ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 372.851

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О «КУРСЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ» Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦА

А. А. Флоринский

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Публикуется запись доклада А. А. Флоринского на совместном заседании Санкт-Петербургского математического общества и секции математики Санкт-Петербургского дома учёных, посвящённом 125-летию со дня рождения Г. М. Фихтенгольца (12 ноября 2013 года).

Ключевые слова: Г. М. Фихтенгольц, математический анализ, дифференциальное исчисление.

От публикаторов[1]

Александр Алексеевич Флоринский (1962 – 2023) — доцент кафедры математического анализа Санкт-Петербургского университета. Кроме курсов математического анализа для студентов различных специальностей, он преподавал общие и специальные дисциплины в Академической гимназии при СПбГУ, а также более 30 лет читал курс «Методика преподавания математики» для старшекурсников.

Методическое мастерство А. А. Флоринского нашло яркое применение в работе над 8-м изданием «Курса дифференциального и интегрального исчисления» Г. М. Фихтенгольца («Физматлит», 2001 – 2002), редактором которого он был. Кроме устранения опечаток, обнаруженных в ряде предыдущих изданий, Александр Алексеевич дополнил трёхтомник краткими комментариями, относящимися к тем местам текста, при работе с которыми у читателя могли бы возникнуть те или иные трудности.

[1] Публикация А. И. Назарова и А. А. Родионовой.

Мы предлагаем читателю запись доклада А. А. Флоринского на совместном заседании Санкт-Петербургского математического общества и секции математики Санкт-Петербургского дома учёных, посвящённом 125-летию со дня рождения Г. М. Фихтенгольца (12 ноября 2013 года)[2].

Текст доклада был расшифрован по видеозаписи и подвергся минимально необходимой редактуре. В тех местах, где А. А. Флоринский ссылался на слайды с изображением страниц «Курса», мы даём ссылки на соответствующие страницы по 5-му изданию.

Мы признательны Руслану Московичу за помощь в расшифровке фонограммы.

* * *

Добрый вечер. Я не принадлежу к тому поколению математиков, которые знали Григория Михайловича лично, и никогда не занимался профессионально историей математики. Поэтому взгляд, который я изложу, — это субъективный взгляд математика, занимающегося преподаванием и профессионально занимающегося, как все здесь, математикой, на роль трёхтомника Фихтенгольца в этих двух процессах.

Исторически развитие математики испытывало разные виды толчков. Толчками служили новые математические достижения, решения тысячелетиями или столетиями стоявших проблем. Но также толчками несколько раз в истории служило создание полного изложения того или иного участка математического материала.

Самый известный пример — «Начала» Евклида. Неизвестно, сколько там было собственных результатов Евклида, но так получилось, что эта книга не потерялась и сыграла свою роль.

Другой пример — это работы Коши и Вейерштрасса. Часть этих работ была написана с целью сделать совершенными доказательства уже известных, казалось бы, фактов.

Трёхтомник Фихтенгольца, по крайней мере для русскоязычного читателя, сыграл похожую роль. Можно уверенно утверждать, что несколько поколений математиков, живших после Григория Михайловича, испытали сильнейшее влияние этого научного труда на подход к математическому творчеству, на их математические взгляды. И хотя сейчас математические поколения меняются быстрее, чем несколько тысяч лет назад, постоянно возникало и возникает желание вновь и вновь переиздавать этот трёхтомник, несмотря на много десятилетий, прошедших после смерти Григория Михайловича Фихтенгольца.

Задача, которая была поставлена передо мной руководством математического общества, заключалась в том, чтобы как-то сформулировать ответ на вопрос: «В чём отличие трёхтомника Фихтенгольца от множества других

[2] Видеозапись этого заседания можно посмотреть на сайте www.mathnet.ru по ссылке https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=7970&option_lang=rus.

изложений, в том числе и современных? Что влечёт желание переиздавать его и что заставляет читать его снова и снова?».

