

СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 512.643.2

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИЗЛОЖЕНИЯ
ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

С. И. Веселов

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия*

`sveselov@itmm.unn.ru`

Описан способ изложения теории определителей. В частности, приводится одно элегантное доказательство теоремы Лапласа, редко встречающееся в учебной литературе.

Ключевые слова: определитель, формулы Крамера, теорема Лапласа.

Что такое детерминант?

Если долго про это думать, то
можно придумать определитель.

Студенческий фольклор

Как рассказать вчерашнему школьнику об определителе (детерминанте) матрицы? С чего начать?

Конечно, с решения методом исключения неизвестных совместной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2. \end{cases}$$

Внимательно присмотреться к значениям неизвестных:

$$x_1 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad x_2 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (1)$$

Обнаружить в числителях и знаменателях значения следующей функции (впоследствии названную *детерминантом*), определённой на множестве квадратных матриц второго порядка:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad (2)$$

и превратить формулы (1) в знаменитые формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (3)$$

Что дальше? Можно решить методом исключения систему из трёх уравнений с тремя неизвестными и обнаружить закономерности в числителях и знаменателях значений неизвестных. Записать формулу детерминанта матрицы третьего порядка. Из сравнения формул для детерминантов матриц второго и третьего порядка извлечь индуктивное определение детерминанта квадратной матрицы любого порядка. Но мы выберем менее громоздкий способ.

Зададимся вопросом: какими свойствами обладает детерминант второго порядка?

Два свойства очевидны: значение детерминанта равно нулю, если столбцы равны или когда один из столбцов состоит из нулей. А вот ещё:

$$\begin{vmatrix} x'_1 + x''_1 & y_1 \\ x'_2 + x''_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 & y_1 \\ x'_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x''_1 & y_1 \\ x''_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} tx_1 & y_1 \\ tx_2 & y_2 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (7)$$

Открытие этих свойств привело к следующим открытиям:

1. Формулы (3) можно вывести, используя только (!) свойства детерминанта (4)–(6). Например, для нахождения x_1 достаточно преобразований:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 x_2 & b_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 & b_2 \end{vmatrix} = \quad (8)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x_1 & b_1 \\ a_2x_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x_2 & b_1 \\ b_2x_2 & b_2 \end{vmatrix} = \quad (9)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x_1. \quad (10)$$

2. Свойства (4) – (7) получены из формулы (2), но и формула (2) выводится из свойств (4) – (7):

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & y_1 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1y_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + x_1y_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + x_2y_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + x_2y_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

3. Равенства (4) – (7) легко обобщить для квадратных матриц любого порядка, объявив детерминантом матрицы числовую функцию, удовлетворяющую соответствующим обобщениям свойств (4) – (7).

4. Из свойств детерминанта можно вывести формулу

$$|A| = \sum_{\pi} a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} \dots a_{i_nj_n} (-1)^{\sigma(\pi)}, \quad (11)$$

где $\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ пробегает все подстановки множества $\{1, 2, \dots, n\}$, а $\sigma(\pi)$ равно числу инверсий в π .

5. Преобразования, аналогичные преобразованиям (8) – (10), осуществимы с любыми квадратными матрицами, следовательно, формулы Крамера верны для любых совместных квадратных систем линейных уравнений с ненулевым определителем матрицы коэффициентов при неизвестных.

Теорема Лапласа

Будем кратки. Мир перенаселён
словами.

Станислав Ежи Лец

Формулой (11) можно было бы закончить краткий рассказ об определителе, если бы не одно но. Вычислять определитель по этой формуле очень сложно при $n \geq 4$. При больших n явно или неявно используется теорема Лапласа.

