

СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 519.213.1

**СЛУЧАЙНЫЕ ТОЧКИ С ФИКСИРОВАННЫМ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КООРДИНАТ**

Е. И. Знак

*Михайловская военная артиллерийская академия,
Санкт-Петербург, Россия*

evgematem@mail.ru

В данной статье анализируется одно распространённое заблуждение, встречающееся при построении прикладных моделей на основе теории вероятностей и даже иногда в преподавании.

Ключевые слова: распределение вероятностей, случайная точка, случайная величина, нормальный закон, ковариация.

**Случайная точка
с абсолютно непрерывным распределением
и предписанными распределениями координат**

Время от времени приходится сталкиваться с мнением, что нормальные распределения координат X и Y случайной точки $(X; Y)$ означают нормальное распределение этой случайной точки на координатной плоскости. Это действительно так, если дополнительно известно, что X и Y независимы. А в общем случае, такое мнение, конечно же, является заблуждением. Для построения соответствующего контрпримера проинтегрируем симметричную положительную функцию

$$p(x, y) \equiv \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{-x^2-y^2} \operatorname{ch}(xy\sqrt{2})$$

по одной из переменных. Для этого предварительно обоснуем тождество

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st^2+\lambda t} dt \equiv e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (s > 0),$$

например, сославшись на то, что функция $g(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{2}}$ представляет собой плотность вероятностного распределения. Итак,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st^2 + \lambda t} dt &= e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s(t - \frac{\lambda}{2s})^2} dt = e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sp^2} dp = \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \frac{1}{\sqrt{2s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(p\sqrt{2s})^2}{2}} d(p\sqrt{2s}) = e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \frac{1}{\sqrt{2s}} \sqrt{2\pi} = e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \sqrt{\frac{\pi}{s}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \left(e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 + xy\sqrt{2}} dy + e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 - xy\sqrt{2}} dy \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \left(e^{-x^2} e^{\frac{2x^2}{4}} \sqrt{\pi} + e^{-x^2} e^{\frac{2x^2}{4}} \sqrt{\pi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Теперь из соображений симметричности можно утверждать, что координаты X и Y случайной точки $(X; Y)$ с указанной плотностью распределения $p(x, y)$ имеют стандартное нормальное распределение. А вот то, что вероятностное распределение точки $(X; Y)$ не является нормальным, легко доказать от противного. В самом деле, из тождества

$$e^{-x^2 - y^2} ch(xy\sqrt{2}) \equiv e^{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma}$$

сразу следует тождество

$$e^{-x^2} \equiv e^{Ax^2 + \alpha x + \gamma} \quad (\text{при } y = 0).$$

Таким образом, получается, что $A = C = -1$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ и

$$\frac{1}{2} \left(e^{xy\sqrt{2}} + e^{-xy\sqrt{2}} \right) \equiv e^{Bxy},$$

но последнее «тождество» не выполняется ни при каком значении B .

Приведённый пример является частным проявлением конструкций, изложенных в двух следующих теоремах.

Теорема 1. Для любых положительных σ и τ , произвольной ограниченной последовательности $(\rho_k)_{k=1}^{\infty}$ точек луча $\left[\frac{1}{\sigma^2 \tau^2}; +\infty \right)$ и произвольной неотрицательной последовательности $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ с условием $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = 1$, функция

$$p(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} t_k \sqrt{\rho_k} e^{-\rho_k \left(\frac{\sigma^2}{2} x^2 + s_k xy + \frac{\tau^2}{2} y^2 \right)},$$

где $s_k^2 = \sigma^2 \tau^2 - \frac{1}{\rho_k}$, является плотностью абсолютно непрерывного распределения на $\mathbb{R}^2$, проекции которого являются нормальными распределениями.

Доказательство. Так как квадратичная форма $\sigma^2 x^2 + 2s_k xy + \tau^2 y^2$ является положительно определённой, то ряд представляющий функцию $p(x, y)$ мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k \sqrt{\rho_k}.$$

Последний ряд сходится, так как последовательность $(\rho_k)_{k=1}^{\infty}$ ограничена по условию.

В силу определённой симметрии между переменными, для проверки достаточно вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho_k \left(\frac{\sigma^2}{2} x^2 + s_k xy + \frac{\tau^2}{2} y^2 \right)} dx &= e^{-\frac{\rho_k \tau^2}{2} y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_k \sigma^2}{2} x^2 - \rho_k s_k xy} dx = \\ &= e^{-\frac{\rho_k \tau^2}{2} y^2} \cdot e^{\frac{\rho_k s_k^2}{2\sigma^2} y^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho_k \sigma^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma \sqrt{\rho_k}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \end{aligned}$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} t_k e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}.$$

■

Теорема 2. Пусть последовательности $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(\psi_k)_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных и суммируемых на $\mathbb{R}$ функций таковы, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t) dt = a_k > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(t) dt = b_k > 0 \quad (k \geq 1)$$

и последовательности функций $\frac{1}{a_k} \varphi_k(t)$ и $\frac{1}{b_k} \psi_k(t)$ являются равномерно ограниченными на $\mathbb{R}$ почти всюду.

