ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

УДК 512.542.7

РАЗБОР ЗАДАНИЯ О ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК

В. А. Лецко

Волгоградский гос. социально-педагогический университет, Волгоград, Россия

val-etc@yandex.ru

В статье представлен разбор заданий, связанных с группами подстановок. Эти задачи были предложены для самостоятельного исследования в прошлом номере журнала. Рассмотрены также некоторые обобщения разбираемых задач.

Ключевые слова: Подстановки, группа подстановок.

1. Исследовательское задание из прошлого выпуска журнала

Рассматриваемые задачи посвящены группам подстановок. Речь пойдёт не о комбинаторных свойствах подстановок (при рассмотрении с таких позиций их чаще называют перестановками), а о вопросах, возникающих именно при рассмотрении подстановок как алгебраических объектов.

Как известно, относительно операции умножения (композиции) множество подстановок образует группу. Однако, для решения большинства задач не потребуется углублённых знаний из теории групп. Хватит умения оперировать с подстановками, используя их представление в виде произведения независимых циклов. Из более глубоких фактов могут оказаться полезны теоремы Силова. Также будут полезны некоторые факты из теории чисел и несложные комбинаторные рассуждения.

Во всех предлагаемых задачах группа подстановок n-элементного множества (мы всегда будем полагать, что в себя биективно отображается множество $\{1, 2, \ldots, n\}$) обозначается через S_n.

1. Существует ли такое натуральное число n, для которого максимальные порядки элементов в группах S_n и S_{n+3} совпадают?
2. Опишите все натуральные числа n, для которых множества всех возможных порядков элементов в группах S_n и S_{n+1} совпадают?

3. При каком наименьшем n в группе S_n есть подгруппа порядка 21?
4. Существуют ли такие натуральные числа n и k, что мощность множества всех k-х степеней элементов S_n равна $\frac{n!}{2}$ и при этом k нечётно?
5. При каком наименьшем n существует подстановка $a \in S_n$, для которой уравнение $x^{2023} = a$ имеет более одного решения в S_n? Сколько решений может иметь данное уравнение для этого n?
6. Существует ли подстановка $a \in S_{100}$, для которой уравнение $x^2 = a$ имеет 100 решений в S_{100}?

2. Некоторые предварительные сведения о группах подстановок

Обоснование приведённых ниже фактов и утверждений можно найти, например, в [1]. Напомним, что *подстановкой* называется биективное отображение конечного множества в себя. Если исходное множество состоит из n элементов, то, не теряя общности, можно считать, что это множество $\{1, 2, \ldots, n\}$. Множество всех перестановок обозначается S_n и, очевидно, содержит $n!$ элементов.

Произведением подстановок называют результат их последовательного выполнения (композицию соответствующих функций). Относительно операции умножения множество S_n является группой.

Каждая подстановка может быть записана в виде произведения *независимых* (не имеющих общих элементов) *циклов*. При такой записи элементы каждого цикла заключаются в скобки. После каждого элемента указывается его образ при данной подстановке (образом элемента, стоящего перед закрывающей скобкой, является элемент, стоящий после открывающей). Одноэлементные циклы при записи принято опускать.

Например, запись $a = (136)(274)$ означает, что $a(1) = 3$, $a(3) = 6$, $a(6) = 1$, $a(2) = 7$, $a(7) = 4$, $a(4) = 2$, $a(5) = 5$.

Тождественная подстановка (e), переводящая каждый элемент в себя, очевидно, является нейтральным элементом группы.

Порядком элемента группы называется наименьший натуральный показатель степени, при возведении в которую получается нейтральный элемент группы. Порядок цикла, очевидно, равен его длине, а порядок произвольной подстановки — наименьшему общему кратному (НОК) длин независимых циклов.

Максимальный порядок элемента группы S_n равен наибольшему возможному НОК слагаемых при представлении числа n в виде суммы натуральных слагаемых. Это число обозначается $g(n)$ и называется *функцией Ландау* (в честь математика Эдмунда Ландау).

Элементы a и b произвольной группы G называются *сопряжёнными*, если существует такой элемент x, что $b = x^{-1}ax$.

Известно (см., например, [1, стр. 35]), что два элемента S_n *сопряжены* тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый цикловой вид, то есть одинаковое количество циклов каждой длины в представлении в виде произведения независимых циклов.

