(W_1^{n_1} ... W_n^{n_m}) = C, \tag{4}$$

где $\Gamma(x, y)$ — функция (2), W_j, $j = \overline{1, n}$, — полиномы переменных x, y в общем случае с комплексными коэффициентами, $n_1, ..., n_m$ — комплексные числа, так, что если функции $\Gamma(x, y)$, $U = W_1^{n_1} ... W_n^{n_m}$ не равны тождественно постоянной, то между $\Gamma(x, y)$ и $U(x, y)$ нет функциональной зависимости.

Заметим, что в терминологии Ллибре, Пантаци [21] функция вида (4) называется дарбуксианом.

В работе [20] доказаны следующие факты.

- Если система (1) $\in E_d$, то в (4) числа $n_1, ..., n_m$ целые и U – рациональная функция.
- Предельными циклами вещественной системы (1) из E_d могут быть только овалы вещественных алгебраических кривых, при этом полиномы, определяющие циклы, входят в аналитическое выражение (4).
- В отличие от систем (1) из множества E_a, циклы системы (1) из E_d могут иметь порядок кратности более 1.

– Вещественные системы (1) из E_d могут иметь состояния покоя типа фокус с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения.
– Получены необходимые и достаточные условия, позволяющие по виду дарбуксиана (4) решить вопрос о порядке кратности фокуса и предельного цикла.

В статье [22] доказано, что система (1) из E_d имеет интегрирующий множитель в классе рациональных функций и указана его аналитическая структура.

4. Бифуркации предельных циклов

Бифуркации предельных циклов систем вида (1), порождённых первым интегралом Дарбу при изменении коэффициентов полиномов $\Phi_j(x, y)$ и β_j, М. В. Доловым и его учениками изучались в работах [23], [24], [25], [26], [27].

В [24] доказано, что если предельные циклы ℓ_1, ℓ_2 системы (1), порождённой интегралом Дарбу, сливаются в предельный континуум ℓ системы (1) из E_a, то все точки ℓ являются состояниями покоя для (1).

Наряду с этим установлено, что если при некоторых значениях коэффициентов правых частей системы (1) из E_a предельный цикл стягивается в состояние покоя A, то оба корня характеристического уравнения, соответствующего A, равны нулю.

В неопубликованной рукописи М. В. Долова в качестве примера к этому утверждению рассматривается система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (r-1)(r-1-a)x + 2r(r(k+1)-1-k-a)y \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -2r(r(k+1)-1-k-a)x + (r-1)(r-1-a)y \equiv Q(x, y), \end{aligned} \tag{5}$$

где $r = x^2 + y^2$, $a, k \in \mathbb{R}$, имеющая первый интеграл Дарбу

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1 - a)^k (x + iy)^{-\frac{i}{2}} (x - iy)^{\frac{i}{2}} = C.$$

При $ak \neq 0$ у системы (5) имеется лишь одно состояние покоя $(0, 0)$, так как точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = \varrho$, где ϱ — любое неотрицательное число, с изоклинами $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$ совпадают с точками пересечения окружности $x^2+y^2 = \varrho$ с прямыми $y = \alpha(\varrho, a, k)$ и $y = -\frac{1}{\alpha(\varrho,a,k)}x$, где $\alpha = (\varrho - 1)(\varrho - 1 - a)(2\varrho(1 + a + k - \varrho(k + 1))$.

При $a = 0$, $k \neq 0$ наряду с $(0, 0)$ все точки окружности $x^2+y^2 = 1$ являются состояниями покоя для системы (5); при $k = 0$, $a \neq 0$ наряду с $(0, 0)$ все точки окружности $x^2 + y^2 = 1 + a$ являются состояниями покоя для системы (5).

Система (5) при $ak \neq 0$, $a + 1 > 0$ имеет два изолированных периодических решения $\ell_1 = \{(x, y) : x = \cos 2at, y = \sin 2at\}$, $\ell_2 = \{(x, y) : x = = \sqrt{1 + a}\cos 2ak(1 + a)t, y = -\sqrt{1 + a}\sin 2ak(1 + a)t\}$.

