СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 519.115

КОМБИНАТОРИКА В КУРСЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Д. В. Захарова[1], Д. Б. Мокеев[2], С. В. Сидоров[3], Т. Г. Смирнова[4]

[1] *Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия*
[1,2,3,4] *Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

[1]darya.zakharova@itmm.unn.ru, [2]dmitry.mokeev@itmm.unn.ru, [3]sergey.sidorov@itmm.unn.ru, [4]tatyana.smirnova@itmm.unn.ru

Представлен краткий теоретический материал по комбинаторике и предлагается подборка задач для проведения проверочных работ по комбинаторике.

Ключевые слова: дискретная математика, комбинаторика.

Введение

Курс дискретной математики читается для студентов различных направлений подготовки института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского в первом и втором семестрах. В каждом семестре аудиторные занятия лекционного типа и семинарского типа составляют по 32 часа. Начинается курс с изучения алгебры множеств, который составляет общую основу различных математических дисциплин, а детальное изучение алгебры множеств подготавливает студентов к лучшему восприятию других тем дискретной математики. Также в первом семестре изучаются бинарные отношения, комбинаторика и теория графов.

На первой же лекции, как правило, выясняется, насколько разным является уровень подготовки вчерашних школьников. Многие из них путаются в обозначениях операций над множествами, затрудняются в использовании теоретико-множественной символики, особенно в тех случаях, когда множество содержит в качестве элемента другое множество, например, пустое.

Но настоящие мучения начинаются у студентов при изучении комбинаторики. Этот важный раздел дискретной математики, обычно, трудно воспринимается студентами. При решении задач по комбинаторике они сталкиваются с различными проблемами, и часто на занятиях студенты теряются при ответах на самые простые вопросы. Поэтому актуальной задачей преподавателя становится следующая проблема: научить студентов правильно пользоваться основными правилами комбинаторики, понимать разницу между размещениями и сочетаниями, грамотно применять формулы для подсчёта комбинаторных объектов.

В данной работе хотим поделиться своим опытом и предложить подборку задач для проведения проверочных работ по комбинаторике [1].

1. Основные правила комбинаторики

Основные правила комбинаторики просты, естественны и понятны [2 – 6]. При правильном их использовании можно решить очень большое количество самых разнообразных перечислительных задач, появляющихся в дискретной математике.

Правило равенства. Пусть A, B — конечные множества. Тогда

$$|A| = |B| \iff \text{существует биекция} \quad f\colon A \to B.$$

Это правило позволяет устанавливать равномощность множеств путём построения биекции между ними.

Правило суммы. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — конечные попарно непересекающиеся множества, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Тогда

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|.$$

Этому правилу можно придать следующую комбинаторную интерпретацию.

Пусть есть k мешков, причём в i-м мешке находится n_i предметов. Сколькими способами можно выбрать ровно один предмет?

Ответ: $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

Правило произведения. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — конечные множества. Тогда

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Этому правилу можно придать следующую комбинаторную интерпретацию.

Снова пусть есть k мешков, причём в i-м мешке находится n_i предметов. Сколькими способами можно выбрать по одному предмету из каждого мешка, т. е. сначала выбрать один предмет из 1-го мешка, затем один предмет из 2-го мешка и т. д.?

Ответ: $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Теорема о последовательном выборе. Это обобщение правила произведения. Прежде чем её сформулировать, введём понятие *набора*.

Набор — это конечная упорядоченная последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$, выбираемых из каких-то множеств. Отличия набора от множества: в наборе элементы могут повторяться и важен их порядок.

Теорема 1. *Пусть набор $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ формируется в результате последовательного выбора элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причём*

1) x_1 можно выбрать n_1 способами;

2) для любого x_1 элемент x_2 можно выбрать n_2 способами;

3) для любых x_1, x_2 элемент x_3 можно выбрать n_3 способами;

...

k) для любых $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ элемент x_k можно выбрать n_k способами.

Тогда весь набор можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Доказательство. Индукция по k. База индукции: для $k = 1$ очевидно. Пусть теорема доказана для наборов длины $k-1$. Тогда существует биекция между наборами $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ и наборами (y, x_k) длины 2, где $y = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$. По предположению индукции количество наборов $y = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ равно $m = n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-1}$.