Подгруппы H и H' группы G называются *сопряжёнными*, если в G существует такой элемент x, что $H' = \{x^{-1}hx \mid h \in H\}$.

Согласно теореме Лагранжа о конечных группах, порядок любой подгруппы конечной группы делит порядок группы. В общем случае, не для любого делителя порядка группы обязана существовать подгруппа соответствующего порядка. Так, в группе S_5 нет подгрупп порядка 40, хотя 40 делит 5!. Однако, в конечной циклической группе (порождённой одним элементом) каждому делителю порядка группы соответствует ровно одна подгруппа.

Пусть G — конечная группа, p^s — максимальная степень простого числа p, делящая порядок G. Тогда:

1. В G есть подгруппы порядка p^s.
2. Любые две такие подгруппы сопряжены.
3. Количество таких подгрупп делит порядок G и сравнимо с 1 по модулю p.

Подгруппы, описанные выше, называются *силовскими*, а приведённые утверждения — одна из возможных формулировок теоремы Силова.

3. Решение первой задачи

Заметим, что функция Ландау, очевидно, является неубывающей. В самом деле, если к сумме добавить несколько слагаемых, равных 1, то НОК слагаемых не изменится. Поэтому для доказательства того, что

$$g(n) = g(n+3) = s,$$

достаточно показать, что $g(n) \geqslant s$ и $g(n+3) \leqslant s$. Покажем, что это имеет место для $n = 19$.

Поскольку $19 = 7 + 5 + 4 + 3$, то $g(19) \geqslant 420$. Остаётся показать, что число 22 нельзя представить в виде суммы с большим НОК слагаемых.

Так как сумма пяти наименьших простых чисел превышает 22, одно из пяти слагаемых должно быть равно 1 или слагаемых не должно быть больше четырёх. Но если слагаемых четыре, то все они обязаны быть нечётными, иначе, среди них будут не взаимно простые, что приведёт к резкому уменьшению НОК. Но сумма четырёх наименьших нечётных простых чисел тоже превышает 22 (и тем более превышает 20, что показывает бесперспективность представления числа 22 с двумя слагаемыми, равными 1).

Значит, слагаемых не больше трёх. Чтобы они были взаимно просты, ровно одно из них должно быть чётным. Короткий перебор показывает, что максимум НОК достигается при слагаемых $5, 8, 9$ (более плотное расположение слагаемых не позволяет обеспечить взаимную простоту). Но этот максимум равен 360, что меньше 420. Разумеется, максимум НОК для двух слагаемых ещё меньше.

Осталось рассмотреть случай, когда среди слагаемых есть 1, что равносильно разбиению числа 21 на слагаемые, большие 1. Если этих слагаемых 4, то ровно одно из них чётно. С помощью небольшого перебора убеждаемся, максимальный НОК достигается для слагаемых $11, 5, 3, 2$ и меньше 420.

Если же слагаемых, дающих в сумме 21, всего три, то все они нечётны и максимальный НОК, получаемый для слагаемых $5, 7, 9$, равен 315. Таким образом, $g(19) = g(20) = g(21) = g(22) = 420$.

Разумеется, случай совпадения значений функции Ландау для цепочки из нескольких последовательных значений аргумента не единичен, а длина таких цепочек не ограничена четырьмя числами.

Так, $g(112) = g(113) = \cdots = g(117)$. Известно, что длина подобных интервалов не ограничена сверху. Например, $g(63637)$ открывает цепочку из 20 одинаковых значений функции Ландау (см. приложение к [2, A000793]).

4. Решение второй задачи

Если в первой задаче нас интересовало совпадение максимальных порядков элементов в группах S_n для разных n, то теперь требуется совпадение всех возможных порядков. Как мы увидим, это условие гораздо более жёсткое.

Простым перебором всех возможных порядков для малых n легко убедиться, что множества порядков элементов S_5 и S_6 совпадают. Оказывается, это совпадение единственное. Доказательство этого утверждения легко следует из бинарной гипотезы Гольдбаха о том, что каждое чётное число, большее 2, есть сумма двух простых. Математики не сомневаются в истинности этого утверждения, но на сегодняшний день оно всё ещё имеет статус недоказанного.