При $a = 0$ окружность $x^2 + y^2 = 1 + a$ влипает в окружность $x^2 + y^2 = 1$, все точки которой будут состояниями покоя системы (5).

При $a = -1$, $k \neq 0$ цикл ℓ_2 стягивается в состояние покоя $(0, 0)$ с нулевыми корнями характеристического уравнения, при этом полиномы P и Q имеют общий делитель $x^2 + y^2$.

В работах [24], [25], [26], [27] значительное место занимают исследования бифуркаций рождения предельных циклов из кратного фокуса, кратного предельного цикла и петли сепаратрисы простого седла для системы (1) из множества $\partial E_a \cap E_d$ (здесь ∂E_a — граница множества E_a).

5. О системах, не принадлежащих классу $E_a \cup E_d$

В работах [8], [28] указаны достаточные условия того, когда система (1) не является точкой множества $E_a \cup E_d$.

По определению, характеристические числа λ_1, λ_2 принадлежат области Пуанкаре, если $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ и $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ отличны от целых положительных чисел и $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ не является отрицательным числом.

По теореме Пуанкаре через простое состояние покоя $A(x_0, y_0)$ системы (1) с аналитическими правыми частями $P(x, y)$, $Q(x, y)$, для которого корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения, соответствующего A, принадлежат области Пуанкаре, проходят две различные аналитические инвариантные кривые $u(x, y) = 0$, $v(x, y) = 0$ такие, что

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}_{|x=x_0, y=y_0} \neq 0. \tag{6}$$

Согласно [8] и [28], имеет место следующее утверждение: если вещественная система (1) имеет узел $A(x_0, y_0)$, корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения для которого принадлежат области Пуанкаре, и при этом ветви $y = y(x)$, $y(x_0) = y_0$, $u(x, y(x)) \equiv 0$, $x = x(y)$, $x(y_0) = x_0$, $v(x(y), y) \equiv 0$ инвариантных аналитических кривых $u(x, y) = 0$, $v(x, y) = 0$, удовлетворяющих условию (6), неалгебраические, то система (1) не имеет интегрирующего множителя в классе рациональных функций.

Ветви $y = y(x)$, $y(x_0) = y_0$, $u(x, y(x)) \equiv 0$, $x = x(y)$, $x(y_0) = x_0$, $v(x(y), y) \equiv 0$ инвариантных аналитических кривых $u(x, y) = 0$, $v(x, y) = 0$, удовлетворяющих условию (6), трансцендентные (неалгебраические), если узел $A(x_0, y_0)$, для которого λ_1, λ_2 из области Пуанкаре окружён предельным циклом ℓ таким, что в области B, $\partial B = \ell$, у вещественной системы (1) нет других состояний покоя (отличных от A).

Существование систем (1), удовлетворяющих всем наложенным выше ограничениям, доказано в [8].

6. О степени алгебраической инвариантной кривой

Между степенью m алгебраического неприводимого частного интеграла и степенью n полиномиального векторного поля нет связи. В этом убеждает пример системы $\dot{x} = x$, $\dot{y} = my$. Анри Пуанкаре в 1891 году сформулировал проблему: для фиксированной степени $n \geqslant 2$ доказать существование верхней границы $N(n)$ степеней неприводимых алгебраических частных интегралов для всех алгебраических неинтерируемых систем (1), у которых $\max(\deg P, \deg Q) = n$.

В работе [29] Кристофер и Ллибре доказали, что в общем случае $N(n)$ не существует.

В связи с этим следует отметить, что в работе Т. А. Дружковой [30] с помощью системы $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = x^n + (mx + 1)y$ доказан следующий факт: каковы бы ни были натуральные числа m и n, $m > n \geqslant 2$, существуют алгебраические системы (1), имеющие лишь конечное число неприводимых алгебраических кривых степени m.

Однако до сих пор остаётся вопрос о том, существует ли предел для степени неприводимой алгебраической кривой, содержащей предельный цикл системы (1), определяющей векторное поле степени n. Поэтому доказательство трансцендентности предельного цикла является очень трудной задачей.

Так, только в 1995 году в работе Одани [31] доказана трансцендентность предельного цикла уравнения Ван дер Поля.