Теорема Лапласа. Пусть

$$\alpha = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset N = \{1, 2, \dots, n\}, \bar{\alpha} = N \setminus \alpha.$$

Тогда

$$|A| = \sum_{\beta} |A_{\beta}^{\alpha}| |A_{\beta}^{\bar{\alpha}}| (-1)^{i_1+j_1+\dots+i_k+j_k}, \quad (12)$$

где суммирование происходит по всем k -элементным подмножествам $\beta = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subset N$, $\bar{\beta} = N \setminus \beta$, A_{β}^{α} — подматрица, строки и столбцы которой пронумерованы соответственно числами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Доказательство. Поскольку

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} = (a_{i_1 j_1} \dots a_{i_k j_k}) (a_{i_{k+1} j_{k+1}} \dots a_{i_n j_n}),$$

то модуль каждого члена $|A|$ встречается ровно в одном модуле произведения членов $|A_{\beta}^{\alpha}|$ и $|A_{\beta}^{\bar{\alpha}}|$. Осталось доказать, что знаки этих величин совпадают, если сумма $s = i_1 + j_1 + \dots + i_k + j_k$ чётна, и противоположны, если сумма нечётна.

Пусть $\pi_1 = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} i_{k+1} & \dots & i_n \\ j_{k+1} & \dots & j_n \end{pmatrix}$. Вычислим число инверсий, например, в верхней строке подстановки $\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$:

1. Число инверсий вида (i_u, i_v) , где $u, v \leq k$, равно $\sigma(i_1, i_2, \dots, i_k)$.
2. Число инверсий вида (i_u, i_v) , где $u, v > k$, равно $\sigma(i_{k+1}, \dots, i_n)$.
3. Выведем формулу для числа S инверсий вида (i_u, i_v) , где $u \leq k < v$. Предположим, что $i_{u_1}, i_{u_2}, \dots, i_{u_k}$ — упорядоченный по возрастанию список элементов множества $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Нетрудно убедиться в том, что для всякого $1 \leq m \leq k$ число инверсий вида (i_{u_m}, i_v) при $v > k$ равно $i_{u_m} - m$. Следовательно,

$$S = \sum_{m=1}^k (i_{u_m} - m) = \sum_{m=1}^k i_{u_m} - \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{m=1}^k i_m - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Таким образом,

$$\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n) = \sigma(i_1, i_2, \dots, i_k) + \sigma(i_{k+1}, \dots, i_n) + \sum_{m=1}^k i_m - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Аналогично, для нижней строки подстановки π получим

$$\sigma(j_1, j_2, \dots, j_n) = \sigma(j_1, j_2, \dots, j_k) + \sigma(j_{k+1}, \dots, j_n) + \sum_{m=1}^k j_m - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Тогда, $\sigma(\pi) = \sigma(\pi_1) + \sigma(\pi_2) + i_1 + j_1 + \dots + i_k + j_k - k(k+1)$. Осталось заметить, что $k(k+1)$ — чётное число. ■

Заключение

Описанный способ изложения теории определителей сформировался после знакомства с многочисленными источниками. Приведённый ниже список литературы, в значительной степени, является случайным выбором из множества замечательных книг и руководств по алгебре.

Литература

- [1] Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. — М.: Мир, 1980. — 454 с.
- [2] Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1982. — 269 с.
- [3] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968. — 564 с.
- [4] Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984. — 416 с.
- [5] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1975. — 400 с.
- [6] Шафаревич И. Р., Ремизов А. О. Линейная алгебра и геометрия. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 512 с.
- [7] Тыртышников Е. Е. Линейная алгебра и геометрия. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 464 с.
- [8] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
- [9] Винберг Э. Б. Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 544 с.
- [10] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — 4-е изд. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
- [11] Золотых Н. Ю. Лекции по алгебре и геометрии. Глава 11. Определители. [Электронный ресурс] URL: <http://www.uic.unn.ru/~zny/algebra/lectures/lectures/11Determinants.pdf> (Дата обращения 28.12.24).

Поступила 25.12.2024

**ON A METHOD OF PRESENTING
THE THEORY OF DETERMINANTS**

S. I. Veselov

A method for presenting the theory of determinants is described. In particular, an elegant proof of Laplace's theorem, rarely encountered in educational literature, is given.

Keywords: determinant, Cramer's rule, Laplace's theorem.