Нужно заметить, что это желание не ограничивается только русскоязычным читателем. Как мне подсказали коллеги, существуют немецкие издания и польские издания, и я не знаю, все ли главы, но большое количество глав вышло на английском языке[3]. На всякий случай обложку немецкого издания мы здесь покажем. Там стоит цифра 10. Но, по-видимому, это было переиздание нашего десятого издания, а не немецкое десятое издание.

Возникает вопрос: что же там спрятано в этой книге? Что-то, видимо, чрезвычайно важное. Вот несколько слов по этому поводу я собираюсь сказать.

Во-первых, чтобы какая-то книга влияла на поколения математиков, её должно быть интересно читать. И если она посвящена введению в предмет, то, чтобы её было интересно читать профессиональным математикам, она должна содержать много интересного материала. И в данном случае я ещё раз убедился, что кто бы и как долго бы ни занимался преподаванием анализа, он обязательно найдёт в Фихтенгольце что-то новое, чего он раньше не заметил.

Недавно мы обсуждали коротко в разговоре с Виктором Петровичем [Хавиным] квазиравномерную сходимость. На следующем слайде можно видеть, что у Фихтенгольца, правда, не в первом издании книги (у Виктора Петровича, видимо, не было этого издания), есть замечание о квазиравномерной сходимости[4], где содержится полное доказательство необходимого и достаточного условия, когда поточечно сходящаяся последовательность непрерывных функций имеет непрерывный предел на компакте. На кафедре анализа известно (мне об этом сказал Анатолий Наумович Подкорытов), но в целом не так уж хорошо известно, что предельный переход под знаком интеграла у Фихтенгольца изложен тоже для поточечно сходящейся последовательности функций. Следующая теорема, принадлежащая Арцела[5], в том варианте, в котором она изложена, — это вариант теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Но только в ней требуется, чтобы функции были даже не непрерывны, а интегрируемы по Риману и только ограничены одной общей константой. И в этом случае предельный переход под знаком интеграла возможен, и там всё это написано весьма подробно.

Также считается общепринятым (мне об этом сообщил Владимир Васильевич Жук), что изложение Фихтенгольца является если не единственно полным, то, во всяком случае, самым богатым материалом по части приёмов вычисления кратных интегралов. Это конец третьего тома, перед рядами

[3] Согласно английской Википедии, имеются также переводы на китайский, вьетнамский и фарси.

[4] Т. 2, с. 435 – 436.

[5] Т. 2, с. 749.

Фурье. Ну, ряды Фурье — это самый конец тома, а это как бы конец теории интеграла, и там разнообразные упражнения, которые все у него решены. И этих упражнений там тридцать страниц. Ну, мы уж не стали их здесь показывать. Это такой богатейший и разнообразнейший материал, что читать его остаётся интересным и сейчас, и любому. То же самое, кстати, пишет в предисловии немецкий издатель: этот трёхтомник издаётся потому, что он содержит множество материала, не изложенного больше нигде.

Но это, конечно, еще не всё. Столь же важной — уже не математической, а педагогической — особенностью этой книги является уникальный арсенал педагогических и литературных приёмов, использованных при её написании.

Вот небольшой участок изложения[6], который касается начала теории пределов — предела последовательности. На этих двух страницах плотность разнообразных приёмов приблизительно постоянная и выходящая за рамки привычного их количества. Значит, что здесь можно увидеть?

Во-первых, изложение, предназначенное для математика начинающего, но готовящегося в профессионалы, должно содержать множество примеров и быть достаточно индуктивным, то есть содержать элемент перехода от частного к общему. Но вот этот элемент — от частного к общему — может быть разным. Может применяться индукция для обоснования постановки вопроса: разбираются примеры, предшествующие постановке вопроса. Может применяться индукция для показа на примерах, что тот или иной результат правдоподобен. Но есть и ещё одна индукция. Если уже результат в полной общности сформулирован, а мы хотим научить учащегося его применять, то, как ни странно, правильный подход тоже содержит специального вида индукцию. То есть, чтобы научить человека пользоваться той или иной формулой, подставлять, надо сначала показать на примерах, как в неё подставлять. Неверно, что если ему сказать: «Если подставишь, то всё будет», то оно будет. И это относится к совершенно любому результату, сколь угодной степени общности. Если содержатся примеры, как им пользоваться, то они, как бы по индукции, научают ученика, как применять далее дедукцию.