Владислав Франк предложил изящное доказательство отсутствия совпадений множеств порядков элементов S_n при $n > 6$, опирающееся не на гипотетическое утверждение, а на усиленный постулат Бертрана.

Постулатом Бертрана называется утверждение о существовании простых чисел между числами n и $2n$ для любого натурального $n > 2$. Несмотря на слово «постулат» в названии, данное утверждение было высказано в качестве гипотезы Ж. Л. Бертраном в 1845 году.

А через 7 лет П. Л. Чебышёв доказал эту гипотезу. В дальнейшем утверждение было неоднократно усилено. Для наших целей подойдёт такое усиление: при $n \geqslant 20$ между числами n и $1.3\,n$ обязательно найдётся простое.

Пусть n — натуральное число, большее 20. Согласно, усиленному постулату Бертрана между числами $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ и $n - 7$ найдётся простое число. Вычтем из n наибольшее из таких чисел и применим аналогичные действия к полученной разности. Этот процесс продолжим до тех пор, пока разность не станет меньше 21 (но больше 6).

Заметим, что на каждом из предыдущих шагов мы вычитали различные простые числа, каждое из которых было больше 7. В то же время оставшееся после вычитаний число легко представить в виде суммы степеней различных простых чисел, не превосходящих 7. Возможные представления указаны в таблице 1.

Таблица 1

$7 = 7$	$14 = 9 + 5$
$8 = 8$	$15 = 8 + 7$
$9 = 9$	$16 = 16$
$10 = 7 + 3$	$17 = 9 + 8$
$11 = 7 + 4$	$18 = 8 + 7 + 3$
$12 = 7 + 5$	$19 = 16 + 3$
$13 = 8 + 5$	$20 = 8 + 7 + 5$

Представляя исходное число в виде суммы вычтенных ранее слагаемых и соответствующей суммы из таблицы 1, получим его разбиение на слагаемые с наименьшим общим кратным, которое по построению не может быть НОК слагаемых в разбиении числа, меньшего исходного.

Проиллюстрируем приведённый алгоритм. Например, пусть $n = 19667$. Тогда для него имеем представление $19609 + 47 + 7 + 4$ с НОК слагаемых, недостижимом ни для каких меньших n.

5. Решение третьей задачи

Очевидно, что подгруппы требуемого порядка есть в S_{21}. Достаточно взять подгруппу, порождённую циклом длины 21.

Но могут существовать подгруппы порядка 21 в S_n при $n < 21$?

Конечно! Ведь 21 — составное число. Поэтому порядок 21 будет иметь элемент (а значит и порождённая им подгруппа), являющийся произведением независимых циклов длин 3 и 7. А такие элементы существуют в S_n, начиная с $n = 10$. При $n < 10$ элемент S_n не может иметь порядок 21. Но подгруппа не обязана быть циклической.

Или обязана!? Для многих порядков, являющихся произведениями различных нечётных простых чисел, теорема Силова не допускает наличия групп, отличных от циклических.

Например, группа порядка 15 всегда является циклической. В самом деле, в такой группе обязаны присутствовать подгруппы порядков 3 и 5. По теореме Силова у 15-элементной группы не может быть больше одной подгруппы порядка 5. Если подгруппа порядка 3 тоже единственная, то элементы, не входящие ни в одну из этих подгрупп, обязаны иметь порядок 15, а это значит, что группа — циклическая.

Следующее, разрешённое теоремой Силова, количество подгрупп порядка 3 равно 4. В этом случае в группе имеется 8 элементов порядка 3 (по 2 на каждую подгруппу из трёх элементов), 4 элемента порядка 3 (каждый из них порождает одну и ту же подгруппу из 5 элементов) и нейтральный элемент, лежащий во всех подгруппах. Но $8 + 4 + 1 < 15$. Для «лишних» элементов остаётся лишь порядок 15, и, значит, группа таки циклическая (разумеется в этом случае в ней не четыре, а одна подгруппа порядка 5).

Следующее, допустимое по теореме Силова, количество подгрупп порядка 3 равно 7. Но в этом случае, количество элементов порядков 3 и 5 превысит 15, что невозможно.

Подгруппа S_n, которая нас интересует, имеет не 15 элементов, а 21. В этом случае рассуждение, приведённое выше, к противоречию не приводит.