Проблеме инвариантных алгебраических кривых и алгебраических предельных циклов полиномиальных систем Льенара произвольной степени посвящена работа Золадека [32].

Гарсиа в статье [33] предложил способ построения инвариантных алгебраических кривых любой степени для полиномиальных векторных полей. Этот метод позволил автору доказать более кратко по сравнению с Одани трансцендентность предельных циклов как уравнения Ван дер Поля, так и системы из работы Долова [34].

Однако неалгебраичность предельных циклов была доказана М. В. Доловым за 20 лет до статьи Гарсиа в работе [35]. Этому вопросу также посвящена статья Долова [36].

7. О степени алгебраической кривой, содержащей предельные циклы

В статье [37] Винкель сформулировал гипотезу о том, что для данной алгебраической кривой $f = 0$ степени $m \geqslant 4$ не существует полиномиального векторного поля степени менее, чем $2m - 1$, допускающего инвариантную кривую $f = 0$ и имеющего предельными циклами только овалы кривой $f = 0$. В этой связи следует отметить статью А. И. Яблонского [38], в которой доказано существование квадратичных векторных полей с предельным циклом в виде овала кривой четвёртого порядка.

В работе Н. Н. Баутина [39] указано полиномиальное векторное поле степени n, для которого только овалы алгебраической M-кривой степени n будут предельными циклами. При доказательстве основного результата Баутин воспользовался, вообще говоря, неверным утверждением «...овалы будут предельными циклами, если ни одно из состояний равновесия не будет центром».

Это утверждение опровергается контрпримером системы, не имеющей состояний равновесия типа центр, при этом имеющей в качестве инвариантной кривой окружность, все близкие траектории к которой замкнуты [40].

Кроме того, в [39] Баутиным не доказано отсутствие других предельных циклов, отличных от овалов заданной M-кривой.

Проблемы доказательства Баутина устранены в статье М. В. Долова и Р. В. Кузьмина [41]. Более простое доказательство отсутствия других изолированных периодических орбит в система Баутина содержится в статье Долова и Кузьмина [42]. По этому поводу см. также статью Долова [43].

Существование полиномиальных векторных полей степени n, имеющих предельными циклами только овалы алгебраических кривых степени n, доказано позднее в роботе Кристофера [44].

В работе Долова [15] доказано, что система

$$\dot{x} - (x-\alpha)H'_y, \;\; \dot{y} = -(x-\alpha)H'_x + yH, \tag{7}$$

где вещественный параметр α такой, что прямая $x = \alpha$ не пересекается с овалами кривой $H = 0$ степени m, не имеет других предельных циклов, кроме овалов $H = 0$.

В диссертации [45] аспирантки М. В. Долова Ю. В. Кондратьевой (Павлюк) выделен класс полиномиальных векторных полей степени n, допускающих первый интеграл Дарбу (2), где $k = 3$, $\Phi_2 \equiv \overline{\Phi_3}$, $\mathrm{Im}\Phi_1 \equiv 0$, $\Phi_2 \not\equiv 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 \neq 0$, $\deg \Phi_1 = n - 1$, $\deg \Phi_2 = 1$, кривая $\Phi_1 = 0$ имеет овалы, при этом точка пересечения $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ лежит внутри овала кривой $\Phi_1 = 0$ и функция (2) многозначна в окрестности овала $\Phi_1 = 0$. У такого векторного поля нет других предельных циклов, отличных от овалов кривой $\Phi_1 = 0$.

Частный случай $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \frac{i}{2}$ рассмотрен в [46].

Контрпример к гипотезе Винкеля содержится также в [47].

8. О числе и степени M-кривых, определяющих предельные циклы

По определению, M-кривой степени m называется алгебраическая кривая с максимальным числом овалов.

В 1876 году была доказана теорема Гарнака о том, что максимальное число овалов плоской алгебраической кривой степени m равно $\frac{m^2-3m+3+(-1)^m)}{2}$.

