СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 512.643.2

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ВАНДЕРМОНДА

А. В. Домрина

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва, Россия*

avdomrina@yandex.ru

Работа посвящена вычислению общего класса определителей, содержащего определитель Вандермонда, и отсутствующего в известных задачах и учебниках. Вычисление иллюстрирует методы дифференцирования по параметру и разложения Лапласа.

Ключевые слова: определитель, дифференцирование по параметру, разложение Лапласа.

1. Введение

Пусть числа $n, q \in \mathbb{N}$, а $B(x)$ — матрица размера $nq \times q$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1 & \dots & 0 \\ x^2 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{q-1} & (q-1)x^{q-2} & \dots & (q-1)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{nq-1} & (nq-1)x^{nq-2} & \dots & \left(\prod_{j=1}^{q-1} (nq-j)\right) x^{(n-1)q} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $A(x_1, \dots, x_n)$ размера $nq \times nq$, состоящую из n блоков, такую, что при каждом $j = 1, \dots, n$ столбцы матрицы $A(x_1, \dots, x_n)$ с номерами от $(j-1)q + 1$ до jq образуют матрицу $B(x_j)$.

Удобно представлять матрицу $A(x_1, \dots, x_n)$ следующим образом. Пусть $f(x)$ — столбец $(1, x, x^2, \dots, x^{nq-1})^\top$. Тогда

$$A(x_1, \dots, x_n) = \left(f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(q-1)}(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_n), \dots, f^{(q-1)}(x_n) \right).$$

Цель работы состоит в вычислении определителя¹ $D_{q,n}(x_1, \dots, x_n)$ матрицы $A(x_1, \dots, x_n)$. Его частным случаем при $n > 1$ является определитель Вандермонда

$$D_{1,n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Вычисление определителя $D_{q,n}(x_1, \dots, x_n)$ представляет методологический интерес, поскольку использует различные подходы:

- а) метод дифференцирования определителя (см. леммы 1, 2);
- б) теорему Лапласа о разложении определителя по первым q столбцам и метод рекуррентных соотношений (см. лемму 3);
- в) метод математической индукции.

Результатом работы является

Теорема. *Справедливы равенства:*

$$D_{q,1}(x_1) = \prod_{k=0}^{q-1} k!, \quad (1)$$

$$D_{q,n}(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{k=0}^{q-1} k! \right)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^{q^2}. \quad (2)$$

2. Доказательство теоремы

Далее, как и выше, для произвольной матрицы $C = (c_{ij})$ размера $m \times m$ будем использовать обозначение

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_m),$$

где $C_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{mj})^\top$ — её j -й столбец, $1 \leq j \leq m$. При этом, если все элементы $c_{ij}(x)$ матрицы $C(x)$ являются k раз дифференцируемыми, полагаем

$$C_j^{(k)}(x) = (c_{1j}^{(k)}(x), c_{2j}^{(k)}(x), \dots, c_{mj}^{(k)}(x))^\top.$$

¹Данный определитель является частным случаем обобщённых определителей Вандермонда, возникающих в теории интерполяции (при построении интерполяционного полинома Эрмита с кратными узлами), теории разностных уравнений и других разделах математики (см., например, ссылки во введении недавней работы [2]). Формула типа (2) для обобщённого определителя Вандермонда считается классически известной (см. [3], формула (7) на стр. 121), хотя её доказательство обычно приводится только в частном случае матрицы размера 5×5 . Четыре способа доказательства общего случая намечены в работе [4], но ни один из них не приведён в деталях. Полное, но отнюдь не элементарное доказательство есть также в [5]. Вычисление определителя (2) автором было мотивировано оценкой норм операторов, возникающих в квантовой механике (см. [6], §3).