Найдём число способов выбора набора (y, x_k). Заметим, что, вообще говоря, выбор следующего элемента набора зависит от того, какие элементы были выбраны на предыдущих шагах. Но количество способов выбора не зависит от предыдущих шагов. Процесс формирования набора (y, x_k) при условии, что если выбором элемента y является y_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$, то элемент x_k выбирается из множества $\{a_1^i, a_2^i, ..., a_{n_k}^i\}$, можно изобразить в виде дерева решений (см. рис. 1).

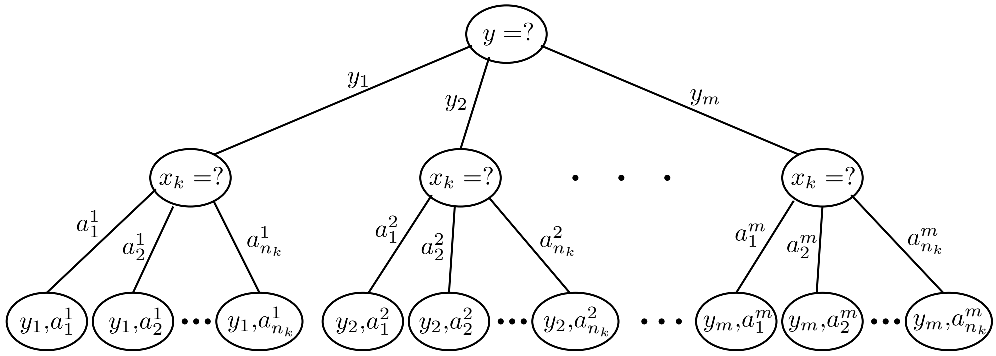

Рис. 1. Дерево решений процесса формирования набора (y, x_k)

Сформированные наборы расположены на нижнем ярусе дерева. Количество этих наборов равно $\overbrace{n_k + n_k + \ldots + n_k}^{m\ \text{раз}} = m \cdot n_k = n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-1} \cdot n_k$, что и требовалось доказать. ∎

2. Перестановки и размещения

Понятия перестановок, размещений и сочетаний являются одним из своего рода «краеугольных камней» комбинаторики. Здесь главная задача научиться распознавать их в разных задачах, и, конечно же, считать их количество.

Перестановка элементов множества — это расположение их в некотором порядке. Другими словами, взяли все элементы множества, возможно, изначально поставленных в каком-то порядке, а потом *переставили* их — и получили *перестановку*. В перестановке *важен порядок* (и порядок этот *линейный*) и должен быть каждый элемент множества ровно *один раз*.

Размещение — это последовательность, состоящая из нескольких элементов множества. В размещении также *важен порядок*, но могут быть *не все элементы*. Размер размещения является его параметром так же, как мощность множества, из которого выбираем элементы, и они могут отличаться друг от друга.

Различают размещения *с повторениями* и *без повторения*. В первом случае можно выбирать *сколько угодно* одинаковых элементов, и мы имеем *набор* (или *кортеж*, или *слово*), во втором — повторения, наоборот, *запрещены*, и мы имеем линейно упорядоченное подмножество (перестановку подмножества).

Число как перестановок, так и размещений, можно считать с помощью принципа последовательного выбора.

Для размещений *с повторениями* это происходит так: пусть множество, из которого мы выбираем элементы имеет мощность n, а размер кортежа, который надо получить равен k (обычно так и говорят: «размещения из n по k»). Поскольку важен порядок элементов, можно выбирать их последовательно: сначала первый, потом второй и т. д. Для каждого элемента есть n способов его выбрать, т. е. n способов для первого элемента, n для второго и по n для всех остальных до k-го элемента. Согласно принципу последовательного выбора, все эти n надо между собой перемножить. В результате получается $\overbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{k \text{ раз}} = n^k$.

Зададимся вопросом, каким числом способов можно разместить n различных предметов по k различным мешкам, если в каждый мешок может быть помещено любое число предметов (в том числе ни одного)? В этом вопросе слово «разместить» уже намекает, что мы имеем дело с размещениями. Причём размещения с повторениями, раз можем класть в любой мешок сколько угодно предметов. Надо только теперь определиться, что в какую степень возводить. Любой предмет мы можем положить в любой мешок, значит последовательно раскладывая предметы, делаем для каждого из них выбор из k мешков. Таким образом получается, что надо k перемножить n раз. *Ответ*: k^n.

