СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.518.152

ТЕОРЕМА КОРОМИНАСА – СУНЬЕРА: «БЕЗЫМЯННАЯ» ЖЕМЧУЖИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

А. Ю. Зубов

АНО Национальный научно-образовательный центр «Большая российская энциклопедия», Москва, Россия

a.zoubov@gmail.com

Изящная теорема Э. Короминаса и Ф. Суньера-и-Балагера (1954) утверждает, что если функция бесконечно дифференцируема на некотором интервале и в каждой точке этого интервала её производная некоторого порядка (зависящего от точки) обращается в нуль, то эта функция является полиномом. Мы даём структурированное элементарное (пригодное для студентов младших курсов) доказательство этой теоремы, опирающееся на адаптированную версию теоремы Бэра о категории. Кроме того, в статье рассмотрены некоторые не слишком известные обобщения теоремы Короминаса – Суньера.

Ключевые слова: производная, полином, многочлен, гладкая функция, квазианалитический класс, теорема Бэра о категории, теорема Короминаса – Суньера, преподавание высшей математики.

Введение

Через $C^k(a,b)$ (соответственно, $C^\infty(a,b)$) обозначается множество всех вещественных функций, определённых на (открытом) интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$ и имеющих на нём непрерывную производную k-го порядка (соответственно, бесконечно дифференцируемых на нём). При этом не исключается случай, когда интервал (a,b) неограничен, т. е. имеет один или оба бесконечных конца (представляет собой правый или левый открытый луч, либо совпадает со всей прямой $\mathbb{R}$), что оговаривается символическим обозначением $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Термин «интервал» (вещественной прямой) без оговорок означает открытый интервал. Под производной функции нулевого порядка понимается само значение функции, т. е. $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Хорошо известна и элементарно доказывается следующая характеристика вещественных полиномиальных функций (которые для краткости будем называть просто полиномами): *для того чтобы функция* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *была полиномом степени* $< n$, *необходимо и достаточно, чтобы* f *обладала производной порядка* n *на* (a,b) *и выполнялось равенство*

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ для всех } x \in (a,b). \tag{1}$$

(Здесь $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и $n \geqslant 0$; степень нулевого полинома по определению полагается равной -1.)

Условие (1) говорит о том, что число n «одно и то же» для всех x. Можно задаться вопросом: что изменится, если в этом условии «переставить кванторы существования и общности», т. е. потребовать, чтобы для каждого x существовало $n = n_x$ (зависящее от x) такое, что $f^{(n)}(x) = 0$? Оказывается, для бесконечно дифференцируемых функций ничего не изменится — более точно, имеет место следующая

Теорема 1 (Короминас – Суньер). *Пусть* $f \in C^\infty(a,b)$, *где* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *и для каждой точки* $x \in (a,b)$ *найдётся целое* $n = n_x \geqslant 0$ *такое, что*

$$f^{(n)}(x) = 0.$$

Тогда f *является полиномом от* x.

Эту замечательную теорему в 1954 г. доказали каталонские математики Эрне́ст Короми́нас (Короми́нас-и-Виньо́, Corominas i Vigneaux, 1913 – 1992) и Ферра́н Сунье́р-и-Балаге́р (Sunyer i Balaguer, 1912 – 1967); она и связанные с ней утверждения были объявлены в [1], а подробные доказательства опубликованы в [2].

Эта изящная, формулируемая в самых элементарных терминах, теорема поистине является жемчужиной дифференциального исчисления. Она достаточно известна в качестве «задачи со звёздочкой», но ей крайне «не повезло» с названием: то ли из-за сложности каталонских фамилий, то ли по другим причинам, вместе с ней крайне редко упоминаются имена установивших её математиков (в отличие от обычного упоминания авторов некоторых других теорем, которые, так же как и теорема Короминаса – Суньера, являются классическими следствиями теоремы Бэра о категории).

