СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.537.3 + 378.147

О НЕМОТИВИРОВАННОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ АБЕЛЯ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

С. В. Костин

ГБОУ города Москвы «Школа № 1788»,
Российский технологический университет МИРЭА,
Москва, Россия

kostinsv77@mail.ru

Сформулирована теорема о равномерной и абсолютной сходимости степенного ряда в замкнутом круге. Отмечено, что в некоторых случаях эта простая теорема может быть с успехом использована вместо второй теоремы Абеля для степенных рядов.

Ключевые слова: ТФКП, степенной ряд, вторая теорема Абеля.

28 августа 2023 года не стало замечательного математика и педагога, заведующего кафедрой высшей математики Российского технологического университета МИРЭА, доктора технических наук, профессора Юрия Иосифовича Худака.

Девятнадцать лет назад (в сентябре 2004 года) Юрий Иосифович взял меня на работу на кафедру. В лице Юрия Иосифовича я нашёл не просто и не только работодателя, но и друга, старшего товарища, надёжного и порядочного человека. Юрий Иосифович неизменно поддерживал меня во всех моих начинаниях, искренно радовался всем моим успехам. Я посвящаю эту статью светлой памяти Юрия Иосифовича.

* * *

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, пусть $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, и пусть $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$.

В нашей статье мы будем использовать следующие обозначения[1]:

[1] Использование в символах $K_r(z_0)$ и $\widetilde{K}_r(z_0)$ прописной латинской буквы K связано с тем, что эта буква является первой буквой немецкого слова der Kreis — круг. Использование в символе $C_r(z_0)$ прописной латинской буквы C связано с тем, что эта буква является первой буквой английского слова circle — окружность. Использование в символе $S(z_0,\, z_1)$ прописной латинской буквы S связано с тем, что эта буква является первой буквой английского слова segment — отрезок.

$K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ — открытый круг радиуса r с центром в точке z_0;

$\widetilde{K}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$ — замкнутый круг радиуса r с центром в точке z_0;

$C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ — окружность радиуса r с центром в точке z_0;

$S(z_0,\ z_1) = \{z \in \mathbb{C} \mid (\exists\, t \in [0,\ 1]) \colon z = z_0 + t(z_1 - z_0)\}$ — отрезок с концами в точках z_0 и z_1.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

где $c_n \in \mathbb{C}$ — коэффициенты, а $z_0 \in \mathbb{C}$ — центр степенного ряда (1).

Пусть $f(z)$ — сумма степенного ряда (1) (функция $f(z)$ определена во всех тех точках $z \in \mathbb{C}$, в которых степенной ряд (1) сходится).

Рассмотрим также степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}, \tag{2}$$

членами которого являются производные членов степенного ряда (1).

Пусть $g(z)$ — сумма степенного ряда (2) (функция $g(z)$ определена во всех тех точках $z \in \mathbb{C}$, в которых степенной ряд (2) сходится).

Пусть $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, и пусть $r = |z_1 - z_0|$ $(0 < r < +\infty)$. Справедливы следующие теоремы и следствия из них.

Теорема 1 (первая теорема Абеля для степенных рядов). *Пусть степенной ряд* (1) *сходится в точке* z_1. *Тогда степенной ряд* (1) *сходится абсолютно в открытом круге* $K_r(z_0)$.

Теорема 2 (теорема о равномерной сходимости степенного ряда строго внутри открытого круга). *Пусть степенной ряд* (1) *сходится в точке* z_1. *Тогда степенной ряд* (1) *сходится равномерно строго внутри*[2] *открытого круга* $K_r(z_0)$.

---

[2]Функциональный ряд $\sum u_n(x)$ называется равномерно сходящимся строго внутри области D, если: 1) функциональный ряд $\sum u_n(x)$ сходится в области D; 2) на каждом множестве E таком, что $\overline{E} \subset D$ ($\overline{E}$ — замыкание множества E), функциональный ряд $\sum u_n(x)$ сходится равномерно.