Если размещения *без повторений*, то для первого элемента размещения получается n вариантов, а вот для второго уже $n - 1$, потому что тот же элемент, что стоит на первой позиции, на вторую мы поставить уже не можем. И дальше с каждым разом на один вариант становится меньше. Поэтому всего таких размещений будет $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

А теперь ответим на вопрос, каким числом способов можно разместить n различных предметов по k различным мешкам, если в каждый мешок укладывается не более одного предмета? Рассуждаем, в каждый мешок помещается не более одного предмета, т. е. мешки для разных предметов не повторяются. Это значит, что k допустимых мешков только для первого предмета, а для каждого следующего — на 1 меньше предыдущего. Но предметов всё равно n, значит перемножаем n последовательно убывающих множителей. *Ответ*: $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-(n-1)) = \frac{k!}{(k-n)!}$.

Перестановка из n элементов — это, можно сказать, *размещение* по *всем* элементам, т. е. здесь цепочка умножений идёт вплоть до 1, и число перестановок будет просто $n!$.

3. Сочетания и упорядоченные разбиения

Под словом *сочетание* — понимается просто подмножество, значит число сочетаний из n по k — это просто количество различных подмножеств мощности k в множестве мощности n. От размещения сочетание принципиально отличается тем, что в нём *не важен* порядок (а в размещении важен). Поэтому количество размещений, полученных из одного сочетания равно числу способов упорядочить это подмножество, то есть $k!$, а всего число размещений равно числу сочетаний, умноженному на $k!$.

Отсюда имеем формулу для числа сочетаний: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Задачи на число сочетаний часто студенты тоже пытаются решить через принцип последовательного умножения. Но здесь этот метод не сработает. Нужно запоминать формулу. Тем более, что число сочетаний — это ещё и биноминальный коэффициент: коэффициент при $x^k y^{n-k}$ в разложении $(x+y)^n$.

Любое сочетание, выделение подмножества из множества, можно трактовать как разбиение его на 2 части — то, что попадает в подмножество и то, что не попадает.

Каково число способов разложить n предметов по двум различимым мешкам, чтобы в одном мешке оказалось ровно k предметов, а в другом — остальные $n-k$? *Ответ*: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Сочетание *с повторениями* из n по k — мультимножество[1] из k элементов, выбранных из множества мощности n. Число сочетаний с повторениями из n по k равно $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$.

[1] *Мультимножество* — это совокупность элементов, в которую каждый элемент может входить больше одного раза. Как и в множестве, порядок элементов в мультимножестве не важен.

Разбиение множества A — семейство его попарно непересекающихся подмножеств (частей разбиения), объединение которых равно A. Если порядок частей важен, говорят об *упорядоченных* разбиениях, в противном случае — о *неупорядоченных*.

Число упорядоченных разбиений множества мощности n на k частей равно k^n. Число упорядоченных разбиений множества мощности n с заданными размерами частей $n_1, n_2, \dots, n_k$ равно $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

4. Задачи на подсчёт числа подмножеств с разными свойствами

При решении задач, связанных с подсчётами числа элементов из множества U, обладающих заданными свойствами, удобно использовать диаграммы Венна. На рис. 2 изображена диаграмма Венна для трёх подмножеств (A, B, C) из U, представляющая собой прямоугольник, разбитый на 8 клеток (ячеек).

	A		$\bar{A}$	
B				
$\bar{B}$				
	C	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$

	A		$\bar{A}$	
B	M_1	M_2	M_5	M_6
$\bar{B}$	M_3	M_4	M_7	M_8
	C	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$

Рис. 2. Диаграмма Венна для трёх множеств

Каждый упорядоченный набор (A, B, C) подмножеств унивёрса U порождает упорядоченное разбиение $\mathscr{F}$ унивёрса на $2^3 = 8$ «атомарных» ячеек:

$$\mathscr{F} = (\underbrace{ABC}_{M_1}, \underbrace{AB\bar{C}}_{M_2}, \underbrace{A\bar{B}C}_{M_3}, \underbrace{A\bar{B}\bar{C}}_{M_4}, \underbrace{\bar{A}BC}_{M_5}, \underbrace{\bar{A}B\bar{C}}_{M_6}, \underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_{M_7}, \underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}_{M_8}),$$

$$U = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup M_4 \sqcup M_5 \sqcup M_6 \sqcup M_7 \sqcup M_8.$$