В работе [46] изучаются системы (1), допускающие хотя бы две алгебраические инвариантные кривые одной степени. Доказано, что если предельными циклами системы (1) являются все овалы двух M-кривых $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 0$, $\deg\Phi_1 = \deg\Phi_2 = m$, то

– либо при $m = n - 1$ полином Φ_2 тождественно не равен полиному $\Phi_1 + \alpha$, $\alpha \equiv const \neq 0$,

– либо при $m < n - 1$ $\Phi_2 \equiv \Phi_1 + \alpha$, $\alpha \equiv const \neq 0$.

В работе Н. Садовской, Р. Рамиреса [48] утверждается, что для полиномиального плоского векторного поля степени $n \geqslant 3$ с S, $S \geqslant 2$, инвариантными несингулярными алгебраическими кривыми, максимальное число алгебраических предельных циклов есть $n - 1$.

В статье [46] приведены два контрпримера к этому утверждению.

Одним из контрпримеров является система (7), где $H = 0$ является M-кривой степени m.

Кроме того, в [46] рассмотрены M-кривые при $m = 2$ и доказано, что максимальное число предельных циклов, допускаемых вещественной системой (1) в виде окружностей, центры которых лежат на одной прямой, равно $n-1$, при этом в семейство концентрических кривых с одним центром входит не более $\frac{n-1}{2}$ окружностей при нечётном n и не более $\frac{n}{2}$ при чётном n.

Наряду с этим указаны достаточные условия, когда центры окружностей, являющиеся предельными циклами, принадлежат одной прямой. При наличии среди фазовых кривых векторного поля максимального количества предельных циклов в виде окружностей с центрами на одной прямой устанавливается отсутствие других предельных циклов в виде окружностей.

В работе Долова, Павлюк [49] при $n = 4$ исследуется вопрос существования систем (1) с тремя предельными циклами в виде окружностей, имеющих различные центры, лежащие на одной прямой. Здесь построен контрпример к утверждению из [48] о том, что если система (1) при чётном n имеет $A(n) \geqslant \frac{n+2}{2}$ инвариантных непересекающихся окружностей $(x - a_j)^2 + y^2 = r_j^2$, $j = 1, 2, ..., A(n)$, где хотя бы три величины a_j попарно различны, то эти окружности не могут быть предельными циклами системы (1).

В статье М. В. Долова, С. А. Чистяковой [50] с точностью до линейной обратимой замены найдены необходимые и достаточные коэффициентные условия, когда при $n = 4$ три окружности, две из которых имеют общий центр, будут изолированными замкнутыми траекториями системы (1).

9. Полиномиальные векторные поля с линейными частными интегралами

В статье А. С. Шубэ [51] доказано, что система (1) имеет либо первый интеграл Дарбу, либо интегрирующий множитель Дарбу, содержащий только линейные полиномы $\Phi_j = a_j x + b_j y + c_j$, если выполнены следующие условия:

1) при $n \geqslant 3$ для системы (1) точка (x_0, y_0) — состояние покоя с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения;
2) первая фокусная величина g_3, соответствующая (x_0, y_0), равна нулю;
3) система (1) имеет $N = \frac{n^2+n-4}{2}$ частных линейных интегралов $\Phi_j = a_j x + b_j y + c_j$, $\Phi_j(x_0, y_0) \neq 0$, $j = \overline{1, n}$.

Заметим, что в формулировке теоремы в [51] отсутствует условие $\Phi_j(x_0, y_0) \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, при этом возможность $\Phi_j(x_0, y_0) = 0$ не исследуется. Однако пример системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ показывает, что центр в смысле Пуанкаре принадлежит инвариантным множествам $x \pm iy = 0$.

В работе Долова, Павлюк [52] доказывается, что если вещественная система (1) удовлетворяет условиям 1) и 2) и при этом допускает $N = \frac{n^2+n-2}{2}$ линейных частных интегралов $\Phi_j(x, y) = 0$, среди которых хотя бы один полином обращается в нуль при $x = x_0$, $y = y_0$, то:

1) система (1) имеет интегрирующий множитель Дарбу ((1)$\in M_a$);
2) (x_0, y_0) — центр в смысле Пуанкаре, если (1) $\in E_a$, либо (1)$\in M_a \setminus E_a$, причём интегрирующий множитель аналитический в (x_0, y_0);
3) система (1)$\in E_a$ не имеет предельных циклов.

