СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.962.22

ЛИНЕЙНАЯ НЕОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

А. В. Ласунский

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия

Alexandr.Lasunsky@novsu.ru

Приводятся различные варианты доказательства теоремы об отыскании частного решения линейной неоднородной системы разностных уравнений с постоянной действительной матрицей коэффициентов и неоднородностью специального вида. Рассмотрен вопрос, когда решение указанного вида единственно, а также возможность понижения степени векторного многочлена в виде частного решения. Приведены задачи по этой теме для практических занятий.

Ключевые слова: линейная неоднородная система разностных уравнений с постоянными коэффициентами, вид частного решения.

Рассмотрим систему

$$y(t+1) = Ay(t) + f(t), \tag{1}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \det A \neq 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}.$$

Общее решение этой системы может быть записано в виде

$$y(t) = Y(t) + A^t \cdot C,$$

где C – столбец произвольных постоянных, а частное решение $Y(t)$ может быть найдено, например, методом вариации произвольных постоянных

$$Y(t) = A^t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} A^{-k-1} \cdot f(k).$$

Последний метод с вычислительной точки зрения довольно громоздкий. Если вектор-функция $f(t)$ имеет специальный вид, то частное решение $Y(t)$ можно найти несколько быстрее методом неопределённых коэффициентов. Аналогичные теоремы нам известны из курса дифференциальных уравнений [1, стр. 63], [2, стр. 294-295], [3, стр. 221-223]. Рассмотрим соответствующие утверждения для случая разностных уравнений. Заметим, что так как произведение собственных чисел матрицы равно её определителю, то из неравенства $\det A \neq 0$ следует, что матрица A не имеет нулевых собственных чисел.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(t) = \lambda_0^t \cdot Q_k(t), \quad \lambda_0 \in \mathbb{C},$$

где $Q_k(t)$ – векторный многочлен переменной t степени k с комплексными коэффициентами. Пусть λ_0 не является собственным числом матрицы A. Частное решение $Y(t)$ системы (1) *в этом случае можно найти в виде*

$$Y(t) = \lambda_0^t \cdot R_k(t), \tag{2}$$

где $R_k(t)$ – векторный многочлен переменной t степени k с комплексными коэффициентами. Решение указанного вида у системы (1) *единственно. Подчеркнём, что степени многочленов $Q_k(t)$ и $R_k(t)$ совпадают.*

***Замечание* 1.1.** Справедливость этой теоремы мы докажем отдельно от общего случая, когда λ_0 является собственным числом матрицы A кратности $l \geqslant 0$ (см. теорему 2). Ещё раз отметим, что в случае $l = 0$, т. е. когда λ_0 не является собственным числом матрицы A, частное решение указанного вида (2) находится единственным способом.

Доказательство. Рассуждения проведём аналогично [4, стр. 58]. Отметим, что в этой книге автор не акцентирует внимание читателя на единственность решения. Пусть

$$Q_k(t) = q_0 t^k + q_1 t^{k-1} + \ldots + q_k, \quad R_k(t) = r_0 t^k + r_1 t^{k-1} + \ldots + r_k.$$

Покажем, что числовые векторы $r_0, r_1, \ldots, r_k$ $(r_0 \neq 0)$ однозначно определяются из условия, что (2) является решением системы (1).

Подставляя $Y(t)$ в систему (1), получаем

$$\begin{aligned} &\lambda_0^{t+1}\left(r_0(t+1)^k + r_1(t+1)^{k-1} + \ldots + r_k\right) = \\ &\qquad = \lambda_0^t A(r_0 t^k + r_1 t^{k-1} + \ldots + r_k) + \lambda_0^t (q_0 t^k + q_1 t^{k-1} + \ldots + q_k). \end{aligned}$$

Сокращая на $\lambda_0^t \neq 0$, получаем

$$\begin{aligned} &\lambda_0\left(r_0(t+1)^k + r_1(t+1)^{k-1} + \ldots + r_k\right) = \\ &\qquad = (Ar_0)t^k + (Ar_1)t^{k-1} + \ldots + (Ar_k) + q_0 t^k + q_1 t^{k-1} + \ldots + q_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Приравнивая коэффициенты перед t^k, получаем

$$\lambda_0 r_0 = A r_0 + q_0 \qquad \text{или} \qquad r_0(A - \lambda_0 E) = -q_0.$$

Здесь E – единичная матрица порядка n . Так как λ_0 не является собственным числом матрицы A, то существует обратная матрица $(A - \lambda_0 E)^{-1}$ и r_0 однозначно находится при любом векторе q_0:

$$r_0 = -(A - \lambda_0 E)^{-1} \cdot q_0 \neq 0,$$

так как $q_0 \neq 0$.