Легко видеть, что если мы сопоставим набору (A, B, C) разбиение $\mathscr{F}$, то получим биекцию между $2^U \times 2^U \times 2^U$ и всеми упорядоченными разбиениями множества U на 8 частей (таких разбиений ровно $8^{|U|}$ штук). Действительно, по разбиению $\mathscr{F}$ подмножества A, B, C восстанавливаются однозначно:

$$A = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup M_4,$$

$$B = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_5 \sqcup M_6,$$

$$C = M_1 \sqcup M_3 \sqcup M_5 \sqcup M_7.$$

Задача 1. Дано множество U из 7 элементов. Каким числом способов в нём можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись условия: $|AB \cup C| = 2$, $\left|\bar{A}B\bar{C}\right| = 2$.

Решение. Введём обозначения: $X = AB \cup C$, $Y = \bar{A}B\bar{C}$, $Z = \bar{B}\bar{C}$ и отметим эти подмножества на диаграмме Венна (см. рис. 3). Подмножество X размещается в пяти ячейках диаграммы Венна, помеченных наклонной штриховкой, подмножество Y — в одной ячейке диаграммы, помеченной точками, наконец, в двух незакрашенных ячейках находятся элементы множества Z. Подмножества X, Y, Z не пересекаются и в объединении составляют множество U, другими словами X, Y, Z задают разбиение U.

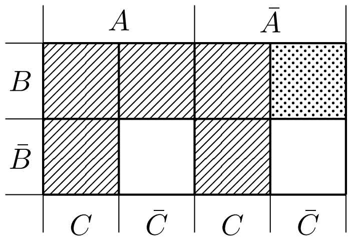

Рис. 3. Диаграмма Венна для разбиения $X = AB \cup C$, $Y = \bar{A}B\bar{C}$, $Z = \bar{B}\bar{C}$

По условию, $|X| = 2$, $|Y| = 2$ и, следовательно, $|Z| = 3$. Существует ровно $\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$ упорядоченных разбиений множества U на три части X, Y, Z мощностей 2, 2 и 3 соответственно.

Но каждому такому разбиению соответствуют, вообще говоря, несколько наборов подмножеств (A, B, C). Действительно, поскольку часть X имеет мощность 2 и состоит из пяти ячеек, то распределяя эти два элемента по пяти ячейкам различными способами, мы будем получать различные наборы (A, B, C).

Поскольку

$$X = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup M_5 \sqcup M_7,\ Y = M_6,\ Z = M_4 \sqcup M_8,$$

то имеем разбиения трёх множеств X, Y и Z на 5, 1 и 2 «атомарные» ячейки соответственно:

$$\mathscr{F}_X = (M_1, M_2, M_3, M_5, M_7),\ \mathscr{F}_Y = (M_6),\ \mathscr{F}_Z = (M_4, M_8).$$

Число распределений элементов X по пяти ячейкам равно $5^{|X|} = 5^2 = 25$. Число распределений элементов Y в одну ячейку равно $1^{|Y|} = 1$. Наконец, число распределений элементов Z по двум ячейкам равно $2^{|Z|} = 2^3 = 8$. Итак, каждому упорядоченному набору подмножеств (A, B, C) в универсе U мы сопоставили пару: разбиение (X, Y, Z), где $|X| = 2$, $|Y| = 2$, $|Z| = 3$, и тройку $(\mathscr{F}_X, \mathscr{F}_Y, \mathscr{F}_Z)$. Это взаимно-однозначное соответствие.

Стало быть, согласно теореме о последовательном выборе число способов выбора подмножеств A, B, C множества U равно

$$\binom{7}{3,2,2} \cdot 5^2 \cdot 2^3 = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot 25 \cdot 8 = 42\,000.$$

Ответ: 42 000.

Задача 2. Дано множество U из 6 элементов. Каким числом способов в нём можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись условия: $|A \cup B| = 5$, $|A - (B \cap C)| = 1$.

Решение. Заметим, что подмножество $A - (B \cap C) = A\bar{B} \cup A\bar{C}$ полностью содержится в $A \cup B$, обозначим его за X. Дополнением этого подмножества до множества $A \cup B$ является подмножество $ABC \cup \bar{A}B$, обозначим его за Y. Наконец, подмножество $\bar{A}\bar{B}$ обозначим буквой Z. Отметим эти подмножества на диаграмме Венна (см. рис. 4).