Широкой известности теоремы Короминаса – Суньера способствовал американский математик Р. П. Боас (1912 – 1992): в 1957 г. он познакомил с ней членов Математической ассоциации Америки (см. [3]) и включил её в свой ставший популярным и выдержавший впоследствии несколько переизданий учебник теории вещественных функций [4, p. 58–59]. Среди ранних опубликованных доказательств теоремы — компактно изложенное доказательство в [5, p. 52–53]. Единственное известное автору этих строк опубликованное на русском языке доказательство теоремы Короминаса – Суньера (точнее, набросок доказательства, принадлежащий, как там указано, Д. Ю. Бураго) имеется в указании к решению задачи VII.2.13 (которая представляет собой формулировку теоремы Короминаса – Суньера для функций, определённых на всей прямой) в сборнике задач [6, с. 294–295]; в его втором издании [7] эта задача имеет номер VII.2.14. «Ограниченный» вариант теоремы Короминаса – Суньера (совпадающий с приводимой ниже теоремой 7, но с тем отличием, что предполагается более сильное условие бесконечной дифференцируемости функции f) появился в 5-м издании знаменитого задачника Б. П. Демидовича [8, задача 1261.1]. В решебнике [9] (широко известном под названием «Антидемидович») разбор этой задачи отсутствует.

Ниже излагается подробное доказательство теоремы Короминаса – Суньера. Оно достаточно элементарно и использует несколько лемм, которые могут представлять и самостоятельный интерес в качестве задач. От студента по существу требуются знакомство с простейшими свойствами производных высших порядков и с начальными понятиями топологии вещественной прямой (изолированная и предельная точки, открытые и замкнутые множества, принцип вложенных отрезков, лемма Гейне – Бореля о покрытии отрезка), а также навыки рассуждений, касающихся простейших операций над множествами. Теорема Бэра, используемая для доказательства теоремы Короминаса – Суньера, приводится в адаптированном виде (для замкнутых подмножеств вещественной прямой), дана схема её доказательства, опирающегося лишь на принцип вложенных отрезков. В отдельном разделе приводятся различные обобщения теоремы Короминаса – Суньера, крайне редко упоминаемые в мировой учебной литературе. Доказательства этих обобщений в основном предложены в виде задач с указаниями.

Хочется надеяться, что публикация этой статьи будет способствовать более широкому включению теоремы Короминаса – Суньера в учебные курсы, но главное — изменит её статус «безымянной задачи».

Предварительные сведения

Напомним две фундаментальные теоремы топологии.

Теорема 2 (о структуре открытых подмножеств прямой). *Любое открытое в $\mathbb{R}$ множество U является объединением не более чем счётного семейства попарно не пересекающихся интервалов, т. е. имеет вид*

$$U = \bigcup_{s\in S} J_s, \qquad (2)$$

где S — не более чем счётное множество и для каждого $s \in S$

$$J_s = (\alpha_s, \beta_s), \quad -\infty \leqslant \alpha_s < \beta_s \leqslant +\infty,$$

причём $J_s \cap J_t = \varnothing$ для $s \neq t$.

Интервалы J_s, определяемые в этой теореме, называются *компонентами* (более точно, в соответствии с общетопологической терминологией, *компонентами связности*) множества U, а представление (2) называется *разбиением множества U на компоненты.* В теореме не исключается случай $S = \varnothing$

(соответствующий разбиению пустого множества U на пустое множество компонент). Разбиение неограниченного открытого множества может включать правый и/или левый открытый луч, либо состоять из единственного множества, совпадающего с $\mathbb{R}$.

Короткое общетопологическое доказательство теоремы 2 состоит в следующем: открытое множество U представляется в виде объединения своих попарно не пересекающихся компонент связности, каждая из которых, в силу локальной связности пространства $\mathbb{R}$, является открытым множеством; но любое связное открытое подмножество прямой $\mathbb{R}$ есть открытый интервал (быть может, с одним или обоими бесконечными концами). Счётность семейства компонент связности следует из сепарабельности пространства $\mathbb{R}$.

Элементарное доказательство теоремы 2 можно найти, например, в [10, 3.23] или (с непринципиальным ограничением на случай ограниченных открытых множеств) в [11, гл. II, § 5].

Поскольку понятие отношения эквивалентности в настоящее время изучается практически во всех математических курсах вузов, современным элементарным доказательством теоремы 2 можно считать следующее. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на U, полагая $x \sim y$ в том и только том случае, если точки x и y принадлежат некоторому открытому интервалу (a, b), целиком содержащемуся в U. Несложная проверка показывает, что это отношение действительно является отношением эквивалентности, а каждый класс эквивалентности J совпадает с открытым интервалом $(\inf J, \sup J)$, причём не исключаются случаи $\inf J = -\infty$ или $\sup J = +\infty$. Таким образом, разбиение (2) оказывается разбиением на классы эквивалентности. Его не более чем счётность (которая, впрочем, в дальнейшем не понадобится) доказывается стандартно с помощью выбора в каждом классе по рациональной точке.