Наряду с этим для $n = 3$ доказана интегрируемость по Дарбу кубической системы (1) при условиях 1) и 2) и наличии четырёх линейных интегралов, хотя бы один из которых равен нулю при $x = x_0$, $y = y_0$. В этом случае (x_0, y_0) — центр в смысле Пуанкаре, и у системы (1) нет предельных циклов.

В работе Р. А. Любимовой [55] изучается вопрос о максимальном числе вещественных линейных частных интегралов вещественной системы (1) при $n = 3$. Утверждатся, что таким числом является восемь; при этом случай вырожденности системы на бесконечности не исследован.

Согласно результатам Долова, Павлюк и Чистяковой [53], [54], максимальное число различных (в том числе комплексных) линейных частных интегралов системы (1) при $n = 3$ равно восьми. При этом в случае, когда система (1) вырождена на бесконечности, т. е. когда $xQ_n(x, y) \equiv yP_n(x, y)$, где P_n и Q_n однородные полиномы степени n, содержащиеся в P и Q соответственно, для $n = 3$ система (1) может иметь не более шести различных линейных частных интегралов.

В работах Долова, Чистяковой [56], [57], [58] доказано, что полиномиальное векторное поле четвёртой степени с вырожденной бесконечностью имеет не более 9 линейных частных интегралов, в том числе и с комплексными коэффициентами.

В работах М. В. Долова, Е. В. Круглова [59], [60] для $n \geqslant 2$ опубликована точная оценка числа линейных частных интегралов системы (1), найдены оценка числа линейных интегралов в случае, когда инвариантные множества, соответствующие линейным интегралам, не имеют общих точек, а также оценка числа линейных интегралов в случае, когда они имеют общую особую точку. Заметим, что эти результаты получены независимо от результатов работы [61] и имеют более простое и очевидное доказательство.

В 2014 году М. В. Долов передал автору черновики обзора «Алгебраические дифференциальные уравнения с заданными частными интегралами». Эти материалы существенно использовались при подготовке данной статьи.

Литература

[1] Авдонин Н. И., Алексеев А. А., Круглов Е. В. 70 лет Михаилу Васильевичу Долову // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия Математика. 2005. Вып. 1(3). С. 172–178.

[2] Михаил Васильевич Долов. Некролог / Н. И. Авдонин, Е. И. Гордон, Г. М. Ерахтина, Л. С. Ефремова, Е. В. Круглов, М. И. Кузнецов, Л. М. Лерман, М. И. Малкин, Е. Н. Махрова, А. Д. Морозов, Г. М. Полотовский, В. И. Сумин, М. И. Сумин, А. М. Терентьев // Математика в высшем образовании. 2016. №14. С. 47–50.

[3] Долов М. В. Предельные циклы и аналитические интегралы // Дифференциальные уравнения. 1968. Т.5, №11. С. 2026–2033.

[4] Darboux G. Mémoire sue les équations differentielles algébriques du premier ordre et du premier degré // Bull.des.Sc.math. 1878. Vol. 2. Issue 2. 60–96, 123–144, 151–200.

[5] Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. 1952. Т. 16. В. 6. С. 659–670. 755 с.

[6] Сибирский К. С. Метод инвариантов в качественной теории дифференциальных уравнений. — Кишинёв: РИО АН МССР, 1968. — 184 с.

[7] Сибирский К. С. Проблема алгебраического интеграла в случае центра // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 12. С. 2211–2214.

[8] Долов М. В. Предельные циклы и интегралы Дарбу в случае узла // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 3. С. 406–415.

[9] Долов М. В. О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиального векторного поля // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 838–839.

[10] Долов М. В. Предельные циклы и алгебраические интегралы в случае центра // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 11. С. 1935–1941.

[11] Долов М. В. Интегралы Дарбу в случае фокуса // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 7. С. 1173–1178.

[12] Долов М. В., Косарев В. В. Интегралы Дарбу и аналитическая структура решений дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 4. С. 697–700.