В группе из 21-го элемента может оказаться семь подгрупп порядка 3 (это даёт 14 элементов порядка 3), одна подгруппа порядка 7 (она содержит 6 элементов порядка 7) и нейтральный элемент, принадлежащий всем подгруппам. Итого 21 элемент.

Покажем, что такая подгруппа вполне может быть реализована в S_7.

Не теряя общности, можно считать, что подгруппа порядка 7 искомой группы порождена циклом $a = (1234567)$. В нашей группе должна быть всего одна подгруппа порядка 7, поэтому элемент, сопряжённый с a, с помощью элемента, не принадлежащего циклической подгруппе порядка 7, должен переводить a в его степень. Найдём подстановку x такую, что $x(1) = 2$ и $x^{-1}ax = a^2 = (1357246)$.

Имеем:

$$\begin{aligned}
4 &= x^{-1}ax(2) = x(a(x^{-1}(2))) = x(a(1)) = x(2);\\
6 &= x^{-1}ax(4) = x(a(x^{-1}(4))) = x(a(2)) = x(3);\\
1 &= x^{-1}ax(6) = x(a(x^{-1}(6))) = x(a(3)) = x(4);\\
3 &= x^{-1}ax(1) = x(a(x^{-1}(1))) = x(a(4)) = x(5);\\
5 &= x^{-1}ax(3) = x(a(x^{-1}(3))) = x(a(5)) = x(6);\\
7 &= x^{-1}ax(5) = x(a(x^{-1}(5))) = x(a(6)) = x(7).
\end{aligned}$$

Таким образом, $x = (124)(365)$. Этот элемент наряду с $x^{-1} = x^2$ и e образует в искомой группе подгруппу порядка 3.

Чтобы получить остальные элементы порядка 3, воспользуемся тем, что подгруппы порядка 3 сопряжены.

$$a^{-1}xa = (1765432)(124)(365)(1234567) = (235)(476);$$

$$a^{-1}(235)(476)a = (175)(346);$$
$$a^{-1}(175)(346)a = (162)(457);$$
$$a^{-1}(162)(457)a = (156)(273);$$
$$a^{-1}(156)(273)a = (143)(267);$$
$$a^{-1}(143)(267)a = (137)(254).$$

Этими подстановками и обратными к ним исчерпываются 14 элементов третьего порядка, лежащих в подгруппе, содержащей a и x. Легко проверить, что вместе со степенями элемента a они образуют искомую подгруппу.

6. Решение четвёртой задачи

Что происходит с возведением цикла длины m в k-ю степень? Легко видеть, что цикл распадётся в произведение d циклов, длины $\frac{m}{d}$, где $d =$ $=$ НОД(m, k).

Известно, что при $n > 1$ ровно половина всех подстановок чётны (имеют чётное число циклов чётной длины при разложении в произведение независимых циклов). Очевидно, нечётная подстановка не может быть квадратом.

В то же время, при $n \leqslant 5$ чётная подстановка всегда является квадратом (наименьший контрпример требует двух независимых циклов разных чётных длин, а это возможно только начиная с $n = 6$). Поэтому, при $2 \leqslant n \leqslant 5$ ровно половина элементов группы являются вторыми степенями.

Но нас интересуют нечётные степени. Покажем, что подходящими n и k являются, например, 9 и 3. Это можно сделать «в лоб», перебрав возможные цикловые виды подстановок, являющихся третьими степенями в S_9, и подсчитав количество подстановок каждого вида. Однако, можно сократить перебор.

Обозначим через $W(n, k)$ количество элементов множества $\{x^k \mid x \in S_n\}$. Очевидно, $W(3, 3) = 4$. Найдём $W(6, 3)$. Не являются третьими степенями циклы длины 6 и подстановки, в разложении которых присутствуют циклы длины 3. Количество циклов длины 6 равно 5!. Это следует из более общего утверждения: m элементов можно расположить в цикл $(m - 1)!$ способами. Это утверждение обосновывается легко. Зафиксируем какой-либо элемент будущего цикла. Его образ можно выбрать $m - 1$ способом, образ образа — $m - 2$ способами и т. д.