Следующая наша теорема — теорема Бэра о категории, которая, пожалуй, является одной из фундаментальных теорем всей математики. Простейший вариант этой теоремы гласит о том, что если прямая $\mathbb{R}$ представлена в виде объединения счётного семейства своих замкнутых подмножеств, то хотя бы одно из них имеет внутреннюю точку. Нам понадобится несколько более сильная формулировка:

Теорема 3 (теорема Бэра о категории для замкнутых подмножеств прямой). *Если непустое множество A замкнуто в $\mathbb{R}$ и*

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \,, \tag{3}$$

где F_n — замкнутые в $\mathbb{R}$ множества $(n = 0, 1, \ldots)$, то по меньшей мере одно из множеств F_n имеет внутреннюю точку относительно A, т. е. найдутся номер N и открытый интервал $J = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ такие, что

$$\varnothing \neq J \cap A \subset F_N .$$

(*Эквивалентно: найдутся точка $x \in A$, номер N и число $\varepsilon > 0$ такие, что все точки множества A, лежащие в ε-окрестности точки x, принадлежат множеству F_N.*)

Эту теорему можно тривиально вывести из общей теоремы Бэра для полных метрических пространств (см., например, [10, теорема 3.75.a]), учитывая замкнутость множества A (а, следовательно, его полноту как подпространства метрического пространства $\mathbb{R}$) и его представление в виде счётного объединения замкнутых в A множеств $F_n \cap A$, $n = 0, 1, \ldots$.

Студентам, не знакомым с теорией полных метрических пространств, можно предложить прямое доказательство теоремы 3, опирающееся на принцип вложенных отрезков. Дадим его схему. Предположим противное: если пересечение произвольного интервала J с множеством A непусто, то это пересечение не содержится целиком ни в каком из множеств F_n. Пользуясь этим предположением (и начав с произвольного отрезка, внутренность которого пересекается с A) можно последовательно построить семейство вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, длины которых стремятся к нулю и таких, что

$$I_n \cap A \neq \varnothing \text{ для всех } n \geqslant 0, \tag{4}$$

$$I_n \cap F_n = \varnothing \text{ для всех } n \geqslant 0. \tag{5}$$

В силу принципа вложенных отрезков существует (единственная) точка x, принадлежащая всем отрезкам I_n. Из (4) и замкнутости A следует, что $x \in A$, а из (5) — то, что x не принадлежит ни одному из F_n. Это противоречит включению (3).

Локальная полиномиальность функций

Нам также понадобится техническое понятие локальной полиномиальности. Далее всюду подразумевается, что интервал (a, b) может быть неограничен, т. е. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Определение. Функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *локально полиномиальна* в точке $x \in (a, b)$, если она является полиномом в некоторой окрестности этой точки (или, что эквивалентно, существует целое $n \geqslant 0$ такое, что $f^{(n)}(y) = 0$ для всех точек y из некоторой окрестности точки x). В этом случае точка x также называется *точкой локальной полиномиальности* функции f.

Лемма 4. *Если функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ локально полиномиальна в каждой точке $x \in (a, b)$, то она является полиномом на всём интервале (a, b).*

Доказательство. Наметим три доказательства этой леммы. Самое короткое из них неэлементарно и состоит в следующем. Из условия вытекает, что функция f (вещественно) аналитична на всём интервале (a, b) и совпадает с некоторым полиномом p на непустом открытом подмножестве интервала (a, b). Тогда f и p совпадают на всём интервале (a, b) в силу принципа единственности аналитических функций.

Второе доказательство — топологическое и в некотором смысле аналогично доказательству связности интервала на прямой. Пусть p — полином, с которым f совпадает в окрестности некоторой точки. Нетрудно показать, что множество $\{x \in (a,b) : f(x) = p(x)\}$ является непустым открыто-замкнутым (в относительной топологии) подмножеством интервала (a,b), и поэтому — в силу связности последнего — совпадает с ним.