Лемма 1. Пусть все элементы $c_{ij}(x)$ матрицы $C(x)$ размера $m \times m$ являются k раз дифференцируемыми в точке x . Тогда

$$(\det C(x))^{(k)} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_m \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_m = k}} \frac{k!}{i_1! \dots i_m!} \det(C_1^{(i_1)}(x), \dots, C_m^{(i_m)}(x)). \quad (3)$$

Доказательство. Нам понадобится обобщение формулы Лейбница для k -й производной произведения функций. Пусть функции $f_1, \dots, f_m$ дифференцируемы k раз в точке x . Тогда

$$\left(\prod_{j=1}^m f_j(x) \right)^{(k)} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_m \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_m = k}} \frac{k!}{i_1! \dots i_m!} \prod_{j=1}^m f_j^{(i_j)}(x). \quad (4)$$

Докажем эту формулу индукцией по m . Она очевидна при $m = 1$, а при $m = 2$ следует из формулы Лейбница для k -й производной произведения двух функций:

$$(f(x)g(x))^{(k)} = \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} f^{(l)}(x)g^{(k-l)}(x).$$

Предположим, что равенство (4) выполнено при $m \leq M - 1$.

Покажем, что это равенство выполняется и при $m = M$. Беря в формуле выше $f(x) = f_m(x)$, $g(x) = \prod_{j=1}^{m-1} f_j(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1}^m f_j(x) \right)^{(k)} &= \sum_{i_m=0}^k \frac{k!}{i_m!(k-i_m)!} f_m^{(i_m)}(x) \left(\prod_{j=1}^{m-1} f_j(x) \right)^{(k-i_m)} = \\ &= \sum_{i_m=0}^k \frac{k!}{i_m!(k-i_m)!} f_m^{(i_m)}(x) \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1} \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_{m-1} = k-i_m}} \frac{(k-i_m)!}{i_1! \dots i_{m-1}!} \prod_{j=1}^{m-1} f_j^{(i_j)}(x) \right) = \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_m \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_m = k}} \frac{k!}{i_1! \dots i_m!} \prod_{j=1}^m f_j^{(i_j)}(x), \end{aligned}$$

следовательно (4) выполнено и при $m = M$.

Докажем теперь (3). Имеем

$$\det C(x) = \det C^T(x) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} (-1)^{N(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} c_{\alpha_1 1}(x) \dots c_{\alpha_m m}(x),$$

где суммирование проводится по всем перестановкам $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ чисел $(1, \dots, m)$, $N(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — знак перестановки. Используя (4), получаем

$$\begin{aligned} (\det C(x))^{(k)} &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} (-1)^{N(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} (c_{\alpha_1 1}(x) \dots c_{\alpha_m m}(x))^{(k)} = \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} (-1)^{N(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_m \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_m = k}} \frac{k!}{i_1! \dots i_m!} c_{\alpha_1 1}^{(i_1)}(x) \dots c_{\alpha_m m}^{(i_m)}(x) = \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_m \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_m = k}} \frac{k!}{i_1! \dots i_m!} \det(C_1^{(i_1)}(x), \dots, C_m^{(i_m)}(x)). \end{aligned}$$

■

Вернёмся к исходной матрице $A = A(x_1, \dots, x_n)$, определённой во введении. При $n = 1$ она имеет вид

$$A = \left(f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(q-1)}(x_1) \right),$$

значит является нижнетреугольной, $a_{jj} = (j - 1)!$. Поэтому

$$\det A = (q - 1)!(q - 2)! \dots 1!,$$

следовательно выполнено (1).

Рассмотрим случай $n \geq 2$. Очевидно, что если $x_i = x_j$ для некоторых $1 \leq i < j \leq n$, то матрица A заведомо имеет два одинаковых столбца, поэтому $D_{q,n}(x_1, \dots, x_n) = 0$ и (2) выполнено. Далее считаем, что $x_1, \dots, x_n$ различны.