В книгах и учебниках по математическому анализу и по теории функций комплексной переменной (ТФКП) при выполнении условий 1) и 2) говорят, что функциональный ряд $\sum u_n(x)$ сходится равномерно внутри области D (см., например, [1], стр. 203). Мы говорим не «внутри», а «строго внутри», поскольку, по нашему мнению, в этом случае текст становится более понятным и легче воспринимаемым.

Можно доказать, что равномерная сходимость степенного ряда (1) строго внутри открытого круга $K_r(z_0)$ равносильна равномерной сходимости степенного ряда (1) в каждом открытом круге $K_\rho(z_0)$, $\rho \in (0,\ r)$.

Из теоремы 2 и теоремы Вейерштрасса (теоремы о регулярности в области D суммы равномерно сходящегося строго внутри области D функционального ряда из регулярных функций, а также о возможности почленного дифференцирования такого функционального ряда) вытекает следующее следствие.

Следствие. *Пусть степенной ряд* (1) *сходится в точке* z_1. *Тогда:*

1) *функция* $f(z)$ *регулярна*[3] *в открытом круге* $K_r(z_0)$;

2) *функция* $g(z)$ *определена в открытом круге* $K_r(z_0)$ (*то есть в каждой точке* $z \in K_r(z_0)$ *степенной ряд* (2) *сходится*);

3) *в каждой точке* $z \in K_r(z_0)$ *справедливо равенство* $f'(z) = g(z)$.

Кратко это следствие формулируют так: «В открытом круге $K_r(z_0)$ степенной ряд (1) можно дифференцировать почленно».

Теорема 3 (теорема о равномерной и абсолютной сходимости степенного ряда в замкнутом круге). *Пусть степенной ряд* (1) *сходится абсолютно в точке* z_1. *Тогда степенной ряд* (1) *сходится равномерно и абсолютно в замкнутом круге* $\widetilde{K}_r(z_0)$.

Следствие. *Пусть степенной ряд* (1) *сходится абсолютно в точке* z_1. *Тогда функция* $f(z)$ *определена и непрерывна в замкнутом круге* $\widetilde{K}_r(z_0)$.

Теорема 4 (вторая теорема Абеля для степенных рядов). *Пусть степенной ряд* (1) *сходится в точке* z_1. *Тогда степенной ряд* (1) *сходится равномерно на отрезке* $S(z_0,\ z_1)$.

Следствие. *Пусть степенной ряд* (1) *сходится в точке* z_1. *Тогда функция* $f(z)$ *определена и непрерывна на отрезке* $S(z_0,\ z_1)$.

Теорема 3 и следствие из неё доказываются очень просто и притом с использованием лишь тех теорем, которые изучаются в большинстве технических вузов. Для доказательства теоремы 3 достаточно заметить, что на замкнутом круге $\widetilde{K}_r(z_0)$ функциональный ряд (1) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n|\,|z_1 - z_0|^n$, и воспользоваться признаком Вейерштрасса равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда. Для доказательства следствия из теоремы 3 достаточно воспользоваться теоремой о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда из непрерывных функций.

В то же время теорема 4 (вторая теорема Абеля) доказывается на основе достаточно сложного и не изучаемого во многих технических вузах признака Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

Заметим, что если в точке z_1 степенной ряд (1) сходится абсолютно, то утверждение теоремы 4 является простым следствием утверждения теоремы 3. Действительно, отрезок $S(z_0,\ z_1)$ является подмножеством замкнутого круга $\widetilde{K}_r(z_0)$ ($S(z_0,\ z_1) \subset \widetilde{K}_r(z_0)$). Поэтому из равномерной сходимости

[3] Вместо распространённого в математической литературе термина «аналитическая функция» мы используем термин «регулярная функция», чтобы сделать более явным различие между понятиями «аналитическая функция» и «аналитическая многозначная функция» (см. также [2], стр. 71).