Предположим, что мы нашли векторные коэффициенты $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$, $m \geqslant 1$. Покажем, что теперь коэффициент r_m тоже находится однозначно. Приравняем коэффициенты перед t^{k-m} в равенстве (3). Имеем

$$\lambda_0(r_0 C_k^{k-m} + r_1 C_{k-1}^{k-m} + \ldots + r_m) = A r_m + q_m,$$

откуда

$$r_m = (A - \lambda_0 E)^{-1} \cdot (\lambda_0 r_0 C_k^{k-m} + \lambda_0 r_1 C_{k-1}^{k-m} + \ldots + \lambda_0 r_{m-1} C_{k-m+1}^{k-m} - q_m)$$

находится однозначно при любом векторе q_m. Здесь, как обычно, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий эту теорему.

Пример 1.1. Решить систему

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} t+1 \\ t+5 \end{pmatrix} \cdot 2^t.$$

Решение. Матрица коэффициентов имеет собственные числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$. Находим соответствующие собственные векторы: $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Однородная система имеет фундаментальную матрицу

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 6^t \\ 1 & -4 \cdot 6^t \end{pmatrix}.$$

Частное решение неоднородной системы ищем в виде

$$Y(t) = R_1(t) \cdot 2^t = (r_0 t + r_1) \cdot 2^t.$$

Для нахождения неизвестных векторных коэффициентов r_0, r_1 можно подставить $Y(t)$ в рассматриваемую систему и приравнять коэффициенты при равных степенях t. Мы уже знаем, что эти коэффициенты определяются однозначно. Но мы можем воспользоваться формулами, полученными при доказательстве теоремы 1. Для r_0 и r_1 имеем

$$r_0 = -(A - \lambda_0 E)^{-1} q_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$r_1 = (A - \lambda_0 E)^{-1} \cdot (2r_0 C_1^0 - q_1) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение $Y(t)$ принимает вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} \cdot 2^t.$$

Ответ:

$$y(t) = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} \cdot 2^t + \begin{pmatrix} 1 & 6^t \\ 1 & -4 \cdot 6^t \end{pmatrix} C.$$

Теорема 2. *Пусть в системе* (1)

$$f(t) = \lambda_0^t \cdot Q_k(t), \quad \lambda_0 \in \mathbb{C},$$

где $Q_k(t)$ — векторный многочлен переменной t степени k с комплексными коэффициентами. Пусть λ_0 является собственным числом матрицы A кратности $l \geqslant 0$, причём $l = 0$, если λ_0 не является собственным числом матрицы A. Частное решение $Y(t)$ системы (1) *в этом случае можно найти в виде*

$$Y(t) = \lambda_0^t \cdot R_{k+l}(t), \tag{4}$$

где $R_{k+l}(t)$ — векторный многочлен переменной t степени не выше $k + l$ с комплексными коэффициентами.

Рассмотрим сначала несколько замечаний и примеров к этой теореме, а затем приведём два доказательства теоремы 2.

Замечание 2.1. На практике теоремами 1 и 2 пользуемся, когда λ_0 и коэффициенты векторного многочлена $Q_k(t)$ действительны. Утверждение теоремы 2 для случая комплексных коэффициентов мы будем использовать в дальнейшем при доказательстве теоремы 5.

Замечание 2.2. Может оказаться, что частное решение $Y(t)$ системы (1) даже в случае $l \geqslant 1$ имеет вид $Y(t) = \lambda_0^t \cdot R_k(t)$. Обратим внимание на степень векторного многочлена. Решение такого вида не является единственным. Почему это может произойти? Рассмотрим следующий пример.