Лемма 2. *Многочлен $D_{q,n}(x_1, \dots, x_n)$ делится на $\prod_{i=2}^n (x_1 - x_i)^{q^2}$.*

Доказательство. Так как $|D_{q,n}(x_1, \dots, x_n)|$ является симметрической функцией относительно переменных $x_2, \dots, x_n$, достаточно показать, что $D_{q,n}(x_1, \dots, x_n)$ делится на $(x_1 - x_2)^{q^2}$. Зафиксируем $x_2, \dots, x_n$. Пусть $P(x) = D_{q,n}(x, x_2, \dots, x_n)$. Тогда $P(x_2) = 0$. Достаточно показать, что $P^{(k)}(x_2) = 0$ при $1 \leq k < q^2$. Так как

$$P(x) = \det \left(f(x), f'(x), \dots, f^{(q-1)}(x), f(x_2), \dots, f^{(q-1)}(x_n) \right),$$

где последние $n(q-1)$ столбцов $f(x_2), \dots, f^{(q-1)}(x_n)$ в правой части не зависят от x , то полагая в (3) $m = nq$ и $i_j = 0$ при $j > q$, получаем

$$\begin{aligned} P^{(k)}(x) &= \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_q \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_q = k}} \frac{k!}{i_1! \dots i_q!} \det \left(f^{(i_1)}(x), \dots, f^{(i_q + q - 1)}(x), f(x_2), \dots, f^{(q-1)}(x_n) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Предположим, что $P^{(k)}(x_2) \neq 0$. Поскольку определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами равен нулю, то, отбрасывая заведомо нулевые слагаемые при $x = x_2$ в формуле (5), получаем, что индексы $i_1, i_2 + 1, \dots, i_q + q - 1$ должны быть попарно различны и каждый из них не меньше q . Поэтому

$$i_1 + (i_2 + 1) + \dots + (i_q + q - 1) \geq q + (q + 1) + \dots + 2q - 1.$$

Следовательно,

$$k = i_1 + \dots + i_q \geq q + (q + 1) + \dots + 2q - 1 - (1 + \dots + (q - 1)) = q^2,$$

отсюда $P(x)$ делится на $(x - x_2)^{q^2}$ и $D_{q,n}(x_1, \dots, x_n)$ делится на $(x_1 - x_2)^{q^2}$. ■

Разложим определитель $D_{q,n}(x_1, \dots, x_n)$ по первым q столбцам, применяя теорему Лапласа (см., например, [1], гл.1, §2, п.3):

$$D_{q,n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq nq} M_{k_1, \dots, k_q}^{1, \dots, q} A_{k_1, \dots, k_q}^{1, \dots, q}, \quad (6)$$

где $M_{k_1, \dots, k_q}^{1, \dots, q}$ — минор матрицы A , находящийся на пересечении первых q столбцов и строк с номерами $k_1, \dots, k_q$ и $A_{k_1, \dots, k_q}^{1, \dots, q}$ — соответствующее ему алгебраическое дополнение. Отметим, что каждый из миноров является многочленом переменной x_1 , каждое алгебраическое дополнение является многочленом от $x_2, \dots, x_q$, поэтому степень многочлена $D_{q,n}(x_1, \dots, x_n)$ относительно переменной x_1 не больше максимальной из степеней миноров $M_{k_1, \dots, k_q}^{1, \dots, q}$, $1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq nq$.

Лемма 3. а) Каждый минор $M_{k_1, \dots, k_q}^{1, \dots, q}$ имеет вид

$$M_{k_1, \dots, k_q}^{1, \dots, q} = x_1^{k_1 + \dots + k_q - q(q+1)/2} \Delta_{k_1, \dots, k_q}^q$$

для некоторого числа $\Delta_{k_1, \dots, k_q}^q$.