Подмножество X размещается в трёх ячейках диаграммы Венна, помеченных точками, подмножество Y — в трёх ячейках диаграммы, помеченных наклонной штриховкой, наконец, в двух незакрашенных ячейках находятся элементы множества Z.

Подмножества X, Y, Z не пересекаются и в объединении составляют множество U, т. е. X, Y, Z задают разбиение U.

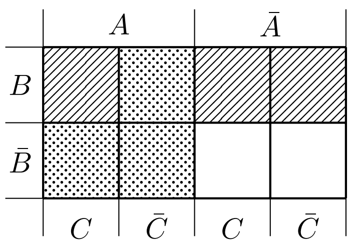

Рис. 4. Диаграмма Венна для разбиения $X = A\bar{B} \cup A\bar{C}$, $Y = ABC \cup \bar{A}B$, $Z = \bar{A}\bar{B}$

По условию, $|X| = 1$, тогда $|Y| = 4$ и, следовательно, $|Z| = 1$. Существует ровно $\binom{6}{4,1,1} = \frac{6!}{4! \cdot 1! \cdot 1!}$ упорядоченных разбиений множества U на три части X, Y, Z мощностей 1, 4 и 1 соответственно. Но каждому такому разбиению соответствуют, вообще говоря, несколько наборов подмножеств (A, B, C). Действительно, поскольку часть X имеет мощность 1 и состоит из трёх ячеек, то распределяя этот элемент по трём ячейкам различными способами, мы будем получать различные наборы (A, B, C).

Поскольку

$$X = M_2 \sqcup M_3 \sqcup M_4, \;\; Y = M_1 \sqcup M_5 \sqcup M_6, \;\; Z = M_7 \sqcup M_8,$$

то имеем разбиения трёх множеств X, Y и Z на 3, 3 и 2 «атомарные» ячейки соответственно:

$$\mathscr{F}_X = (M_2, M_3, M_4),\ \mathscr{F}_Y = (M_1, M_5, M_6),\ \mathscr{F}_Z = (M_7, M_8).$$

Число распределений элементов X по трём ячейкам равно $3^{|X|} = 3^1 = 3$. Число распределений элементов Y по трём ячейкам равно $3^{|Y|} = 3^4 = 81$. Наконец, число распределений элементов Z по двум ячейкам равно $2^{|Z|} = 2^1 = 2$. Итак, каждому упорядоченному набору подмножеств (A, B, C) в унивёрсе U мы сопоставили пару: разбиение (X, Y, Z), где $|X| = 1$, $|Y| = 4$, $|Z| = 1$, и тройку $(\mathscr{F}_X, \mathscr{F}_Y, \mathscr{F}_Z)$. Это взаимно-однозначное соответствие.

Согласно теореме о последовательном выборе число способов выбора подмножеств A, B, C множества U равно

$$\binom{6}{4,1,1} \cdot 3^5 \cdot 2^1 = \frac{6!}{4! \cdot 1! \cdot 1!} \cdot 243 \cdot 2 = 14\,580.$$

Ответ: 14 580.

Задача 3. Дано множество U из 6 элементов. Каким числом способов в нём можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись условия: $|(A \cup B) - C| = 3$, $|C - (A \cap B)| = 2$.

Ответ: 29 160.

Задача 4. Дано множество U из 7 элементов. Каким числом способов в нём можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись условия: $|A \cap B| = 1$, $|(A \cap C) - B| = 3$.

Ответ: 35 000.

Задача 5. Дано множество U из 8 элементов. Каким числом способов в нём можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись условия: $|(A - C) \cup B| = 1$, $|(A \cap C) - B| = 4$.

Ответ: 11 200.

Задача 6. Дано множество U из 6 элементов. Каким числом способов в нём можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись условия: $|A \cup B| = 4$, $|(B \cap C) - A| = 1$.

Ответ: 30 000.

Задача 7. Дано множество U из 7 элементов. Каким числом способов в нём можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись условия: $|(A - B) \cup C| = 6$, $|C - (A \cap B)| = 2$.

Ответ: 45 360.

5. Задачи на подсчёт числа слов

Задача 8. Рассматриваются слова в алфавите $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Требуется подсчитать число слов длины 8, удовлетворяющих условию: $n_1 = n_2 = n_3$, где через n_i обозначается число вхождений буквы a_i в слово.

Решение. Рассмотрим 3 возможных случая.