Третье доказательство наиболее элементарно. Рассмотрим произвольный отрезок $[c,d] \subset (a,b)$. Для каждой его точки x найдётся её окрестность U_x, на которой f совпадает с некоторым полиномом p_x. По лемме Гейне – Бореля, существует конечный набор $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$, покрывающий отрезок $[c,d]$. Взяв целое N, большее степени каждого из полиномов $p_{x_1}, \dots, p_{x_m}$, получим, что $f^{(N)}(x) = 0$ для всех $x \in [c,d]$. Тем самым доказано, что на каждом отрезке $[c,d] \subset (a,b)$ функция f является некоторым полиномом. Отсюда легко вывести, что на самом деле это один и тот же полином для всех отрезков, для чего достаточно заметить следующее: если два полинома совпадают в окрестности некоторой точки x, то они совпадают всюду (это вытекает, например, из того, что полином однозначно определён значениями всех своих производных в точке x или из того, что ненулевой полином имеет лишь конечное число корней). ∎

Лемма 5. *Множество U точек локальной полиномиальности произвольной функции $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ открыто, причём f является полиномом на каждой его компоненте. (Случай $U = \varnothing$, разумеется, не исключается.) При этом если $f \in C^\infty(a,b)$, то U не имеет смежных компонент (т. е. компонент с общей концевой точкой).*

Доказательство. Открытость множества U сразу вытекает из определения локальной полиномиальности в точке; в силу леммы 4 функция f является полиномом на каждой компоненте множества U.

Для доказательства второй части леммы достаточно заметить, что если два интервала (α, x) и (x, β) с общим концом $x \in \mathbb{R}$ содержатся в U, то и точка x принадлежит множеству U. Действительно, в этом случае f совпадает с некоторым полиномом p на (α, x) и с некоторым полиномом q на (x, β). Пусть n — наибольшая из степеней полиномов p и q, тогда $f^{(n+1)} \equiv p^{(n+1)} \equiv 0$ на (α, x) и $f^{(n+1)} \equiv q^{(n+1)} \equiv 0$ на (x, β). Из непрерывности $f^{(n+1)}$ следует, что $f^{(n+1)}(x) = 0$, поэтому $f^{(n+1)} \equiv 0$ на (α, β), следовательно, $x \in U$ (и, как легко видеть, $f \equiv p \equiv q$ на (α, β)). ∎

Пример 1. Покажем, что требование $f \in C^\infty(a,b)$ в предыдущей лемме существенно. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданную формулой $f(x) = |x^{2025}|$. Она принадлежит классу $C^{2024}(\mathbb{R})$, но не имеет производной 2025-го порядка в точке 0. Множество точек её локальной полиномиальности есть объединение смежных интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Легко привести примеры, показывающие, что $C^\infty(a,b)$ в лемме 5 нельзя заменить на $C^k(a,b)$ ни для какого целого $k \geqslant 0$ (упражнение).

Доказательство основной теоремы

Переходим к доказательству теоремы 1. Для простоты будем предполагать, что функция f определена на всей прямой, т. е. $(a, b) = \mathbb{R}$ (указание к доказательству общего случая приведено в конце этого раздела). Пусть $U \subset \mathbb{R}$ — множество точек локальной полиномиальности функции f. В силу леммы 4 достаточно доказать, что $U = \mathbb{R}$. По лемме 5, множество U открыто и не имеет смежных компонент, откуда следует, что его дополнение $A = \mathbb{R} \setminus U$ замкнуто (как дополнение открытого множества) и не имеет изолированных точек (поскольку изолированная точка множества A была бы общей концевой точкой двух смежных компонент множества U).

Предположим, что $U \neq \mathbb{R}$, т. е. что A непусто, и приведём это предположение к противоречию. Из условия следует, что

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n, \quad \text{где } F_n = \{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0\}. \tag{6}$$

Все множества F_n замкнуты (в силу непрерывности производных всех порядков функции f); применяя теорему 3 к непустому замкнутому множеству A и множествам F_n, заключаем, что найдётся (ограниченный) интервал J и целое $N \geqslant 0$ такие, что

$$\varnothing \neq J \cap A, \tag{7}$$

$$J \cap A \subset F_N. \tag{8}$$

Включение (8) означает, что N-я производная функции f точках множества $J \cap A$ обращается в нуль. Заметим, что на самом деле в этих точках обращаются в нуль и производные всех более высоких порядков, т. е.