Если ряд с неотрицательными слагаемыми $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ имеет сумму равную единице, то ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k} \varphi_k(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{b_k} \psi_k(t)$$

сходятся к некоторым плотностям абсолютно непрерывных распределений $f(t)$ и $g(t)$, а сумма $p(x, y)$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k b_k} \varphi_k(x) \psi_k(y)$$

представляет собой плотность абсолютно непрерывного распределения случайной точки на координатной плоскости. При этом координатные проекции этой случайной точки являются случайными величинами с плотностями распределений f и g соответственно.

Доказательство. По условию существует такое множество нулевой меры A и такая постоянная C , что

$$\frac{\varphi_n(t)}{a_n} \leq C \quad (n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus A).$$

И можно считать, не умаляя общности, что

$$\varphi_n(t) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, \quad t \in A).$$

Таким образом, указанные в условии функциональные ряды и ряды интегралов от их слагаемых мажорируются абсолютно сходящимися числовыми рядами и, следовательно, почленное интегрирование допустимо.

Очевидно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k} a_k = 1$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k b_k} a_k \psi_k(y) = g(y).$$

Симметричность вполне очевидна. ■

В условиях первой теоремы достаточно положить

$$\sigma = \tau = 1, \quad t_1 = t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_{m+2} = 0, \quad \rho_m = 2 \quad (m \in \mathbb{N})$$

и $s_1 > 0$, $s_2 < 0$, тогда получится рассмотренная в самом начале плотность двумерного распределения.

А в условиях второй теоремы достаточно положить

$$\varphi_{n+1}(t) = t^{2n} e^{-\sigma t^2}, \quad \psi_{n+1}(t) = t^{2n} e^{-\tau t^2}$$

при некоторых положительных σ и τ и

$$t_{n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 8^n \sqrt{2}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots).$$

Тогда, как не трудно непосредственно вычислить,

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t)dt = \frac{(2k)!}{(k!)(4\sigma)^k} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}, \quad b_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(t)dt = \frac{(2k)!}{(k!)(4\tau)^k} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k b_k} \varphi_k(x) \psi_k(y) = \frac{\sqrt{2\sigma\tau}}{2\pi} e^{-\sigma x^2 - \tau y^2} \operatorname{ch}(xy\sqrt{2\sigma\tau}).$$

К тому же,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k} \varphi_k(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{b_k} \psi_k(y) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\tau^2}}.$$

В целом эти две теоремы определённо указывают на заметную вариативность возможного двумерного распределения при заданных распределениях проекций.

Прежде чем перейти к дискретным аналогам рассмотренных вопросов, заметим, что если отвлечься от прикладных моделей и не стремиться к абсолютной непрерывности совместного распределения, то соответствующий контрпример можно было бы получить просто полагая вторую случайную величину линейно зависящей от первой.

Случайная точка с конечным числом возможных положений и предписанными распределениями координат

Степень разнообразия возможных распределений оценим, проанализировав возникающие ограничения на вероятности значений случайных координат. Сами же возможные значения случайных величин здесь принципиальной роли не играют, но для исчерпывающего и прозрачного представления результатов, на них удобно посмотреть как на значения переменных некоторых, естественным образом возникающих, многочленов.

Возможные значения $x_1, \dots, x_m$ ($m \geq 2$) для случайной величины X и возможные значения $y_1, \dots, y_n$ ($n \geq 2$) для случайной величины Y считаем известными и допускающими изменение. А значения вероятностей распределений $P(X = x_j) = \alpha_j$ ($j = 1, \dots, m$) и $P(Y = y_k) = \beta_k$ ($k = 1, \dots, n$) полагаем зафиксированными. Положим $P(X = x_j, Y = y_k) = p_{jk}$ и поставим вопрос о возможных вариантах совместного распределения.

Имеем матрицу неизвестных $(p_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$, имеем n связей $\sum_{j=1}^m p_{jk} = \beta_k$, m связей $\sum_{k=1}^n p_{jk} = \alpha_j$ и ещё одну связь $\sum_{j,k} p_{jk} = 1$.

Нетрудно видеть, что размерность пространства решений равна

$$n \cdot m - (n + m - 1) = (n - 1)(m - 1).$$

Это обстоятельство довольно выразительно характеризует степень вариативности возможного двумерного распределения. Впрочем, даже свободно назначаемые вероятности обязательно должны удовлетворять системе *ограничительных неравенств* — примеры смотрите ниже.

Рассмотрим теперь ковариацию случайных величин X и Y

$$\sum_{j,k} (p_{jk} - \alpha_j \beta_k) x_j y_k$$

как многочлен переменных $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$.

Сначала выясним его структуру в некоторых частных случаях.