степенного ряда (1) в замкнутом круге $\widetilde{K}_r(z_0)$ сразу следует равномерная сходимость степенного ряда (1) на отрезке $S(z_0,\ z_1)$.

Теорема 4 содержательна, а её утверждение не тривиально (то есть не сводится к утверждению теоремы 3) лишь в том случае, если в точке z_1 степенной ряд (1) сходится условно.

По нашему мнению, прибегать к использованию теоремы 4 целесообразно лишь в тех случаях, когда без этой теоремы действительно нельзя обойтись, то есть когда степенной ряд (1) сходится в точке z_1 условно (или когда характер сходимости степенного ряда (1) в точке z_1 точно не известен).

Использовать тонкую и достаточно сложно доказываемую теорему 4 в тех случаях, когда соответствующий результат можно получить с помощью практически очевидной теоремы 3 (то есть когда степенной ряд (1) сходится в точке z_1 абсолютно) — это, по нашему мнению, всё равно что «стрелять из пушки по воробьям». Это неправильно как с содержательной точки зрения (теорема 4 известна далеко не всем студентам), так и с методической точки зрения (неоправданное использование теоремы 4 приводит к формированию у студентов неправильной математической интуиции и делает учебный материал сложным и непонятным для студентов).

Приведём конкретный пример, когда вполне можно обойтись без теоремы 4 и получить нужный результат с помощью теоремы 3.

Предлагаемый нами пример относится к теории вероятностей.

Пусть $\langle\Omega,\ \mathscr{A},\ P\rangle$ — вероятностое пространство (Ω — пространство элементарных исходов; $\mathscr{A}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, являющихся событиями; $P\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ — вероятностная мера на $\mathscr{A}$).

Пусть ξ — неотрицательная целочисленная[4] дискретная случайная величина (СВ), определённая на вероятностном пространстве $\langle\Omega,\ \mathscr{A},\ P\rangle$, и пусть p_n — вероятность того, что СВ ξ принимает значение, равное n ($n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), то есть

$$p_n = P(\xi = n) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = n\}). \tag{3}$$

Числа p_n удовлетворяют двум условиям:

$$p_n \geqslant 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{4}$$

[4]Дискретная СВ $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется неотрицательной целочисленной дискретной СВ, если $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(\xi = n) = 1$. Частным случаем неотрицательной целочисленной дискретной СВ является неотрицательная целозначная дискретная СВ, то есть такая СВ ξ, множество значений $W(\xi)$ которой является подмножеством множества $\mathbb{N} \cup \{0\}$ целых неотрицательных чисел ($W(\xi) \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$). Отличие неотрицательной целочисленной СВ от неотрицательной целозначной СВ заключается в том, что неотрицательная целочисленная СВ может принимать (правда, с нулевыми вероятностями) значения, не принадлежащие множеству $\mathbb{N} \cup \{0\}$ целых неотрицательных чисел. (По поводу понятия «целозначная функция» см. также статью [2], стр. 69.)

(условие неотрицательности) и

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \tag{5}$$

(условие нормировки).

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} np_n. \tag{6}$$

Члены числового ряда (6) неотрицательны и поэтому числовой ряд (6) либо абсолютно сходится (тогда его суммой является конечное число), либо расходится к $+\infty$ (тогда его суммой является символ $+\infty$).

Определение. Если числовой ряд (6) абсолютно сходится, то говорят, что СВ ξ имеет математическое ожидание. В этом случае сумму числового ряда (6) называют *математическим ожиданием* СВ ξ и обозначают $M(\xi)$. Если числовой ряд (6) расходится, то говорят, что СВ ξ не имеет математического ожидания.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n. \tag{7}$$

Из условия неотрицательности (4) и условия нормировки (5) следует, что степенной ряд (7) сходится абсолютно в точке $z = 1$. Поэтому из теоремы 3 и следствия из неё следует, что степенной ряд (7) сходится в замкнутом круге $\widetilde{K}_1(0)$ (то есть в замкнутом круге единичного радиуса с центром в точке $z = 0$). Это обосновывает корректность приводимого ниже определения.