Пример 2.1. Решить систему

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 2^t.$$

Решение. Матрица коэффициентов имеет собственные числа: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ и соответствующие собственные векторы: $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Однородная система имеет фундаментальную матрицу

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2^t & 3^t \\ 2^t & 2 \cdot 3^t \end{pmatrix}.$$

Для отыскания частного решения исходной системы сделаем искусственное преобразование, которое приведёт матрицу коэффициентов к жордановой форме. Из дальнейших рассуждений будет ясно, почему уменьшается степень векторного многочлена в виде частного решения.

Сделаем в системе замену

$$y(t) = (\gamma_1 \gamma_2) u(t) = S u(t),$$

получим

$$S u(t+1) = A S u(t) + f(t)$$

или

$$u(t+1) = (S^{-1} A S) u(t) + S^{-1} f(t).$$

Матрица $S^{-1}AS$ имеет жорданову форму $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Так как

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

то приходим к системе

$$u(t+1) = B u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2^t$$

или

$$\begin{cases} u_1(t+1) = 2 u_1(t), \\ u_2(t+1) = 3 u_2(t) + 2^t. \end{cases}$$

В первом уравнении с $\lambda_1 = 2$ неоднородность исчезла. Система имеет частное решение $\tilde{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2^t \end{pmatrix}$, тогда исходная система имеет частное решение

$$Y(t) = S \tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot 2^t,$$

которое при желании может быть преобразовано к виду

$$\tilde{Y}(t) = Y(t) + 2\gamma_1 2^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2^t.$$

Ответ:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2^t + \begin{pmatrix} 2^t & 3^t \\ 2^t & 2 \cdot 3^t \end{pmatrix} \cdot C.$$

Теперь мы легко построим систему более высокого порядка с нужным свойством.

Пример 2.2. Система

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2^t \end{pmatrix}$$

имеет частное решение

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2^t \end{pmatrix},$$

хотя $k = 0,\ l = 2$ для собственного числа $\lambda = 2$.

Замечание 2.3. В отличие от линейного уравнения с постоянными коэффициентами частное решение $Y(t)$ нужно искать в виде (4), а не в виде $Y(t) = \lambda_0^t \cdot t^l \cdot R_k(t)$. В векторном многочлене решения $Y(t)$ могут присутствовать все младшие степени переменной t.

Пример 2.3. Система

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 3^{t+1} \\ 3^t \end{pmatrix}$$

имеет частное решение

$$Y(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} \cdot 3^t,$$

$k = 0,\ l = 1$ для собственного числа $\lambda_0 = 3$.

Замечание 2.4. Если $l \geqslant 1$, то степень векторного многочлена $R_{k+l}(t)$ в формуле (4) можно уменьшить до $k + m$, где m — наивысший порядок клетки Жордана, соответствующей числу λ_0 в жордановой форме матрицы A. Уменьшение степени векторного многочлена важно с практической степени зрения, так как методом неопределённых коэффициентов нужно искать меньше неизвестных коэффициентов.

Замечание 2.5. Если $l \geqslant 1$, то решение вида (4) не является единственным.

Действительно, если $l \geqslant 1$, то однородная система $z(t+1) = Az(t)$ имеет частное решение вида $\tilde{z}(t) = \gamma_{l-1} \cdot \lambda_0^t$, где $\gamma_{l-1}(t)$ — векторный многочлен степени не выше $l - 1$. По свойству решений линейной неоднородной системы сумма

$$Y(t) + \tilde{z}(t) = (R_{k+l}(t) + \gamma_{l-1}(t)) \cdot \lambda_0^t$$

снова является частным решением неоднородной системы. Последнее означает, что коэффициенты векторного многочлена в формуле (4) не могут определяться однозначно.

Из первого доказательства теоремы 2 ясно будет, что степень векторного многочлена $k+l$ можно уменьшить до $k+m$, о чём сказано в замечании 2.4. В дальнейшем доказательстве теоремы 2 нам понадобятся следующие две теоремы.

Теорема 3 (о жордановой форме матрицы). *Для любой квадратной матрицы A существует неособая матрица S такая, что $S^{-1}AS$ имеет жорданову форму*

$$B = diag[B_1, B_2, \ldots, B_p],$$

где

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, p,$$

клетки Жордана, соответствующие собственным числам λ_i матрицы A. Собственному числу λ_i кратности l соответствует одна или несколько клеток Жордана, суммарный порядок которых равен l. Количество клеток, соответствующих числу λ_i, равно числу линейно независимых собственных векторов для числа λ_i. Жорданова форма единственна с точностью до порядка следования клеток Жордана.

