

СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 519.21

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
КЕЙС-ТЕХНОЛОГИИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

Е. Б. Титова

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия*

`elena.titova@itmm.unn.ru`

Рассмотрены практические аспекты применения кейс-технологии для курса алгебры бакалавриата ИТ-специальностей. Представленный кейс направлен на закрепление и углубление знаний бакалавров по теме решения системы линейных неоднородных уравнений различными методами: методом Жордана–Гаусса, методом Крамера, методом обратной матрицы. Формируется умение выбирать для решения наиболее подходящий и менее трудозатратный способ решения.

Ключевые слова: кейс-технологии, системы линейных неоднородных уравнений, метод Жордана–Гаусса, метод Крамера, обратная матрица.

1. Введение

Данный кейс разработан для обучения бакалавров направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» в рамках предмета «Практикум по алгебре и геометрии». В ходе работы с кейсом обучающиеся разбиваются на группы 6–7 человек, каждая группа получает одинаковые задания для решения. Студенты уже имеют навык решения систем линейных неоднородных уравнений, имеющих единственное решение, разными способами. Данное занятие можно рассматривать как закрепляющее и обобщающее пройденный материал.

Студентам необходимо сопоставить трудоёмкость решения систем линейных неоднородных уравнений по затраченному времени решения, по количеству операций и сделать выводы о целесообразности применения того или иного метода для решения конкретной системы линейных неоднородных уравнений. Данный кейс содержит в себе ситуацию для отработки ключевой задачи курса. Применяется игровое проектирование, студенты разрабатывают исследовательско-аналитический проект (см., напр., [1, 2]).

Цель кейса: повышение навыков решения систем линейных неоднородных уравнений, знакомство с понятием трудоёмкости алгоритма, повышение заинтересованности студентов в предмете.

Задачи кейса:

- 1) актуализация знаний по линейной алгебре;
- 2) тренировка умений выдвигать обоснованные решения;
- 3) выбор наилучшего метода решения систем линейных неоднородных уравнений с невырожденной матрицей;
- 4) подготовка отчёта о полученном результате.

2. Описание кейса

Студентам предлагается решить на время следующие системы линейных неоднородных уравнений с невырожденной матрицей методом обратной матрицы, методом Крамера и методом Жордана–Гаусса.

Студенты внутри группы распределяют системы между собой, каждый студент решает одну систему тремя способами. Перед ними ставится задание: учесть время решения одной и той же системы линейных неоднородных уравнений разными способами, выписать это время и ответы в таблицу, предоставить рекомендации по выбору способа решения в зависимости от вида системы линейных уравнений и сравнить с оценкой количества арифметических операций при решении системы разными способами.

В качестве примерных заданий кейса предлагается решить следующие системы линейных уравнений (см., напр., [3, 4]) (одинаковые задания раздаются в каждую группу):

1.
$$\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 74, \\ 9x + 2y - 3z = -60, \\ 7x + 5y + 3z = 22; \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i, \\ (4 + 2i)x + (2 + 3i)y = 5 + 4i; \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x \cos \alpha - y \sin \alpha = \cos \beta, \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin \beta; \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 2ax - 3by + cz = 0, \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc, \text{ где } abc \neq 0, \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc; \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2 - 3x_4 = 6, \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -10, \\ -x_1 + 3x_3 + 6x_4 = 3; \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} -22x_1 + 38x_2 = -234, \\ -19x_1 + 35x_2 = -213. \end{cases}$$

Основные вопросы, на которые студенты должны дать ответ:

1. Решите каждую систему линейных уравнений, выпишите ответ.
2. Какое время потрачено на решение каждой системы каждым из трёх способов?
3. Какие типы систем линейных уравнений можно выделить в зависимости от коэффициентов системы?
4. Предоставьте рекомендации по выбору способа решения в зависимости от вида коэффициентов системы линейных уравнений и размерности системы линейных уравнений.
5. *Дополнительный вопрос:* возможно ли решать неоднородную систему линейных уравнений методом Крамера, если матрица системы невырожденная?

Результаты измерений предлагается занести в таблицу:

Номер СЛУ	Ответ	Время, затраченное на решение системы			Вывод о лучшем способе решения
		методом Жордана–Гаусса	методом Крамера	методом обратной матрицы	
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					

После выполнения задания студенты публично обсуждают полученные результаты в разных группах и делают выводы о целесообразности применения того или иного метода решения в зависимости от вида системы. Затем студентам предоставляется следующая информация (см., напр., [5, 6]) для сравнения с полученными ими результатами и обсуждения всей группой.

Метод Жордана–Гаусса для решения квадратной системы линейных уравнений порядка n использует $n^3 + O(n)$ арифметических операций.

Метод Крамера для решения квадратной системы линейных уравнений порядка n использует $n^4 + O(n)$ арифметических операций.

Метод обратной матрицы для решения квадратной системы линейных уравнений порядка n использует $2n^3 + n^2 + O(n)$ арифметических операций.