Определение. Функция

$$\psi_\xi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n \tag{8}$$

с множеством определения[5] $V(\psi_\xi) = \widetilde{K}_1(0)$ называется *производящей* функцией неотрицательной целочисленной дискретной СВ ξ.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} np_n z^{n-1}, \tag{9}$$

[5]Множество определения отображения f мы обозначаем символом $V(f)$. Множество значений отображения f мы обозначаем символом $W(f)$. Подробнее о том, чем мотивированы такие обозначения, можно прочитать в статье [2] (стр. 46).

членами которого являются производные членов степенного ряда (7).

Пусть $g(z)$ — сумма степенного ряда (9) (функция $g(z)$ определена во всех тех точках $z \in \mathbb{C}$, в которых степенной ряд (9) сходится).

Поскольку степенной ряд (7) сходится в точке $z = 1$, то из следствия теоремы 2 следует, что: 1) функция $\psi_\xi(z)$ регулярна в открытом круге $K_1(0)$; 2) функция $g(z)$ определена в открытом круге $K_1(0)$; 3) в каждой точке $z \in K_1(0)$ справедливо равенство $\psi'_\xi(z) = g(z)$.

Поскольку функция $\psi'_\xi(z)$ определена в открытом круге $K_1(0)$ и точка $z = 1$ является точкой прикосновения множества $K_1(0)$, то можно рассмотреть вопрос о существовании предела функции $\psi'_\xi(z)$ в точке $z = 1$ по множеству $K_1(0)$, то есть вопрос о существовании предела

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \psi'_\xi(z). \tag{10}$$

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 5 (теорема о связи математического ожидания и производящей функции неотрицательной целочисленной дискретной СВ).

1. *Пусть СВ ξ имеет математическое ожидание. Тогда существует конечный предел* (10)*, причём этот предел равен математическому ожида нию $M(\xi)$.*

2. *Пусть существует конечный предел* (10)*. Тогда СВ ξ имеет математическое ожидание, причём математическое ожидание $M(\xi)$ равно значению предела* (10)*.*

Доказательство. 1. Пусть СВ ξ имеет математическое ожидание. Докажем, что тогда существует конечный предел (10), причём этот предел равен математическому ожиданию $M(\xi)$.

Из существования математического ожидания СВ ξ следует, что степенной ряд (9) сходится абсолютно в точке $z = 1$. Поэтому из теоремы 3 и следствия из неё следует, что функция $g(z)$ определена и непрерывна в замкнутом круге $\widetilde{K}_1(0)$.

Существование конечного предела (10) и его равенство математическому ожиданию $M(\xi)$ вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \psi'_\xi(z) = \lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} g(z) = g(1) = M(\xi). \tag{11}$$

Первая часть теоремы доказана.

2. Пусть существует конечный предел (10). Докажем, что тогда СВ ξ имеет математическое ожидание, причём математическое ожидание равно значению предела (10).

Пусть предел (10) равен A ($A \in \mathbb{R}$). Поскольку интервал $(-1,\ 1)$ действительной оси является подмножеством открытого круга $K_1(0)$, то из существования предела (10) следует существование предела слева $\psi'_\xi(1-0)$ функции

$\psi'_\xi(x)$ в точке $x = 1$, причём

$$\psi'_\xi(1-0) = \lim_{x\to 1-0} \psi'_\xi(x) = \lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \psi'_\xi(z) = A. \tag{12}$$

Предположим, что СВ ξ не имеет математического ожидания. В этом случае числовой ряд (6) расходится к $+\infty$. Следовательно, существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{N} np_n > A + 1. \tag{13}$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = \sum_{n=1}^{N} np_n x^{n-1}. \tag{14}$$

Из формул (13) и (14) следует, что $P(1) > A + 1$. Поскольку функция $P(x)$ непрерывна, то существует $\varepsilon \in (0,\ 1)$ такое, что при всех $x \in (1-\varepsilon,\ 1)$ справедливо неравенство $P(x) \geqslant A + 1$.