1. $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, тогда $n_4 + n_5 = 8$, и число слов, удовлетворяющих этому условию, равно числу слов длины 8 в алфавите из двух букв, т. е. $2^8 = 256$.
2. $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, тогда $n_4 + n_5 = 5$. При подсчёте числа слов, удовлетворяющих этим условиям, рассуждаем: букву a_1 можно разместить в слове 8-ю способами, после этого букву a_2 можно разместить 7-ю способами и, затем, букву a_3 — 6-ю способами. После каждого такого выбора число слов из двух букв a_4 и a_5 длины 5 равно $2^5 = 32$. Таким образом, число слов равно $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 32 = 10\,752$.
3. $n_1 = n_2 = n_3 = 2$, тогда $n_4 + n_5 = 2$. Здесь размышляем так: букву a_1 можно разместить в слове $C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$-ю способами, после этого букву a_2 можно разместить $C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$-ю способами и, наконец, букву a_3 — $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$-ю способами. После каждого такого выбора число слов из двух букв a_4 и a_5 длины 2 равно $2^2 = 4$. Окончательно находим $28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 4 = 10\,080$ слов.

Итак, по правилу суммы получаем $256 + 10\,752 + 10\,080 = 21\,088$ слов.

Ответ: 21 088.

Задача 9. Требуется подсчитать число слов длины 5 в алфавите $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, удовлетворяющих условию: $2n_1 < n_2 + n_3$, где через n_i обозначается число вхождений буквы a_i в слово.

Решение. Так как длина слова равна 5 и $2n_1 < n_2 + n_3$, то буква a_1 либо совсем не входит в слово, либо входит ровно 1 раз.

1) $n_1 = 0$. Рассмотрим 2 способа решения этого случая.

1 *способ.* Последовательный перебор.

1. $n_2 + n_3 = 1$, т. е. вторая и третья буквы в слове могут занимать лишь одну позицию, тогда $n_4 + n_5 + n_6 = 4$. Выберем одну позицию из пяти для букв a_2 и a_3 — 5 вариантов. Для этой позиции есть два варианта выбора буквы a_2 или a_3. Остаются 4 свободные позиции, для каждой из которой имеется три варианта выбора буквы: a_4, или a_5, или a_6. Таким образом, число слов для данного случая равно $5 \cdot 2 \cdot 3^4 = 810$.
2. $n_2 + n_3 = 2$, $n_4 + n_5 + n_6 = 3$. Число способов выбора двух позиций из пяти равно $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$. После каждого такого выбора число слов из двух букв длины 2 равно $2^2 = 4$. Осталось три свободных места и три буквы a_4, a_5, a_6, а число слов из трёх букв длины 3 равно $3^3 = 27$. Получаем, $10 \cdot 4 \cdot 27 = 1\,080$.
3. $n_2 + n_3 = 3$, $n_4 + n_5 + n_6 = 2$. Количество вариантов выбора трёх позиций из пяти равно $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$, для каждой позиции два варианта выбора буквы, умножаем на $2^3 = 8$. Остаётся умножить на

число слов длины два в алфавите из 3 букв, равное $3^2 = 9$. Получаем, $10 \cdot 8 \cdot 9 = 720$.

4. $n_2 + n_3 = 4$, тогда $n_4 + n_5 + n_6 = 1$. В этом случае аналогичными рассуждениями получаем: $C_5^4 \cdot 2^4 \cdot 3 = 240$.
5. $n_2 + n_3 = 5$. В данном случае число слов равно числу слов длины 5 в алфавите из двух букв, т. е. $2^5 = 32$.

Итак, по правилу суммы получаем: $810 + 1080 + 720 + 240 + 32 = 2882$.

2 *способ.*

Поскольку $n_1 = 0$ и $2n_1 < n_2 + n_3$, то нужно посчитать число слов длины 5 в алфавите из 5 букв, в которые обязательно входят буквы a_2 или a_3. Если из всего количества слов длины 5 вычесть те варианты, когда букв a_2 и a_3 нет в слове, получим искомое. Число слов длины 5 в алфавите из 5 букв равно 5^5, а число слов без букв a_2 и a_3 равно 3^5. Таким образом, $5^5 - 3^5 = 2882$.

2) $n_1 = 1$, т. е. в слове буква a_1 встречается ровно 1 раз. Имеем 5 способов выбрать одну позицию для буквы a_1, далее применим последовательный перебор, учитывая, что $n_2 + n_3 > 2$.