Замечание 3.1. В некоторых курсах алгебры «косой ряд» единиц в жордановой клетке пишут под главной диагональю.

Теорема 4. ([4, стр. 33], [6, стр. 84]). *Пусть*

$$f(t) = \lambda_0^t \cdot Q_k(t),$$

$\lambda_0 \neq 0$ — комплексное число, $Q_k(t)$ — скалярный многочлен переменной t степени k с комплексными коэффициентами. Пусть λ_0 является характеристическим числом кратности $l \geqslant 0$ однородного уравнения

$$Lz(t) \equiv z(t+n) + a_1 z(t+n-1) + \ldots + a_n z(t) = 0,$$

$$a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,\ a_n \neq 0,\ t \in \mathbb{N}_0.$$

В этом случае неоднородное уравнение $Ly(t) = f(t)$ имеет частное решение вида

$$Y(t) = t^l \cdot B_k(t) \cdot \lambda_0^t,$$

где $B_k(t)$ — многочлен переменной t степени k с комплексными коэффициентами. Решение указанного вида единственно.

Первое доказательство теоремы 2. Пусть S – матрица, приводящая A к жордановой форме. Сделаем в системе (1) замену $y(t) = Su(t)$, получим

$$Su(t+1) = ASu(t) + f(t),$$

откуда

$$u(t+1) = (S^{-1}AS)u(t) + S^{-1}f(t)$$

или

$$u(t+1) = Bu(t) + \tilde{f}(t). \tag{5}$$

Заметим, что

$$\tilde{f}(t) = S^{-1}(\lambda_0^t Q_0(t)) = \lambda_0^t \tilde{Q}_k(t).$$

Степень векторного многочлена $\tilde{Q}_k(t)$ не изменилась, так как $\det S^{-1} \neq 0$, но некоторые компоненты $\tilde{Q}_k(t)$ могут быть равны 0. Система (5) распалась на независимые системы вида

$$v(t+1) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} v(t) + \lambda_0^t P_k(t),$$

соответствующие клеткам Жордана. Здесь $P_k(t)$ — векторный многочлен степени не выше k, возможно, тождественно равный 0. Последняя система легко решается снизу-вверх.

Пусть

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \cdots \\ v_m(t) \end{pmatrix}, \quad P_k(t) = \begin{pmatrix} p_k^{(1)}(t) \\ \dots \\ p_k^{(m)}(t) \end{pmatrix},$$

$p_k^{(i)}(t)$ — скалярные многочлены степени не выше k.

Имеем

$$v_m(t+1) = \lambda v_m(t) + p_k^{(m)}(t) \cdot \lambda_0^t. \tag{6}$$

Уравнение (6)

– либо однородное, если $p_k^{(m)}(t) \equiv 0$, тогда $\tilde{v}_m(t) \equiv 0$;
– либо в случае $\lambda \neq \lambda_0$ имеет частное решение $\tilde{v}_m(t) = \tilde{p}_k^{(m)}(t) \cdot \lambda_0^t$;
– либо в случае $\lambda = \lambda_0$ по теореме 4 при $l = 1$ имеет частное решение вида $\tilde{v}_m(t) = t \cdot \tilde{p}_k^{(m)}(t) \cdot \lambda_0^t$.

Во всех случаях $\tilde{v}_m(t) = G_{k+1}^{(m)}(t) \cdot \lambda_0^t$, степень многочлена $G_{k+1}^{(m)}(t)$ не превосходит $k+1$. Из уравнения

$$v_{m-1}(t+1) = \lambda v_{m-1}(t) + \tilde{v}_m(t) + p_k^{(m-1)}(t) \cdot \lambda_0^t = \lambda v_{m-1}(t) + p_{k+1}^{(m-1)}(t) \cdot \lambda_0^t$$

находим частное решение $\tilde{v}_{m-1}(t) = G_{k+2}^{(m-1)}(t) \cdot \lambda_0^t$, степень многочлена $G_{k+2}^{(m-1)}(t)$ не превосходит $k+2$ и т. д.