При всех $x \in (1-\varepsilon,\ 1)$ имеем:

$$\psi'_\xi(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n x^{n-1} \geqslant \sum_{n=1}^{N} np_n x^{n-1} = P(x) \geqslant A + 1 \tag{15}$$

(мы учли, что при $z = x \in (1-\varepsilon,\ 1)$ все члены степенного ряда (9) неотрицательны, а потому сумма степенного ряда (9) не меньше его $(N-1)$-й частичной суммы).

Перейдём в обеих частях неравенства (15) к пределу при $x \to 1-0$ и учтем, что в силу формулы (12) предел слева $\psi'_\xi(1-0)$ функции $\psi'_\xi(x)$ в точке $x = 1$ равен A. В результате получим неравенство $A \geqslant A+1$. Пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение о том, что СВ ξ не имеет математического ожидания, неверно.

Поскольку СВ ξ имеет математическое ожидание, то из первой и уже доказанной части теоремы следует равенство математического ожидания $M(\xi)$ значению предела (10).

Вторая часть теоремы доказана.

Доказательство теоремы 5 заняло у нас более одной страницы. Хотелось бы выразить сожаление по поводу того, что авторы многих книг и учебных пособий по теории вероятностей не утруждают себя строгими формулировками и подробными обоснованиями и в результате «доказательство» теоремы 5 занимает у них несколько строчек. Следует ли после этого удивляться неумению рассуждать и четко формулировать свои мысли, а также поверхностности знаний, которые можно наблюдать у многих студентов?

Однако в контексте данной статьи для нас важно другое. Как можно было видеть из приведённого доказательства теоремы 5, нам нигде не понадобилась теорема 4 (вторая теорема Абеля), а оказалось достаточно существенно более простой теоремы 3 (её мы предлагаем называть «теорема о равномерной и абсолютной сходимости степенного ряда в замкнутом круге»). Это связано с тем, что все степенные ряды, о которых идет речь в доказательстве теоремы 5, сходятся абсолютно в замкнутом круге $\widetilde{K}_1(0)$.

В то же время в ряде курсов теории вероятностей при доказательстве теоремы 5 авторы ссылаются на вторую теорему Абеля. В качестве примера мы можем привести книгу [3] (стр. 127) и книгу [4] (стр. 134).

Как мы уже говорили, использование второй теоремы Абеля в тех ситуациях, когда нужный результат можно получить с помощью существенно более простой теоремы 3, мы считаем неправильным как с содержательно-математической, так и с педагогической точки зрения.

По нашему мнению, достоин всяческого сожаления тот факт, что теорема 3 (теорема о равномерной и абсолютной сходимости степенного ряда в замкнутом круге) отсутствует в подавляющем большинстве учебников высшей математики и математического анализа. Нам известен только один учебник, а именно учебник [5], в котором эта простая, но очень важная теорема сформулирована в явном виде и выделена как отдельная теорема (стр. 131). Существует также несколько книг, в которых утверждение теоремы 3 формулируется авторами вскользь, как бы между прочим, и не выделяется в виде отдельной теоремы (см., например, [1], стр. 59).

А между тем из теоремы 3 вытекает также следующее немаловажное следствие: если степенной ряд (1) имеет радиус сходимости R, $0 < R < +\infty$, и степенной ряд (1) сходится абсолютно хотя бы в одной точке на границе круга сходимости $K_R(z_0)$ (то есть на окружности $C_R(z_0)$), то степенной ряд (1) сходится, и притом абсолютно, во всех точках окружности $C_R(z_0)$.