Количество подстановок S_6, являющихся произведениями двух трёхэлементных циклов, равно 40. В самом деле, образ единицы можно выбрать

5-ю способами, а образ образа единицы — 4-мя способами. Оставшиеся 3 элемента можно расположить в цикл двумя способами. Итого $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$. Выбрать 3 элемента из 6 и расположить их в цикл можно $C_6^3 \cdot 2 = 40$ способами. Поэтому количество подстановок в S_6, содержащих ровно один трёхэлементный цикл, равно $40\,W(3,3) = 160$. Итак, не являются третьими степенями $5! + 40 + 160 = 320$ элементов S_6. А значит, $W(6,3) = 6! - 320 = 400$.

Теперь мы готовы найти $W(9,3)$. Не являются третьими степенями в S_9 все подстановки, в каноническом разложении которых есть циклы с длиной, кратной 3. Исключение составляют произведения трёх независимых циклов длины 3.

Количество циклов длины 9 равно $8! = 40320$. Количество подстановок, содержащих цикл длины 6, равно $C_9^3 \cdot 5! \cdot 3! = \frac{9!}{6} = 60480$. Количество подстановок, содержащих ровно два цикла длины 3, равно $\frac{C_9^3 C_6^3}{2} 2^2 W(3,3) = 13440$. Наконец, количество подстановок, содержащих ровно один цикл длины 3, равно $C_9^3 \cdot 2 \cdot W(6,3) = 67200$. Суммируя, получим 181440, что составляет ровно половину от 9!.

7. Решение пятой задачи

С учётом описания цикловой структуры k-х степеней, приведённого при разборе предыдущей задачи, разобраться с этой совсем просто.

$2023 = 7 \cdot 17^2$, следовательно, при $n < 7$ длины всех циклов всех подстановок из S_n взаимно просты с 2023. Поэтому при $n < 7$ возведение в 2023-ю степень является биекцией множества S_n на себя, и уравнение $x^{2023} = a$ имеет единственное решение при любом a.

А вот циклы длины 7 при возведении в 2023-ю степень переходят в e.

В S_7 таких циклов, как известно, 6!. Соответственно уравнение $x^{2023} = e$ имеет 721 решение (мы учли, что $e^{2023} = e$). Если же a является циклом длины 7, уравнение $x^{2023} = a$ не имеет решений. При остальных a это уравнение по-прежнему имеет единственное решение.

8. Решение шестой задачи

Ясно, что количество решений уравнения

$$x^{100} = a \tag{1}$$

в S_{100} зависит только от циклового вида a. Будем обозначать цикловой вид, перечисляя в квадратных скобках через запятую длины циклов (включая одноэлементные).

Пусть a имеет цикловой вид $[33, 33, 33, 1]$. Покажем, что в этом случае интересующее нас уравнение будет иметь ровно 100 решений.

Пусть $a = (a_1a_2\dots a_{33})(b_1b_2\dots b_{33})(c_1c_2\dots c_{33})$. Тогда

$$(a_1a_{18}a_2a_{19}\dots a_{33}a_{17})(b_1b_{18}b_2b_{19}\dots b_{33}b_{17})(c_1c_{18}c_2c_{19}\dots c_{33}c_{17})$$

будет единственной подстановкой циклового вида $[33, 33, 33, 1]$, являющейся решением уравнения (1).

Однако, решениями (1) могут быть и подстановки, имеющие цикловой вид $[66, 33, 1]$. Для подсчёта количества решений такого вида заметим, что два цикла длины 33 из a можно выбрать тремя способами. А объединить эти два цикла в один так, чтобы при возведении в квадрат возникали исходные два цикла, можно тридцатью тремя способами. В самом деле, чтобы получить цикл длины 66, квадрат которого равен $a = (a_1a_2\dots a_{33})(b_1b_2\dots b_{33})$, нужно в нечётные позиции поместить числа $a_1, a_2, \dots, a_{33}$, а в чётные — числа $b_1, b_2, \dots, b_{33}$, начиная с любого из них (и сохраняя цикличность). Это даёт 33 варианта. Итого, получаем $1 + 3 \cdot 33$, то есть ровно 100 решений (1).