Случай $m = n = 2$

При $m = n = 2$ имеем систему

$$\begin{cases} p_{11} + p_{12} = \alpha_1 \\ p_{12} + p_{22} = \alpha_2 \\ p_{11} + p_{21} = \beta_1 \end{cases}$$

с одним свободным параметром, например, p_{11} . Отсюда, с учётом равенства $p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1$, получаем

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 - \lambda \\ \beta_1 - \lambda & 1 + \lambda - \alpha_1 - \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Из принадлежности элементов последней матрицы отрезку $[0; 1]$ следуют *необходимые* ограничения

$$\max(0, \alpha_1 + \beta_1 - 1) \leq \lambda \leq \min(\alpha_1, \beta_1).$$

Эти ограничения на параметр λ являются и достаточными для существования соответствующего распределения.

А коэффициенты многочлена ковариации, как нетрудно видеть, в этом случае оказываются такими:

$$a_{11} = a_{22} = \lambda - \alpha_1 \beta_1, \quad a_{12} = a_{21} = -\lambda + \alpha_1 \beta_1.$$

Ковариация равна $(\lambda - \alpha_1 \beta_1)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$ и, следовательно, в данном случае она пропорциональна конкретному многочлену.

Случай $m = 3, n = 2$

При $m = 3, n = 2$ имеем аналогичную систему линейных уравнений с двумя свободными параметрами, например, p_{11} и p_{22} . Отсюда, с учётом равенства $p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} + p_{31} + p_{32} = 1$, получаем

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 - \lambda \\ \alpha_2 - \mu & \mu \\ \beta_1 - \alpha_2 - \lambda + \mu & \beta_2 - \alpha_1 - \mu + \lambda \end{pmatrix}.$$

Из принадлежности элементов последней матрицы отрезку $[0; 1]$ следуют *необходимые* ограничения

$$0 \leq \lambda \leq \alpha_1, \quad 0 \leq \mu \leq \alpha_2,$$

$$\alpha_2 - \beta_1 \leq \mu - \lambda \leq \beta_2 - \alpha_1.$$

Коэффициенты многочлена ковариации, как нетрудно видеть, в этом случае оказываются такими:

$$a_{11} = -a_{12} = \lambda - \alpha_1\beta_1, \quad a_{22} = -a_{21} = \mu - \alpha_2\beta_2,$$

$$a_{31} = -a_{32} = a_{22} - a_{11}.$$

Ковариация равна

$$((\lambda - \alpha_1\beta_1)(x_1 - x_3) + (\mu - \alpha_2\beta_2)(x_3 - x_2))(y_1 - y_2)$$

и, следовательно, в данном случае она является линейной комбинацией двух конкретных многочленов.

Случай $m = n = 3$

И при $m = 3$, $n = 3$ также имеем аналогичную систему линейных уравнений с четырьмя свободными параметрами, например, заполняющими минорную матрицу $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ матрицы совместного распределения. Учитывая равенство

$$\sum_{j,k=1}^3 p_{jk} = 1,$$

получаем

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \alpha_1 - \lambda_{11} - \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \alpha_2 - \lambda_{21} - \lambda_{22} \\ \beta_1 - \lambda_{11} - \lambda_{21} & \beta_2 - \lambda_{12} - \lambda_{22} & 1 + \sum_{j,k} \lambda_{jk} - \sum_{i=1}^2 (\alpha_i + \beta_i) \end{pmatrix}.$$

Ковариация равна

$$\sum_{j,k=1}^2 (\lambda_{jk} - \alpha_j\beta_k)(x_j - x_3)(y_k - y_3)$$

и, следовательно, в данном случае она является линейной комбинацией четырёх конкретных многочленов второй степени. Возможность такой формы

представления многочлена ковариации не случайна. Оказывается, как можно доказать прямым вычислением, и в самом общем случае многочлен ковариации равен

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m-1 \\ 1 \leq k \leq n-1}} (\lambda_{jk} - \alpha_j \beta_k)(x_j - x_m)(y_k - y_n).$$

Здесь матрица свободных параметров $(\lambda_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m-1 \\ 1 \leq k \leq n-1}}$ является минорной подматрицей матрицы возможного совместного распределения $(p_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$ случайных величин X и Y .

Этот многочлен переменных $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ либо тождественно равен нулю, либо является однородным многочленом второй степени. Нетрудно видеть, что он тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y независимы.

При этом следует помнить о возникающей системе *ограничительных неравенств* (примеры — см. выше). В многомерной ситуации эти неравенства выделяют некоторый «допустимый» полиэдр, являющийся собственным подмножеством формального единичного гиперкуба размерности $(n-1)(m-1)$.

Литература

- [1] Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1999.
- [2] Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1989.
- [3] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Том 1. Том 2. М.: Мир, 1984.

Поступила 25.09.2023

RANDOM POINTS WITH A FIXED DISTRIBUTION OF COORDINATES

E. I. Znak

This article analyzes one common misconception that occurs when constructing applied models based on probability theory and even sometimes in teaching.

Keywords: probability distribution, random point, random variable, normal law of distribution, covariance.