1. $n_2 + n_3 = 3$, $n_4 + n_5 + n_6 = 1$. Осталось 4 свободных места (одно занято первой буквой). Число способов выбора трёх мест для букв a_2 и a_3 равно $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$. Умножаем на количество вариантов выбора буквы для каждого из этих мест $2^3 = 8$. Осталось одно свободное место, на котором может быть одна из трёх букв $\{a_4, a_5, a_6\}$.
   Получили $5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 3 = 480$ слов.
2. $n_2 + n_3 = 4$, $n_4 + n_5 + n_6 = 0$. Имеем $2^4 = 16$ слов длины 4 в алфавите из двух букв, тогда число слов в данном случае равно $5 \cdot 16 = 80$.

Итак, при $n_1 = 1$ получаем: $480 + 80 = 560$.

Окончательно, по правилу суммы получаем, что $2\,882 + 560 = 3\,442$ слов длины 5 можно составить при условии $2n_1 < n_2 + n_3$.

Ответ: 3 442.

Задача 10. Требуется подсчитать число слов длины 7 в алфавите $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, удовлетворяющих условию: $n_1 + 2n_2 \leqslant 3$, где через n_i обозначается число вхождений буквы a_i в слово.

Ответ: 3 600.

Задача 11. Требуется подсчитать число слов длины 6 в алфавите $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, удовлетворяющих условию: $n_1 + n_2 = n_3 + n_4 + n_5$, где через n_i обозначается число вхождений буквы a_i в слово.

Ответ: 4 320.

Задача 12. Требуется подсчитать число слов длины 8 в алфавите $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, удовлетворяющих условию: $n_2 = n_1 + 2$, где через n_i обозначается число вхождений буквы a_i в слово.

Ответ: 8 008.

Задача 13. Сколькими способами можно переставить буквы слова «комиссия» так, чтобы: 1) никакие две гласные не стояли рядом; 2) не менялся порядок гласных букв; 3) две буквы «с» не шли подряд?

Решение. 1) Имеется $\binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2!} = 12$ перестановок согласных. Для каждой перестановки согласных имеем 5 мест для размещения четырёх гласных букв слова «комиссия». Учитывая, что буква «и» встречается дважды, получаем, что число всех размещений гласных букв равно $\frac{A_5^4}{2!} = \frac{5!}{2!} = 60$. По правилу произведения окончательно получаем $12 \cdot 60 = 720$ слов.

2) Число размещений согласных букв с учётом того, что буква «с» повторяется дважды, равно $\frac{A_8^4}{2!} = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = 840$. Очевидно, что после такого размещения на оставшиеся 4 места гласные в указанном порядке размещаются однозначно.

3) Число различных слов, которые получаются перестановками букв слова «комиссия», равно $\binom{8}{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 10\,080$. Число слов, в которых две буквы «с» идут подряд, равно $\binom{7}{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!} = 2\,520$. Получаем, что число слов, в которых две буквы «с» не идут подряд, равно $10\,080 - 2\,520 = 7\,560$.

Ответ: 1) 720; 2) 840; 3) 7 560.

Задача 14. Сколькими способами можно переставить буквы слова «периметр», чтобы каждая буква «е» шла непосредственно после «р»?

Ответ: 360.

Задача 15. Сколькими способами можно переставить буквы слова «профессор», чтобы не менялся порядок гласных букв?

Ответ: 15 120.

Задача 16. Сколькими способами можно переставить буквы слова «корректор», чтобы три буквы «р» не шли подряд?

Ответ: 13 860.

6. Принцип включений-исключений

Тема достаточно простая и логичная, если речь идёт о малом числе множеств и без параметров. Нужен данный принцип для того, чтобы считать мощность объединения нескольких множеств, если пересечения не пустые. Наиболее важно, для решения задач этого раздела, знать формулу для двух множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

и для трёх множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Задача 17. На контрольной работе группе студентов были предложены три задачи. Первую решили 15 человек, вторую — 17, третью — 8. Первую и вторую решили 12 человек, первую и третью — 6, вторую и третью — 5.

1) Сколько человек в группе, если все три задачи решили четверо, а двое не решили ни одной?

2) Три задачи решили пятеро. Сколько человек решили только первую задачу? Только первую и вторую? Верно ли утверждение: каждый, кто решил вторую и третью задачи, решил и первую?