Для $\tilde{v}_1(t)$ получаем $\tilde{v}_1(t) = G_{k+m}^{(1)}(t) \cdot \lambda_0^t$.

Итак, $\tilde{v}(t) = \tilde{P}_{k+m}(t) \cdot \lambda_0^t$ или $\tilde{v}(t) \equiv 0$. Если m — наивысший порядок клетки Жордана, то с учётом того, что $\tilde{v}(t)$ — часть решения системы (5), мы приходим к выводу, что система (5) имеет частное решение вида $\tilde{u}(t) = B_{k+m}(t) \cdot \lambda_0^t$. Для частного решения исходной системы имеем $Y(t) = S^{-1}\tilde{u}(t) = R_{k+m}(t) \cdot \lambda_0^t$. Если $\lambda \neq \lambda_0$, то $l = m = 0$, и ещё раз убеждаемся в справедливости теоремы 1.

Приведём второй вариант доказательства теоремы 2. Так как в этом доказательстве мы не будем использовать понятие жордановой формы матрицы, то оно не даёт обоснование замечания 2.4 о возможности понижения степени векторного многочлена в виде частного решения.

Второе доказательство теоремы 2. Этот вариант доказательства теоремы 2 опирается на сведение линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами к одному уравнению. Для линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами соответствующее утверждение доказано в [5, стр. 107–108]. Дадим формулировку этого утверждения.

Лемма. *Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n - f_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n - f_n(t), \end{cases} \tag{7}$$

где $f_j(t)$ — заданные на $(a;b)$ функции, имеющие нужное число производных. Если функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ удовлетворяют этой системе, то функция $y_j(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению n-го порядка

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) y_j(t) = \Phi_j(t), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{9}$$

— характеристический многочлен системы (7), а функции $\Phi_j(t)$ определяются через a_{kl} и f_s:

$$\Phi_j(t) = \sum_{s=1}^{n} M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) f_s(t),$$

$M_{sj}(\lambda)$ — *алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя* (9).

Заметим, что система (7) не равносильна системе из n уравнений (8). Общее решение системы (7) имеет n произвольных постоянных, а общее решение последней системы имеет n^2 произвольных постоянных.

Ясно, что утверждение аналогичное предыдущей лемме имеет место и для линейной системы разностных уравнений (1). Введём оператор $\Delta: \ \Delta y(t) = y(t+1)$. Если функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ удовлетворяют системе (1), то функция $y_j(t)$ удовлетворяет линейному разностному уравнению n-го порядка

$$D(\Delta) y_j(t) = \Phi_j(t), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

$$\Phi_j(t) = -\sum_{s=1}^{n} M_{sj}(\Delta) f_s(t). \tag{11}$$

Заметим, что собственные числа матрицы A совпадают с корнями характеристического уравнения соответствующего линейного уравнения n-го порядка (10).

Какой вид может иметь частное решение $Y(t)$ системы (1), в которой

$$f(t) = Q_k(t) \cdot \lambda_0^t, \quad \lambda_0 \in \mathbb{C}?$$

Это решение всегда можно искать, отбрасывая решения однородной системы. Компонента $y_j(t)$ частного решения $Y(t)$ удовлетворяет уравнению (10). Если $f_s(t) = Q_k^{(s)}(t) \cdot \lambda_0^t$, где $Q_k^{(s)}(t)$ — многочлен степени не выше k (возможно, тождественный ноль), то

$$\Delta f_s(t) = Q_k^{(s)}(t+1) \cdot \lambda_0^{t+1} = \tilde{Q}_k^{(s)}(t) \cdot \lambda_0^t,$$

поэтому $\Phi_j(t)$ представляет собой сумму n слагаемых, каждое из которых имеет вид произведения многочлена степени не выше k и λ_0^t. Значит, $\Phi_j(t)$ имеет такой же вид.