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ для } x \in J \cap A \text{ и } n \geqslant N. \tag{9}$$

Этот последний факт легко вывести из того, что A не имеет изолированных точек и из следующей леммы (её доказательство оставляем читателю в качестве упражнения на простейшие свойства производной в точке):

Лемма 6. *Если функция $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$ и найдётся такое $h \in \mathbb{R}$, что x_0 — предельная точка множества $\{x \in (a, b) : g(x) = h\}$, то $g'(x_0) = 0$.*

Действительно, применяя эту лемму к функции $g(x) = f^{(N)}(x)$, произвольной точке $x_0 \in J \cap A$ и значению $h = 0$, заключаем, что $g'(x_0) = f^{(N+1)}(x_0) = 0$. Таким образом, $f^{(N+1)}$ обращается в нуль во всех точках множества $J \cap A$. Аналогично, применив теперь лемму 6 к функции $f^{(N+1)}$, заключаем, что $f^{(N+2)}$ обращается в нуль во всех точках множества $J \cap A$, и т. д. [Для доказательства (9) можно было бы рассуждать и несколько иначе, заметив, что если $A \subset \mathbb{R}$ — множество без изолированных точек, а функция g определена на интервале $J \subset \mathbb{R}$, то её производные (всех порядков) в точках множества $J \cap A$ однозначно определяются значениями самой функции g в точках $J \cap A$.]

Докажем теперь, что на самом деле весь интервал J (а не только его часть $J \cap A$) содержится в F_N, т. е. равенство $f^{(N)}(x) = 0$ выполняется для всех точек $x \in J$; отсюда будет выведено противоречие. В силу (8) для этого достаточно доказать включение $J \setminus A \subset F_N$. Выберем произвольную точку $x_0 \in J \setminus A$, тогда $x_0 \in U$ и, следовательно, $x_0 \in J_s$, где $J_s = (\alpha_s, \beta_s)$ — одна из компонент открытого множества U (при разложении (2) в обозначениях теоремы 2). Интервал J не может целиком содержаться в J_s, поскольку иначе $J \subset U$, вопреки условию (7). Отсюда сразу следует, что хотя бы один из концов интервала J_s конечен и лежит в интервале J; пусть для определённости это будет β_s. Тогда $\beta_s \in J \cap A$ (поскольку $\beta_s \notin U$), и, в силу (9),

$$f^{(n)}(\beta_s) = 0 \text{ для всех } n \geqslant N. \tag{10}$$

Докажем, что

$$f^{(N)}(x) = 0 \text{ для всех } x \in J_s. \tag{11}$$

По лемме 5, функция f совпадает с некоторым полиномом p на J_s.

Если p — нулевой полином, то соотношение (11) очевидно. Пусть теперь p — (ненулевой) полином степени $k \geqslant 0$, тогда $f^{(k)}(x) = p^{(k)}(x) = c$ для всех $x \in J_s$, где c — константа, не равная нулю. Поэтому $f^{(k)}(\beta_s) = c$ (в силу непрерывности производной $f^{(k)}$), следовательно, в силу (10), $k < N$, т. е. функция f совпадает на J_s с полиномом степени $< N$, откуда сразу следует (11) — и тогда, в частности, $f^{(N)}(x_0) = 0$.

Итак, доказано, что $J \subset F_N$. Следовательно, все точки интервала J суть точки локальной полиномиальности функции f, т. е. $J \subset U$, что противоречит условию (7). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1 в случае, когда функция f определена на всей прямой $\mathbb{R}$.

Для доказательства теоремы в случае произвольного интервала (a, b) достаточно показать, слегка модифицировав приведённое выше доказательство, что функция f является полиномом на любом отрезке $[c, d] \subset (a, b)$ (ср. третий способ доказательства леммы 4). Также отметим, что в силу гомеоморфности вещественной прямой и любого открытого интервала теорема 3 останется верной, если в ней $\mathbb{R}$ заменить на произвольный интервал $R = (a, b)$, а множества A и F_n считать замкнутыми в R (в относительной топологии). С учётом такой замены предыдущее доказательство тривиально переносится на общий случай.

