

ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО  
ИССЛЕДОВАНИЯ

Задачи этого номера, предлагаемые для самостоятельного решения и исследования, посвящены функциям натурального аргумента, в определении которых используются последовательные натуральные числа.

1. Для каждого натурального числа  $k$  рассмотрим функцию натурального аргумента

$$G_k(n) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n+i)}{\text{НОК}_{i=0}^{k-1}(n+i)}.$$

- (a) Каковы наименьшее и наибольшее значения  $G_k(n)$ ?  
 (b) Обозначим через  $NG(k)$  количество всевозможных значений  $G_k(n)$  при данном  $k$ . Существует ли  $k$  такое, что

$$NG(k) > NG(k+1) > NG(k+2) > NG(k+3)?$$

- (c) Докажите, что  $G_k(n)$  периодична, и найдите наименьший период функции.

2. Рассмотрим функцию натурального аргумента

$$F(n) = \frac{\text{НОК}(n+1, n+2, n+3, n+4, n+5)}{\text{НОК}(n, n+1, n+2, n+3, n+4)}.$$

- (a) Конечно ли множество значений  $F(n)$ ?  
 (b) Ограничена ли функция? Достигаются ли наименьшее и наибольшее значения  $F(n)$ ?  
 (c) Может ли функция принимать целые значения и какие?  
 (d) Какие значения достигаются более одного раза и сколько раз достигаются эти значения?

3. Для каждого натурального числа  $k$  рассмотрим функцию натурального аргумента

$$Q_k(n) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n+i)}{\sum_{i=0}^{k-1} (n+i)}.$$

- (a) При каких  $k$  все значения функции  $Q_k(n)$  будут целыми?  
 (b) При каких  $k$  множество целочисленных значений функции  $Q_k(n)$  конечно?  
 (c) Найти количество целочисленных значений  $Q_{68}(n)$ ?

Свои решения присылайте на val-etc@yandex.ru Владимиру Лецко