Пусть λ_0 — характеристическое число кратности l, тогда по теореме 4 неоднородное уравнение (10) имеет частное решение вида $t^l \cdot B_k(t) \cdot \lambda_0^t$. Любое частное решение уравнения (10) имеет вид

$$\tilde{y}_j(t) = t^l \cdot B_k(t) \cdot \lambda_0^t + P_{l-1}(t) \cdot \lambda_0^t + \tilde{z}(t) = R_{k+l}(t) \cdot \lambda_0^t + \tilde{z}(t),$$

где $\tilde{z}(t)$ — частное решение однородного уравнения, соответствующее характеристическим числам $\lambda \neq \lambda_0$. Отбрасывая $\tilde{z}(t)$, приходим к выводу, что любая компонента $y_j(t)$ частного решения $Y(t)$ имеет вид $R_{k+l}(t) \cdot \lambda_0^t$, а значит, такой же вид имеет и $Y(t)$.

Теорема 5. *Пусть в системе* (1)

$$f(t) = r^t (Q_{k_1}(t) \cos \varphi t + Q_{k_2}(t) \sin \varphi t), \quad r > 0. \tag{12}$$

Здесь $Q_{k_1}(t)$ *и* $Q_{k_2}(t)$ *— векторные многочлены переменной* t *степеней* k_1 *и* k_2 *соответственно с действительными коэффициентами. Пусть число* $\lambda_0 = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ *является собственным числом матрицы* A *кратности* $l \geqslant 0$, $k = \max\{k_1; k_2\}$. *Частное решение системы* (1) *в этом случае можно найти в виде*

$$Y(t) = r^t(U_{k+l}(t)\cos\varphi t + V_{k+l}(t)\sin\varphi t), \tag{13}$$

где $U_{k+l}(t)$ *и* $V_{k+l}(t)$ *— векторные многочлены переменной* t *степени не выше* $k+l$. *Если* $l = 0$ *, то решение указанного вида единственно, причём хотя бы один из многочленов* $U_k(t)$, $V_k(t)$ *имеет степень в точности равную* k.

Замечание 5.1. Обращаем внимание, что частное решение системы (1) следует искать в виде (13) также и в том случае, когда $Q_{k_1}(t) \equiv 0$ или $Q_{k_2}(t) \equiv 0$.

Замечание 5.2. Теорема 5 справедлива и в случае, когда $r < 0$. В этом случае комплексное число $\lambda_0 = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ не записано в тригонометрической форме, но это легко исправить $\lambda_0 = (-r)(\cos(\pi+\varphi) + \sin(\pi+\varphi))$. Формула $\lambda_0^t = r^t(\cos\varphi t + \sin\varphi t)$ справедлива и для $r < 0$.

Доказательство теоремы 5. Перепишем $f(t)$ с помощью формул Эйлера

$$f(t) = r^t\left(Q_{k_1}(t)\cdot\frac{\exp(i\varphi t)+\exp(-i\varphi t)}{2} + Q_{k_2}(t)\cdot\frac{\exp(i\varphi t)-\exp(-i\varphi t)}{2i}\right) =$$

$$= (r\exp(i\varphi))^t\cdot\frac{1}{2}(Q_{k_1}(t) - iQ_{k_2}(t)) + (r\exp(-i\varphi))^t\cdot\frac{1}{2}(Q_{k_1}(t) + iQ_{k_2}(t)) =$$

$$= \lambda_0^t\cdot Q_k(t) + (\overline{\lambda}_0)^t\cdot\overline{Q}_k(t).$$

Мы учли, что коэффициенты многочленов $Q_{k_1}(t)$ и $Q_{k_2}(t)$ действительные числа. Черта сверху означает комплексное сопряжение.

Рассмотрим две системы

$$y(t+1) = Ay(t) + \lambda_0^t\cdot Q_k(t), \tag{14}$$

$$y(t+1) = Ay(t) + (\overline{\lambda}_0)^t\cdot\overline{Q}_k(t). \tag{15}$$

По теореме 2 система (14) имеет частное решение $Y_1(t) = \lambda_0^t\cdot R_{k+l}(t)$. Если $l = 0$, то решение такого вида по теореме 1 единственно, причём хотя бы один из многочленов $\mathrm{Re}(R_k(t))$, $\mathrm{Im}(R_k(t))$ имеет степень в точности равную k. В тождестве

$$Y_1(t+1) = AY_1(t) + \lambda_0^t\cdot Q_k(t)$$

перейдём к комплексно сопряжённым числам, получим

$$\overline{Y}_1(t+1) = A\overline{Y}_1(t) + \overline{\lambda}_0^t\cdot\overline{Q}_k(t).$$