Итак, задача решена. Но возникает вопрос, может ли подстановка a иметь иной цикловой вид. Оказывается, да. Для этого возьмём в качестве a подстановку, имеющую цикловой вид $[49, 49, 1, 1]$. Два цикла длины 49 являются квадратом единственной подстановки, имеющей цикловой вид $[49, 49]$ и 49 подстановок с цикловым видом $[98]$. Это даёт 50 вариантов. При этом оставшиеся два элемента являются квадратом транспозиции или тождественной (на двухэлементном множестве) подстановки. Таким образом, мы получили ещё один возможный цикловой вид a.

В разобранном примере мы по сути отдельно рассматривали количества решений уравнения $x^2 = (12\dots 49)(5051\dots 98)$ в S_{98} и $x^2 = e$ в S_2. А общее число решений уравнения (1) оказалось равным произведению этих количеств. Обобщим эту ситуацию.

Пусть a имеет в S_n цикловой вид $[k_1, k_1, \dots k_1, k_2, k_2, \dots k_2, \dots, k_s, k_s, \dots k_s]$, где числа k_i попарно различны. Тогда количество решений уравнения $x^2 = a$ в S_n равно произведению количеств решений уравнений $x^2 = a_i$, где a_i имеет цикловой вид $[k_i, k_i, \dots, k_i]$ в группе S_{n_i}, где n_i равно суммарной длине всех циклов длины k_i. Эти соображения позволят нам описать остальные решения уравнения (1).

Легко видеть, что 3 произведения двух транспозиций, 6 транспозиций и тождественная подстановка исчерпывают все решения уравнения $x^2 = e$ в S_4. Таким образом, их ровно 10.

Столько же решений в S_9 имеет уравнение $x^2 = a$, где a имеет цикловой вид $[3, 3, 3]$ (здесь картина аналогична нашему первому решению шестой задачи).

Уравнение $x^2 = a$, где a имеет цикловой вид $[9, 9]$, тоже имеет 10 решений, но теперь в S_{18}.

Наконец, уравнение $x^2 = a$, где a имеет цикловой вид $[10, 10]$, имеет 10 решений в S_{20}.

С учётом соображений, изложенных в предыдущем абзаце, это даёт нам возможность получить ещё 6 принципиально разных цикловых структур a, при которых у уравнения (1) будет 100 решений в S_{100}. Самих возможных цикловых видов a будет при этом значительно больше:

– $[1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 87]$. При этом вместо цикла длины 87 в a может быть несколько циклов с суммарной длиной 87. Важно лишь, чтобы длины всех циклов были нечётны и уникальны.

– $[1, 1, 1, 1, 9, 9, 3, 75]$. Циклы длин 3 и 75 можно заменить на несколько других циклов неповторяющихся нечётных длин с суммарной длиной 78.

– $[1, 1, 1, 1, 10, 10, 3, 73]$. И вновь циклы длин 3 и 73 можно заменить на несколько других циклов неповторяющихся нечётных длин с суммарной длиной 76.

– $[3, 3, 3, 9, 9, 73]$. Цикл длины 73 можно заменить на несколько циклов неповторяющихся нечётных длин с суммарной длиной 73.

– $[3, 3, 3, 10, 10, 71]$. Цикл длины 71 можно заменить на несколько циклов неповторяющихся нечётных длин с суммарной длиной 71.

– $[9, 9, 10, 10, 3, 59]$. И здесь циклы длин 3 и 59 можно заменить на несколько других циклов уникальных нечётных длин с суммарной длиной 62.

По-видимому, мы нашли все возможные цикловые виды a. Впрочем, строгого доказательства отсутствия иных у автора нет. Точные формулы и асимптотику количества решений уравнения $x^k = a$ в группе S_n для произвольного случая можно найти в работе [3].

Литература

[1] Каргаполов М. И., Мерзляко Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1977. — 240 с.

[2] Sloane N. J. A. The OEIS Foundation The on-line encyclopedia of integer sequences. 2023. url=http://oeis.org/

[3] Павлов А. И. О числе решений уравнения $x^k = a$ в симметрической группе S_n. // Матем. сборник. 1980. 112(154). 3(7). С. 380 – 395.

Поступила 24.10.2023

ANALYSIS OF THE TASK ABOUT PERMUTATION GROUPS

V. A. Letsko

The article presents an analysis of tasks related permutation groups. These tasks were proposed for independent research in the last issue of the journal. Some generalizations of the analyzed tasks are also considered.

Keywords: Permutationы, permutation group.