Решение. Будем считать, что U (универс) — это множество всех студентов группы. Обозначим через A_1, A_2, и A_3 множества студентов, которые решили первую, вторую и третью задачи соответственно. Тогда получается, что $|A_1| = 15$, $|A_2| = 17$, $|A_3| = 8$, $|A_1A_2| = 12$, $|A_1A_3| = 6$, $|A_2A_3| = 5$.

1) Здесь $|A_1A_2A_3| = 4$ и ещё известно, что двое студентов не решили ни одной задачи, т. е. $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 2$. Надо посчитать $|U|$. По формуле включений-исключений имеем $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1A_2| - |A_1A_3| - |A_2A_3| + |A_1A_2A_3| = 15 + 17 + 8 - 12 - 6 - 5 + 4 = 2$. В результате получаем $|U| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 21 + 2 = 23$.

2) Здесь $|A_1A_2A_3| = 5$ и имеем несколько вопросов. Если перевести на язык множеств, то надо найти $|A_1-(A_2\cup A_3)|$, $|A_1A_2-A_3|$ и сравнить $|A_2A_3|$ с $|A_1A_2A_3|$. Нетрудно видеть, что $A_1-(A_2\cup A_3) = A_1-A_1(A_2\cup A_3)$. Поскольку $A_1(A_2 \cup A_3) \subseteq A_1$, то $|A_1 - A_1(A_2 \cup A_3)| = |A_1| - |A_1(A_2 \cup A_3)|$. Дальше, по формулам теории множеств и принципу включений-исключений, $|A_1| - |A_1(A_2\cup A_3)| = |A_1|-|A_1A_2\cup A_1A_3| = |A_1|-(|A_1A_2|+|A_1A_3|-|A_1A_2A_3|) = 15-(12+6-5) = 2$ и $|A_1A_2-A_3| = |A_1A_2-A_1A_2A_3| = |A_1A_2|-|A_1A_2A_3| = 12 - 5 = 7$. И последний вопрос: поскольку $|A_2A_3| = |A_1A_2A_3| = 5$, то множества тех, кто решил вторую и третью задачу, совпадает с множеством тех, кто решил все три. Таким образом, если человек решил вторую и третью задачу, значит точно решил и первую.

Ответ: 1) 23; 2) 2; 7; да.

Задача 18. На контрольной работе группе студентов из 31 человека были предложены три задачи. Первую решили 17 человек, вторую — 19, третью — 11. Первую и вторую решили 10 человек, первую и третью — 4, вторую и третью — 7. Сколько человек решили все три задачи, если известно, что двое не решили ни одной?

Ответ: 3.

Задача 19. Среди сотрудников фирмы 17 человек знают английский язык, 10 — немецкий, 7 — французский. Английский и французский знают 3 человека, немецкий и французский — 2, английский и немецкий — 4.

1) Сколько человек работает в фирме, если каждый знает хотя бы один иностранный язык, а два человека знают все три языка?

2) Сколько сотрудников, не знающих ни одного иностранного языка, если в фирме работает 30 человек и никто из них не знает всех трёх языков?

Ответ: 1) 27; 2) 5.

Литература

[1] Алексеев В. Е., Захарова Д. В., Мокеев Д. Б., Смирнова Т. Г. Сборник задач по дискретной математике. В 2-х ч. Практикум. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, 2019. — 56 с.

URL: https://e.lanbook.com/book/431426

[2] Алексеев В. Е. Дискретная математика. Учебное пособие. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, 2017. — 139 с. [Электронный ресурс]

URL: http://www.unn.ru/books/met_files/Alekseev.pdf

[3] Андерсон Д. А. Дискретная математика и комбинаторика. Пер. с англ. — Издательский дом «Вильямс», 2004. — 960 с.

[4] Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2010. — 400 с.

[5] Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2009. — 416 с.

[6] Шульц М. М. Комбинаторика. Спецкурс. Учебное пособие. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, 2009. — 167 с.

Поступила 14.12.2024

COMBINATORICS IN THE COURSE OF DISCRETE MATHEMATICS

D. V. Zakharova, D. B. Mokeev, S. V. Sidorov, T. G. Smirnova

A brief theoretical material on combinatorics is presented and a selection of tasks for conducting verification work on combinatorics is proposed.

Keywords: discrete mathematics, combinatorics.