По итогам занятия формулируются следующие рекомендации:

— для решения систем линейных неоднородных уравнений с невырожденной матрицей метод Жордана–Гаусса эффективнее использовать для систем с числовыми коэффициентами, начиная с порядка $n \geq 3$;

— метод Крамера эффективно использовать для систем с буквенными или большими коэффициентами;

— метод обратной матрицы эффективно использовать для систем с буквенными коэффициентами, начиная с порядка $n \geq 3$.

3. Методические рекомендации

Занятие рекомендуется построить следующим образом:

1) Повторение пройденного материала (фронтальный опрос). Уточнение основных этапов решения систем линейных неоднородных уравнений:

- методом Жордана–Гаусса,
- методом Крамера,
- с помощью нахождения обратной матрицы.

(10–15 минут)

2) Разделение студентов на группы и выдача заданий. Группы формирует преподаватель, в каждой группе студенты разного уровня подготовки.

(5 минут)

3) Студенты распределяют полученные системы линейных уравнений между собой, решают их разными способами, отмечают время решения. Важно, чтобы одну и ту же систему решал один человек. В ходе решения студенты консультируются друг с другом внутри группы. Преподаватель не даёт консультаций по методам решения, но оказывает помощь в организации работы в случае необходимости, поддерживает деловой настрой, следит за порядком. На решение отводится 70 минут.

4) После получения решения студенты заполняют таблицу. Обсуждают в группе идеи по решению кейса. Преподаватель следит за вовлеченностью каждого студента в процесс анализа кейса. (30 минут)

5) Каждая группа публично представляет свой вариант решения проблемы, вырабатываются общие рекомендации по выбору метода решения систем линейных неоднородных уравнений с невырожденной матрицей. Затем происходит сравнение полученных решений кейса с трудоёмкостью каждого метода, который оценивает количество арифметических операций. Вычисляется оценка количества операций для $n = 2, 3, 4$. Подсчитывается количество арифметических операций, выполненных студентами, при решении конкретных систем линейных уравнений. (40 минут)

6) Преподаватель совместно со студентами формулирует выводы об эффективности проделанной работы. Преподаватель оценивает каждого студента. (10 минут)

Итого на проведение занятия отводится 4 академических часа (сдвоенное занятие).

Критерии оценивания:

Студенты, правильно решившие систему линейных уравнений, получают 45 баллов.

Студенты, заполнившие таблицу, получают 15 баллов.

Студенты, сформулировавшие рекомендации по выбору метода решения систем линейных уравнений, получают 20 баллов.

Студенты, рекомендации которых совпадают с оценками на число операций, получают 20 баллов.

Оценку «превосходно»¹ получают студенты, набравшие 100 баллов и продемонстрировавшие оригинальность, наличие собственных взглядов на решение проблемы.

Оценку «отлично» получают студенты, набравшие 85–100 баллов.

Оценку «очень хорошо» получают студенты, набравшие 75–84 баллов.

Оценку «хорошо» получают студенты, набравшие 60–74 баллов.

Оценку «удовлетворительно» получают студенты, набравшие 45–59 баллов.

Оценку «неудовлетворительно» получают студенты, набравшие менее 45 баллов.

Заключение

Использование рассмотренной педагогической технологии позволяет активировать исследовательский потенциал студентов, сформировать компетенции командной работы, коммуникации, системного и критического мышления.

Анализ результатов применения данного кейса позволяет с уверенностью сказать, что уровень усвоения учебного материала студентами значительно возрастает. Обучающиеся быстрее находят способ решения систем линейных неоднородных уравнений, используя наиболее оптимальный метод получения решения.

Литература

- [1] Педагогические технологии в 3 ч. Часть 1. Образовательные технологии: учебник и практикум для вузов / под общей редакцией Л. В. Байбородовой, А. П. Чернявской. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 258 с.
- [2] Попова С. Ю., Пронина Е. В. Современные образовательные технологии. Кейс-стади: учебное пособие для вузов. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 126 с.
- [3] Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 476 с.
- [4] Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 288 с.
- [5] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 736 с.
- [6] Белов С. А., Золотых Н. Ю. Численные методы линейной алгебры: лабораторный практикум. — Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2005. — 264 с.

Поступила 05.10.2023

¹В ННГУ им. Н. И. Лобачевского используется семибальная система оценивания знаний студентов (приказ ректора ННГУ № 229-ОД от 10 октября 2002 года)

**AN EXAMPLE OF USING CASE-TECHNOLOGY
IN AN ALGEBRA COURSE**

E. B. Titova

The practical aspects of using case technology for an undergraduate algebra course in IT specialties are considered. The presented case is aimed at consolidating and deepening the knowledge of bachelors on the topic of solving a system of linear inhomogeneous equations using various methods: the Jordan–Gauss method, the Cramer method, the inverse matrix method. The ability to choose the most suitable and less labor-intensive method of solution is formed.

Keywords: case-technology, systems of linear inhomogeneous equations, Jordan-Gauss method, Cramer method, inverse matrix.