[13] Долов М. В., Бубнова И. В. Система с линейными частными интегралами // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2006. № 11. С. 79–80.

[14] Долов М. В. Интегралы Дарбу и особые циклы // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвузовский сборник. 1985. Горький: ГГУ. С. 5–8.

[15] Долов М. В. Об алгебраических предельных циклах полиномиальных векторных полей на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1155–1160.

[16] Долов М. В. О дифференциальных уравнениях, порождённых интегралом Дарбу // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвузовский сборник. 1990. С. 31–37.

[17] Лухманова Т. В. Динамически предельные множества кубических систем дифференциальных уравнений, порождённых интегралом Дарбу. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Нижний Новгород, 1999. 141 с.

[18] Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1970.

[19] Долов М. В. О предельных циклах в случае центра // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. № 9. С. 1691–1692.

[20] Долов М. В. О дифференциальных уравнениях, имеющих интегралы Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 10. С. 1765–1774.

[21] Llibre J., Pantazi C. Polynomial differential systems having a given Darbouxian first integral // Bull. Sci. math. 2004. 128(9). P. 775–788.

[22] Долов М. В., Чистякова С. А. О предельных циклах полиномиальных векторных полей с интегрирующим множителем Дарбу // Вестник ННГУ. Математика. 2005. 1(3). С. 11–24.

[23] Долов М. В. К вопросу о бифуркациях предельных циклов // Учёные записки ГГУ. 1973. В. 188. С. 13–15.

[24] Долов М. В., Косарев В. В. О бифуркациях предельных циклов уравнений, допускающих интегралы типа Дарбу // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвузовский сборник. 1981. В. 5. Горький: ГГУ. С. 3–8.

[25] Долов М. В., Косарев В. В. Интегралы Дарбу и рождение предельных циклов из кратного фокуса // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвузовский сборник. 1982. В.6. Горький: ГГУ. С. 10–14.

[26] Долов М. В., Косарев В. В., Лисин Б. В. Интегралы Дарбу и бифуркации особых циклов // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвузовский сборник. 1982. В. 6. Горький: ГГУ. С. 15–20.

[27] Долов М. В. О бифуркациях предельных циклов алгебраических дифференциальных уравнений с интегралами типа Дарбу // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвузовский сборник. 1988. Горький: ГГУ. С. 4–11.

[28] Долов М. В. Интегрирующий множитель в окрестности узла // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 158–160.

[29] Christopher C., Llibre J. A family of quadratic polynomial polynomial systems with invariant algebraic curves of arbitrarily high degree without rational first integrals // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. P. 2025–2030.

[30] Дружкова Т. А. О порядке алгебраической интегральной кривой дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. В. 7. С. 1338.

[31] Odani K. The limit cycle of the Van der Pol equation is not algebraic // J. Differential Equations. 1995. 115. P. 146–152.

[32] Zodalec H. Algebraic invariant curves for the Lienard equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350. P. 1681–1701.

[33] Garcia I.A. Transcendental limit cycles via the structure of arbitrary degree invariant algebraic curves of polynomial planar vector fields // Rocky Mount. I. Math. 2005. V. 35(2). P. 501–515.

[34] Долов М. В. О предельных циклах в случае центра // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. № 8. С. 1691–1692.

[35] Долов М. В. Уравнения с трансцендентными предельными циклами в случае центра // Учёные записки ГГУ. Качественная теория дифференциальных уравнений. 1975. В. 2. С. 11–22.

[36] Долов М. В. Трансцендентность предельного цикла одного дифференциального уравнения // Методы сравнения и методы Ляпунова: Межвузовский сборник. 1990. Саранск, МГУ. С. 31–36.

[37] Winkel R. A transfer principle in the real plane from nonsingular algebraic curves l_0 polynomial vector fields // Geometrial Dedicata. 2000. V. 79(1). P. 101–108.

[38] Яблонский А. И. О предельных циклах одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. № 3. С. 335–344.

[39] Баутин Н. Н. Оценка числа алгебраических предельных циклов системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ с алгебраическими правыми частями // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 2. С. 362.