Варианты и обобщения основной теоремы

Функция из примера 1 показывает, что условие $f \in C^\infty(a, b)$ в теореме 1 существенно. Действительно, если $f(x) = |x^{2025}|$, то $f^{(2024)}(0) = 0$ и $f^{(2026)}(x) = 0$ для всех $x \neq 0$, но f не является полиномом (не локально полиномиальна в точке 0). Короминас и Суньер показали, как модифицировать теорему 1 для функций, имеющих производные ограниченного порядка:

Теорема 7. *Пусть функция f имеет на (a,b) (конечные) производные вплоть до порядка k включительно (непрерывность производной порядка k не требуется) и для каждого $x \in (a,b)$ найдётся целое $n = n_x$, $0 \leqslant n \leqslant k$, такое, что*

$$f^{(n)}(x) = 0.$$

Тогда функция f является полиномом степени $< k$.

Для доказательства этой теоремы локальную полиномиальность следует «ограничить некоторым порядком», т. е. рассмотреть вместо неё свойство локального совпадения функции с полиномом степени не выше наперёд заданного числа (для доказательства второй части леммы 5 в этом случае можно воспользоваться тем, что производная не может иметь разрывов 1-го рода). Далее можно применить индукцию по $k \geqslant 0$; на шаге индукции рассмотреть производную f' как функцию, определённую на открытом множестве $\{x \in (a,b) : f(x) \neq 0\}$, и применить к ней индуктивное предположение. Детали оставляем читателю.

Теорема 1 имеет обобщение (также установленное Короминасом и Суньером), существенно ослабляющее требования к производным $f^{(n)}(x)$ для того чтобы f была полиномом:

Теорема 8. *Если $H \subset \mathbb{R}$ — не более чем счётное подмножество вещественной прямой, $f \in C^\infty(a,b)$, и для каждого $x \in (a,b)$ найдётся $n = n_x \geqslant 0$ такое, что*

$$f^{(n)}(x) \in H,$$

то функция f является полиномом.

Задача 1. Докажите теорему 8. Для этого следуйте доказательству теоремы 1, но вместо представления (6) используйте следующее представление множества $\mathbb{R}$ в виде счётного объединения замкнутых множеств:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{h \in H} F_{n,h}, \quad \text{где } F_{n,h} = \{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = h\},$$

далее обратите внимание на использование буквы h в формулировке леммы 6.

Короминас и Суньер показали большее: в теореме 8 достаточно предполагать, что мощность множества H строго меньше мощности континуума. Этот результат доказан ими (без принятия континуум-гипотезы) методами дескриптивной теории множеств.

Из теоремы 8 (в силу счётности множеств рациональных и алгебраических чисел) вытекает неожиданное и удивительное

Следствие. *Если функция $f \in C^\infty(a,b)$ не является полиномом, то найдётся точка $x \in (a,b)$, в которой все производные $f^{(n)}(x)$, $n \geqslant 0$, являются иррациональными (и даже трансцендентными) числами.*

Приведём ещё одно доказанное Короминасом и Суньером обобщение теоремы 1, в известном смысле проясняющее её «природу». Напомним, что некоторое множество функций $\Phi \subset C^\infty(a,b)$ называется *квазианалитическим классом* функций, если оно обладает следующим свойством единственности: если две функции φ и ψ, входящие в класс Φ, совпадают в некоторой точке $x \in (a,b)$ вместе со всеми своими производными, то они совпадают на всём интервале (a,b)[1]. Так, множество полиномов на (a,b) является квазианалитическим классом, в т. ч. если интервал (a,b) не ограничен.

Теорема 9. *Пусть $f \in C^\infty(a,b)$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — последовательность (необязательно различных) функций из некоторого квазианалитического класса $\Phi \subset C^\infty(a,b)$, причём для каждой точки $x \in (a,b)$ найдутся целые $n = n_x \geqslant 0$ и $k = k_x \geqslant 1$ такие, что*

$$f^{(n)}(x) = \varphi_k^{(n)}(x).$$

Тогда существует целое $l \geqslant 1$ такое, что $f(x) - \varphi_l(x)$ является полиномом.

Задача 2. Выведите теорему 8 из теоремы 9.

Задача 3. Докажите теорему 9, модифицировав доказательство теоремы 1. *Указание.* Где в доказательстве теоремы 1 от множества полиномов требуется лишь свойство его квазианалитичности? Проанализируйте последнее предложение в доказательстве леммы 4. Используйте вместо представления (6) представление

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{n,k}, \quad \text{где } F_{n,k} = \{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = \varphi_k^{(n)}(x)\}.$$

Далее, существует следующее обобщение теоремы 1 на случай функции многих переменных.