Таким образом, множество E_a абсолютной сходимости[6] степенного ряда (1) устроено очень просто, а именно, оно совпадает либо с открытым кругом $K_R(z_0)$, либо с замкнутым кругом $\widetilde{K}_R(z_0)$. (Мы сейчас рассматриваем основной случай, когда степенной ряд (1) имеет конечный ненулевой радиус сходимости R, $0 < R < +\infty$. Возможны также два вырожденных случая: $E_a = \{0\}$ и $E_a = \mathbb{C}$.)

К сожалению, этот важный факт тоже не отмечается в большинстве учебников высшей математики и математического анализа (хотя общие рассуждения о том, что «в одних точках на границе круга сходимости степенной

[6]Множество сходимости функционального ряда (в частности, множество сходимости степенного ряда) мы обозначаем символом E_c. Обозначение происходит от первой буквы английского слова convergence — сходимость. Множество абсолютной сходимости функционального ряда (в частности, множество абсолютной сходимости степенного ряда) мы обозначаем символом E_a. Обозначение происходит от первой буквы английского словосочетания absolute convergence — абсолютная сходимость.

ряд может сходиться, а в других точках может расходиться», присутствуют во всех учебниках).

Что касается второй теоремы Абеля, то её, как мы уже говорили, целесообразно использовать лишь в тех ситуациях, где без неё действительно нельзя (или сложно) обойтись (то есть когда степенной ряд (1) сходится в точке z_1 условно).

Приведём конкретный пример использования второй теоремы Абеля.

Рассмотрим при $x \in \mathbb{R}$ следующий степенной ряд:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \tag{16}$$

С помощью признака Даламбера (или с помощью радикального признака Коши) легко найти радиус сходимости степенного ряда (16): $R = 1$. В точке $x = 1$ степенной ряд (16) сходится по признаку Лейбница, а в точке $x = -1$ степенной ряд (16) отличается лишь знаком от гармонического ряда и, следовательно, расходится. Таким образом, множество сходимости E_c степенного ряда (16) представляет собой промежуток $(-1,\ 1]$.

Пусть $f(x)$, $x \in (-1,\ 1]$, — сумма степенного ряда (16). Из следствия из теоремы 2 следует, что функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1,\ 1)$, причём в каждой точке $x \in (-1,\ 1)$ справедливо равенство

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \tag{17}$$

(степенной ряд в правой части формулы (17) получен путём почленного дифференцирования степенного ряда (16)).

Степенной ряд, стоящий в правой части формулы (17), представляет собой геометрический ряд с первым членом $a_1 = 1$ и знаменателем $q = -x$. Сумма этого ряда при любом $x \in (-1,\ 1)$ равна $\dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{1}{1+x}$. Таким образом, мы приходим к равенству

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \in (-1,\ 1). \tag{18}$$

Отсюда $f(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) + C$, $x \in (-1,\ 1)$. Поскольку в точке $x = 0$ сумма степенного ряда (16) равна нулю, то $f(0) = 0$. Из этого условия находим значение постоянной интегрирования: $C = 0$.

Итак, при всех $x \in (-1,\ 1)$ справедливо равенство

$$f(x) = \ln(1+x). \tag{19}$$

Поскольку степенной ряд (16) сходится в точке $x = 1$, то из следствия из теоремы 4 (второй теоремы Абеля) следует, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$. В частности, функция $f(x)$ непрерывна слева в точке $x = 1$, то есть

$$f(1) = f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \ln(1+x) = \ln 2. \tag{20}$$

Таким образом, $f(1) = \ln 2$. Это означает, что формула (19) справедлива не только при $x \in (-1,\ 1)$, но и при $x = 1$.

Итак, при всех $x \in (-1,\ 1]$ имеет место следующее равенство:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \tag{21}$$

Равенство (21) представляет собой не что иное, как разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена. Мы доказали, что это разложение справедливо при всех $x \in (-1,\ 1]$.