[40] Долов М. В. О периодическом кольце и особой точке типа центр // Вестник ННГУ. Сер. Математика. 2006. Вып. 1(4). С. 15–16.

[41] Долов М. В., Кузьмин Р. В. О предельных циклах одного класса систем // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 9. С. 1481–1485.

[42] Долов М. В., Кузьмин Р. В. О предельных циклах систем с заданным частным интегралом // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 7. С. 1125–1132.

[43] Долов М. В. Теорема Баутина о числе алгебраических предельных циклов полиномиальных векторных полей // Вестник ННГУ. 2014. 4(3). С. 259–262.

[44] Christopher C. Polynomial vector fields with prescribed algebraic limit cycles // Geometriae Dedicata/ 2001. 88. P. 255—258.

[45] Кондратьва Ю. В. Двумерные полиномиальные динамические системы с алгебраическими инвариантными множествами. Автореф. дисс. к.ф.-м.н. Н. Новгород, 2007. 17 с.

[46] Долов М. В., Павлюк Ю. В. Инвариантные алгебраические кривые полиномиальных динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39 № 8. С. 1038–1043.

[47] Llibre J., Pantazi C. Counterexample to a Conjecture on the Algebraic Limit Cycles of Polynomial Vector Fields // Geometriae Dedicata. 2005. V. 110 P. 213–219.

[48] Sadovckaia N., Ramirez R. On 16th Gilbert problem // Тез. докл. межд. конф. по диффер. ур-ям и динам. системам. Суздаль, август 21–26. Владимир, 2000. С. 69–72.

[49] Долов М. В., Павлюк Ю. В. О предельных циклах эллиптического типа двумерных автономных систем // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 10. С. 1303–1309.

[50] Долов М. В., Чистякова С. А. О предельных циклах динамических систем с нелинейностями четвертого порядка и инвариантными кривыми эллиптического типа // Труды СВМО. 2009. Т. 11. № 1. С. 10–18.

[51] Шубэ А. С. Линейные частные интегралы и проблема центра // Известия АНРМ: Математика. 1993. № 1(11). С. 91–95.

[52] Долов М. В., Павлюк Ю. В. Линейные частные интегралы и интегрируемость по Дарбу // Труды СВМО. 2006. Т. 8. № 1. С. 69–81.

[53] Долов М. В., Павлюк Ю. В. К вопросу об алгебраической интегрируемости полиномиальных векторных полей // Труды СВМО. 2004. Т. 6. № 1. С. 40–50.

[54] Долов М. В., Чистякова С. А. О числе линейных частных интегралов кубической системы дифференциальных уравнений с вырожденной бесконечностью // Труды СВМО. 2007. Т. 9. № 2. С. 62–74.

[55] Любимова Р. А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвузовский сборник. Горький: ГГУ, 1977. С. 19–22.

[56] Долов М. В., Чистякова С. А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвёртой степени с вырожденной бесконечностью. I // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2010. № 6. С. 132–137.

[57] Долов М. В., Чистякова С. А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвёртой степени с вырожденной бесконечностью. II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 1. С. 139–148.

[58] Долов М. В., Чистякова С. А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвёртой степени с вырожденной бесконечностью. II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 2(1). С. 123–129.

[59] Долов М. В., Круглов Е. В. О числе линейных частных интегралов алгебраических дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 4. С. 553–555.

[60] Долов М. В., Круглов Е. В. О числе линейных частных интегралов полиномиальных векторных полей // Труды СВМО. 2016. Т. 18. № 1. С. 27–30.

[61] Llibre J., Medrado J.Ċ. On the invariant hyperplanes for d-dimensional polynomial vector fields // J. of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2007. V. 40. P. 8385–8391.

Поступила 09.12.2024

ALGEBRAIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GIVEN INTEGRALS. REVIEW OF THE RESULTS OBTAINED BY M. V. DOLOV

E. V. Kruglov

The results of M. V. Dolov (1934 – 2016) concerning algebraic differential equations with Darboux integrals and Darboux type integrals are considered. For the 90th anniversary of his birth.

Keywords: algebraic differential equations, canonical integrals, Darboux integrals, center, focus, limit cycle, M. V. Dolov.