Теорема 10 (Богоссян – Джонсон, [13]). *Пусть D – область (связное открытое подмножество) в $\mathbb{R}^m$ и $f \in C^\infty(D)$, причём для каждого $y \in D$ существуют неотрицательные целые числа $n_i = n_i(y)$, $i = 1, \ldots, m$, такие, что*

$$\frac{\partial^{n_i} f}{\partial x_i^{n_i}}(y) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда f является полиномом (от m переменных).

Доказательство этой теоремы в [13] опирается на следующее утверждение, которое доказывается чисто алгебраическим способом с использованием весьма общей техники, описанной в [14]:

Теорема 11. *Пусть $I_1, I_2, \ldots, I_m$ — (открытые) интервалы вещественной прямой, $m \geqslant 2$, и функция $f\colon I_1 \times \ldots \times I_m \to \mathbb{R}$ является полиномом раздельно по каждой переменной. Тогда f — полином (от m переменных).*

[1] Обратим внимание читателя, знакомого с тематикой квазианалитических классов, на то, что мы принимаем именно такое определение абстрактных квазианалитических классов, не требуя в нём каких-либо ограничений производных, как в классических квазианалитических классах $C(\{M_n\})$ Данжуа – Карлемана; см. [12].

Задача 4. Сформулируйте и докажите обобщение леммы 4 на случай функции многих переменных, определённой на области $D \subset \mathbb{R}^m$. Используя это обобщение, теорему 11 и теорему 1, докажите теорему 10. Сформулируйте и докажите обобщение теоремы 8 на случай функции многих переменных (это последнее обобщение также отмечено в [13]).

Литература

[1] Corominas E., Sunyer i Balaguer F. Sur des conditions pour qu'une fonction infiniment dérivable soit un polynôme. // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1954. T. 238. P. 558–559.

[2] Corominas E., Sunyer [i] Balaguer F. Condiciones para que una función infinitamente derivable sea un polinomio // Revista Matem. Hispano-Americana, 4ª Ser. 1954. T. 14, No. 1–2. P. 26–43.

[3] The May meeting of the Wisconsin section // Amer. Math. Monthly. 1957. Vol. 64, No. 8. P. 627.

[4] Boas (Jr.) R. P. A primer of real functions. — N. Y.: The Math. Assoc. of America; Wiley and Sons, 1960. — xiii+189 p. — (The Carus math. monogr.; 13).

[5] Donoghue (Jr.) W. F. Distributions and Fourier transforms. — N. Y., L.: Academic Press, 1969. — viii+317 p. — (Pure and appl. math.; 32)

[6] Избранные задачи по вещественному анализу / Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А, Подкорытов А. Н. — М.: Наука, 1992. — 430 с.

[7] Избранные задачи по вещественному анализу / Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А, Подкорытов А. Н. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. — 623 с.

[8] Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — 5-е изд., доп. — М.: Физматгиз, 1962. — 544 с.

[9] Математический анализ в примерах и задачах, ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. — Киев: Вища шк., 1974. — 678 с.

[10] Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1–2. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

[11] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — 3-е изд. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

[12] Мандельбройт С. Квазианалитические классы функций. — Л.; М.: ОНТИ, 1937. — 108 с.

[13] Boghossian A. B., Johnson (Jr.) P. D. A pointwise condition for an infinitely differentiable function of several variables to be a polynomial // J. Math. Anal. Appl. 1990. Vol. 151, No. 1. P. 17–19.

[14] Palais R. S. Some analogues of Hartogs' theorem in an agebraic setting // Amer. J. of Math. 1978. Vol. 100, No. 2. P. 387–405.

Поступила 20.12.2024

COROMINAS – SUNYER THEOREM: A "FORGOTTEN" JEWEL OF DIFFERENTIAL CALCULUS

A. Yu. Zoubov

A curious theorem of E. Corominas and F. Sunyer i Balaguer (1954) asserts that if a function f has all derivatives on an interval, and for each point some derivative of f vanishes, then f is a polynomial. We give a structured elementary proof of the theorem, suitable for undergraduate students, using an adapted version of the Baire cathegory theorem. In addition, not-so-well-known generalizations of the Corominas – Sunyer theorem are considered.

Keywords: derivative, polynomial, smooth function, quasi-analytic class, Baire category theorem, Corominas – Sunyer theorem, teaching higher mathematics.