Так вот, Фихтенгольц в этом отношении уникален. У него есть все три элемента индукции. Интересно посмотреть текст. Вот первый пример после понятия предела последовательности (предела варианты)[7]:

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad x_n = \frac{-1}{n}, \qquad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Эти примеры, наверное, мы найдем в любой книге, на любом практическом занятии. Но нигде не будет вот этой фразы: «Отметим, что первая переменная всё время больше своего предела 0, вторая — всё время меньше его, третья же — попеременно становится то больше, то меньше его».

[6] Т. 1, с. 47 – 48.

[7] Т. 1, с. 48 – 49.

А в следующем примере

$$\frac{2+(-1)^n}{n}$$

мы видим последнюю фразу: «Мы сталкиваемся с любопытной особенностью: переменная поочередно то приближается к своему пределу 0, то удаляется от него».

Может быть, кому-то это покажется и банальным, но только не начинающему. Вот этот стиль и текст позволяют учащемуся вместе с автором, находясь на определённой стадии развития, уже размышлять и анализировать соответствующие математические понятия, начинать задавать свои вопросы. На самом деле, это не последний пример. Там есть некоторое продолжение, что последовательность может равняться бесконечное количество раз своему пределу, и делается из этого подробный вывод. Но смысл, видимо, здесь ясен.

Ещё одна особенность, которую можно проследить по этому тексту, заключается в специфике языка Фихтенгольца, как именно русского языка. Дело в том, что восприятие математических фактов, согласно стандартным теориям, должно происходить по тем же законам, что и восприятие любой информации. И в зависимости от ведущей репрезентативной системы получается легче, если используется визуальный язык для визуала или кинестетический для кинестетика и так далее. Так вот, в одном этом тексте можно увидеть множество как визуальных, так и кинестетических ключевых слов, которые, согласно исследованиям психологов, и отвечают за облегчение восприятия. Тот, кто склонен к визуальному восприятию, может быть, пропустит часть, он увидит[8], что начиная с некоторого n там должно выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Можно говорить «начиная со сколь угодно большого n», а можно говорить «со сколь угодно далекого n». Дальнейшие мои наблюдения по этой части — они достаточно поверхностны, но вы можете увидеть здесь выражение «порочный круг»[9], где автор объясняет, что нельзя определять бесконечно малую через имеющую предел, а имеющую предел через бесконечно малую. Тем не менее, понятие вполне визуальное, даже, я бы сказал, эстетическое.

Но очень много и временны́х терминов: «процесс», «переменная, которая лишь в процессе своего изменения способна сделаться меньше произвольно взятого числа ε». В общем, все желающие могут внимательно перечитать — и здесь, как и в других местах у Фихтенгольца, множество ещё и кинестетических терминов, которые помогают учащемуся воспринимать материал как бы на ощупь: он чувствует, как эта последовательность изменяется и приближается к своему пределу.

По-видимому, общее количество разнообразных приёмов изложения особенно подробно никем не исследовалось. Я узнал, в частности, от Дениса Ар-

---

[8] Т. 1, с. 47.

[9] Т. 1, с. 48.

темьевича Владимирова такой пример. Денис Артемьевич вёл долгое время на матмехе методику преподавания и рассказывал о том, как надо начинать изложение темы «равномерная сходимость», противопоставляя два подхода.

Один подход — можем сказать, что такое поточечная сходимость, а потом сказать, что N может быть одним для всех x, а может быть не одним для всех x. Получим определение равномерной сходимости, приведём примеры, что это разные вещи, и пойдём дальше, получать свойства.