Отметим, что приведённый нами вывод формулы (21) представляется нам более предпочтительным (поскольку он является более простым и понятным для студентов), чем приводимый во многих учебниках вывод, основанный на громоздких оценках остаточного члена формулы Маклорена. При этом в не очень сильных технических вузах, в которых не изучается вторая теорема Абеля, можно ограничиться случаем $x \in (-1,\ 1)$.

Отметим, что для доказательства справедливости разложения (21) в точке $x = 1$ нельзя воспользоваться следствием из теоремы 3 (теоремы о равномерной и абсолютной сходимости степенного ряда в замкнутом круге), поскольку степенной ряд, стоящий в правой части формулы (21), условно сходится в точке $x = 1$. Справедливость разложения (21) в точке $x = 1$ оказывается возможным доказать лишь с помощью второй теоремы Абеля и следствия из неё.

Мы специально очень подробно разобрали вопрос о разложении функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена и о справедливости этого разложения в точке $x = 1$, поскольку этот вопрос является примером ситуации, в которой использование второй теоремы Абеля абсолютно обоснованно и логично (в отличие от теоремы 5 о связи математического ожидания и производящей функции неотрицательной целочисленной дискретной СВ).

В заключение статьи заметим, что, по нашему мнению, теорема 3 (теорема о равномерной и абсолютной сходимости степенного ряда в замкнутом круге) должна быть включена в курсы высшей математики и математического анализа технических вузов и должна изучаться студентами. Существует ряд вопросов, в которых эта теорема оказывается очень полезной. Кроме того, как мы считаем, включение теоремы 3 в программу курса высшей математики должно сделать более ясной и прозрачной для студентов всю теорию степенных рядов в комплексной области.

Что же касается теоремы 4 (второй теоремы Абеля), то, по нашему мнению, в технических вузах с не очень большим числом часов на изучение математики её вообще можно не изучать (или изучать её в отдельных сильных группах по усмотрению преподавателя). Соответственно, целесообразно исключить ссылки на вторую теорему Абеля из учебников и учебных пособий, предназначенных для студентов «рядовых» технических вузов. По возможности ссылки на вторую теорему Абеля следует заменить на ссылки на теорему 3 (теорему о равномерной и абсолютной сходимости степенного ряда в замкнутом круге).

На математических и физических факультетах университетов и в сильных технических вузах вторую теорему Абеля, безусловно, надо изучать. Однако и там использовать эту теорему, по нашему мнению, следует лишь в тех ситуациях, когда «не работает» значительно более простая теорема 3.

Отметим, что суждения, высказанные в данной статье (в том числе в трёх предыдущих абзацах) отражают личную точку зрения автора статьи и их не следует рассматривать как «истину в последней инстанции».

Мы надеемся, что результаты нашей работы окажутся полезными для преподавателей математики технических вузов, и будем признательны за любые комментарии или замечания по затронутым в данной статье вопросам.

Литература

[1] Морозова В. Д. Теория функций комплексного переменного / Под ред. В. С. Зарубина и А. П. Крищенко. 2-е изд., стер. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 520 с. (Серия «Математика в техническом университете»; Вып. X).

[2] Костин С. В. Система обозначений для основных многозначных функций комплексной переменной и для их значений // Математика в высшем образовании. 2009. № 7. С. 39–80. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2009.

[3] Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. 3-е изд., испр. М.: Наука, 1987. 240 с.

[4] Козлов М. В. Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 344 с.

[5] Камынин Л. И. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. 624 с.

Поступила 17.11.2023

ON UNMOTIVATED USE OF ABEL THEOREM ON CONTINUITY UP TO THE CIRCLE OF CONVERGENCE

S. V. Kostin

Theorem on uniform and absolute convergence of power series in the closed circle is formulated. In some cases this simple and transparent theorem can be successfully used instead of the Abel theorem on continuity up to the circle of convergence.

Keywords: complex analysis, power series, Abel theorem on continuity up to the circle of convergence.