Последнее тождество означает, что $Y_2(t) = \overline{Y}_1(t)$ является частным решением системы (15). По принципу суперпозиции $Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t) = 2\mathrm{Re}(Y_1(t))$

является частным решением рассматриваемой системы (1) со специальным видом $f(t)$. Преобразуем вид $Y(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} Y(t) &= 2\mathrm{Re}(\lambda_0^t \cdot R_{k+l}(t)) = \\ &= 2\mathrm{Re}\left\{r^t(\cos\varphi t + i\sin\varphi t)(\mathrm{Re}(R_{k+l}(t)) + i\mathrm{Im}(R_{k+l}(t)))\right\} = \\ &= r^t(U_{k+l}(t)\cos\varphi t + V_{k+l}(t)\sin\varphi t). \end{aligned}$$

Заметим, что хотя бы один из многочленов $U_{k+l}(t)$, $V_{k+l}(t)$ имеет степень, совпадающую со степенью многочлена $R_{k+l}(t)$.

Приведём подборку примеров для практических занятий по рассматриваемой теме.

Пример 1. Решить систему

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2^t \begin{pmatrix} 1 & t+2 \\ -1 & -t \end{pmatrix} C.$

Пример 2. Решить систему

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & (-1)^t \\ 1 & 2(-1)^t \end{pmatrix} C.$

Пример 3. Решить систему

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 3^{t+1} + 4t \cdot 3^t \\ -4t \cdot 3^t \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y(t) = \begin{pmatrix} t \cdot 3^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3^t \\ -1 & 2 \cdot 3^t \end{pmatrix} C.$

Пример 4. Решить систему

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 4(-1)^{t+1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y(t) = \begin{pmatrix} (-1)^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3^t & 2^t \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} C.$

Пример 5. Решить систему

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi t}{2} + \sin\dfrac{\pi t}{2} \\ -\sin\dfrac{\pi t}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y(t) = \begin{pmatrix} \sin\dfrac{\pi t}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 3^t & -4(-3)^t \\ 3^t & (-3)^t \end{pmatrix} C.$

Пример 6. Решить систему

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 - 2^t \\ -1 - 2^{t+1} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2^t \end{pmatrix} + 3^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+3 \end{pmatrix} C.$

Пример 7. Решить систему

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 5(-1)^t \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^t \end{pmatrix} + 3^t \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi t}{2} - 3\sin\dfrac{\pi t}{2} & 3\cos\dfrac{\pi t}{2} + \sin\dfrac{\pi t}{2} \\ 2\cos\dfrac{\pi t}{2} & 2\sin\dfrac{\pi t}{2} \end{pmatrix} C.$

Пример 8. Решить задачу Коши

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 2^{t+3} + 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y(t) = \begin{pmatrix} 4\cdot 2^t - 3 \\ 2^t \end{pmatrix}.$

Пример 9. Решить задачу Коши

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y(t) = \begin{pmatrix} 0,5t^2 + t + 1,5 \\ -0,5t^2 \end{pmatrix}.$

Пример 10. Решить задачу Коши

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 2^t \\ 3^t \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $y(t) = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^{t-1} - 3^t \\ 2^{t-1} \end{pmatrix}.$

Литература

[1] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1973. — 128 с.

[2] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. — М.: Высш. шк., 1989. — 383 с.

[3] Жабко А.П., Котина Е.Д., Чижова О.Н. Дифференциальные уравнения и устойчивость. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 320 с.

[4] Романко В.К. Разностные уравнения: Учебное пособие. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 112 с.

[5] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

[6] Ласунский А.В. Об опыте изложения теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами // Математика в высшем образовании. 2009, № 7. С. 81–88.

Поступила 21.08.2023

LINEAR INHOMOGENEOUS SYSTEM OF DIFFERENCE EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS AND WITH A SPECIAL RIGHT-HAND SIDE

A. V. Lasunsky

Various versions of the proof of the theorem on finding a particular solution of a linear inhomogeneous system of difference equations with a constant real matrix of coefficients and a special kind of inhomogeneity are presented. The question is considered when the solution of this type is unique, as well as the possibility of lowering the degree of a vector polynomial in the form of a particular solution. Tasks on this topic for practical training are given.

Keywords: linear inhomogeneous system of difference equations with constant coefficients, a type of partial solution.