Возможен другой подход — можно сказать, что мы изучали пределы последовательностей функций. Но если у вас есть последовательность функций, то предел может быть как по x, так и по n. То же ли самое мы получим, если мы сначала перейдём к пределу по x, а потом по n, или наоборот? И дальше мы рассматриваем классический пример x^n или примеры, которые написаны у Фихтенгольца, имеющие ту же цель. И видим, что, оказывается, разница довольно большая. А с другой стороны, полезно, конечно, когда предельные переходы можно переставлять. Так вот, их можно переставлять тогда, когда имеется так называемая равномерная сходимость, к изучению которой мы и переходим. На современном языке это, видимо, называется «использование вводных масштабирующих фреймов», но тем не менее очень мало где можно увидеть примеры этого использования в таком количестве, как у Фихтенгольца.

Приблизительно такое мнение сложилось в результате изучения и подготовки этого трёхтомника к переизданию.

И в заключение я хотел бы ещё чуть-чуть сказать об одной особенности его языка, которая может представляться более спорной и которая была обнаружена после специальных бесед со специалистами по языковедению.

Дело в том, что у нас в семье оказался экземпляр трёхтомника Фихтенгольца с его дарственной надписью личной, подаренный Сергею Евгеньевичу Ляпину, с которым он работал в педагогическом институте. А некоторые из потомков Сергея Евгеньевича занимаются профессионально языковедением, и вот оттуда-то и пришла идея о форме всего трёхтомника Фихтенгольца. Мы не можем сказать, что он *является*, но, во всяком случае, он имеет черты сходства с литературным произведением в крупной форме, а именно романом или эпопеей. Ну, совсем уж узкие специалисты по языкознанию иногда очень сильно отличают роман и эпопею, но для тех, кто ближе к математике, разница не так уж и велика. Что там общего с романом и эпопеей? Роман, считают языковеды, всегда хорошо воспринимается в том случае, если читающий начинает отождествлять себя с героем романа и лучше понимать его действия. Но для этого, во-первых, у романа должен быть один герой в течение всего повествования, и должен быть показан очень большой участок его жизни, его взаимоотношения с разнообразным окружением. А кроме того, у романа бывает авторизованный текст — текст повествователя, а не автора, который как бы не знает, что будет потом. И вот именно это можно постоянно наблюдать в книге Фихтенгольца. Вопрос: кто там главное действующее лицо? По всему похоже, что главным действующим лицом является всё же переменная.

Введение содержит рассказ, так сказать, о дальних родственниках этого действующего лица, о предках — о вещественных числах. Классическое, в стиле французского романа, суховатое введение, которое можно пропустить. Дальше уже сам главный герой выступает на сцену и в течение всего трёхтомника является главным. Это-то и создаёт некоторую трудность при попытке осовременить изложение. С одной стороны, для части читающих это большой плюс. Отсутствует теоретико-множественная символика, отсутствует логическая символика. Хотя слова «любое» и «существует», конечно, есть, но они на русском языке все. Но трудность не в этом. Главное лицо — переменная. Такого действующего лица у нас почти нет в формальном понимании. Но если изучать дальше, то можно (и у Фихтенгольца есть на это указания) считать при желании, что это функция. То, что варианты есть частные случаи функций, у него прописано чёрным по белому.

А что касается возможности читателю как бы отождествлять себя с героем романа — так это одна из основных особенностей всего изложения. На каждом шаге, как мы уже видели на слайде про предел, Фихтенгольц обязательно представляет себе, что бы мог спросить читатель, когда он знает только то, что он прочитал. И это — и особенность романа, и один из многочисленных приемов Фихтенгольца, которые можно продолжать изучать многие десятилетия.

Поступила 30.06.2024

SOME REMARKS ON THE "COURSE OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS" BY G. M. FICHTENHOLZ

A. A. Florinskii

(published by A. I. Nazarov and A. A. Rodionova)

We publish the text of the talk by A. A. Florinskii (1962 – 2023) at the joint meeting of the St. Petersburg Mathematical Society and the Mathematics Section of the St. Petersburg House of Scientists (November 12, 2013). This meeting was dedicated to the 125th anniversary of G. M. Fichtenholz.

Keywords: G. M. Fichtenholz, Analysis, Differential Calculus.