б) Степень $k_1 + \dots + k_q - q(q+1)/2$ будет максимальной тогда и только тогда, когда минор находится в нижнем левом углу матрицы A . При этом

$$M_{(n-1)q+1, \dots, nq}^{1, \dots, q} = \left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right) x_1^{(n-1)q^2}.$$

$$\text{в) } D_{q,n}(x_1, \dots, x_n) = D_{q,n-1}(x_2, \dots, x_n) \left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right) \prod_{i=2}^n (x_i - x_1)^{q^2}. \quad (7)$$

Доказательство. При $q = 1$ утверждения а), б) очевидны. Проверим их справедливость при $q > 1$. Имеем

$$M_{k_1, \dots, k_q}^{1, \dots, q} = \begin{vmatrix} x_1^{k_1-1} & (k_1-1)x_1^{k_1-2} & \dots & \left(\prod_{j=1}^{q-1}(k_1-j)\right)x_1^{k_1-q} \\ x_1^{k_2-1} & (k_2-1)x_1^{k_2-2} & \dots & \left(\prod_{j=1}^{q-1}(k_2-j)\right)x_1^{k_2-q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k_q-1} & (k_q-1)x_1^{k_q-2} & \dots & \left(\prod_{j=1}^{q-1}(k_q-j)\right)x_1^{k_q-q} \end{vmatrix}.$$

Вынося сначала из j -й строки множитель $x_1^{k_j-q}$ при $1 \leq j \leq q$, а затем из l -го столбца множитель x_1^{q-l} при $1 \leq l \leq q$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} M_{k_1, \dots, k_q}^{1, \dots, q} &= x_1^{\sum_{j=1}^q (k_j-q)} \begin{vmatrix} x_1^{q-1} & (k_1-1)x_1^{q-2} & \dots & \prod_{j=1}^{q-1}(k_1-j) \\ x_1^{q-1} & (k_2-1)x_1^{q-2} & \dots & \prod_{j=1}^{q-1}(k_2-j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{q-1} & (k_q-1)x_1^{q-2} & \dots & \prod_{j=1}^{q-1}(k_q-j) \end{vmatrix} = \\ &= x_1^{\sum_{j=1}^q (k_j-q) + \sum_{l=1}^q (q-l)} \begin{vmatrix} 1 & k_1-1 & \dots & \prod_{j=1}^{q-1}(k_1-j) \\ 1 & k_2-1 & \dots & \prod_{j=1}^{q-1}(k_2-j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k_q-1 & \dots & \prod_{j=1}^{q-1}(k_q-j) \end{vmatrix} = \\ &= x_1^{\sum_{j=1}^q k_j - \frac{q(q+1)}{2}} \Delta_{k_1, \dots, k_q}^q, \end{aligned}$$

что доказывает а).

Максимальное значение величины $\sum_{j=1}^q k_j - q(q+1)/2$ достигается на миноре $M_{k_1, \dots, k_q}^{1, \dots, q}$, находящемся в левом нижнем углу матрицы A , а именно при $k_j = (n-1)q + j$, $1 \leq j \leq q$. Оно равно $\sum_{j=1}^q ((n-1)q + j) - q(q+1)/2 = (n-1)q^2$.

Вычислим $\Delta_{(n-1)q+1, \dots, nq}^q$. Для удобства положим $m = (n-1)q$. Тогда $\Delta_{(n-1)q+1, \dots, nq}^q = \Delta_{m+1, \dots, m+q}^q =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & m & \dots & \prod_{j=1}^{l-1}(m+1-j) & \dots & \prod_{j=1}^{q-1}(m+1-j) \\ 1 & m+1 & \dots & \prod_{j=1}^{l-1}(m+2-j) & \dots & \prod_{j=1}^{q-1}(m+2-j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & m+k-1 & \dots & \prod_{j=1}^{l-1}(m+k-j) & \dots & \prod_{j=1}^{q-1}(m+k-j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & m+q-1 & \dots & \prod_{j=1}^{l-1}(m+q-j) & \dots & \prod_{j=1}^{q-1}(m+q-j) \end{vmatrix}.$$

Вычтем из l -го столбца предыдущий, умноженный на $m - l + 2$ при $2 \leq l \leq q$. При этом преобразовании определитель не изменится. Получим $\Delta_{m+1, \dots, m+q}^q =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \prod_{j=1}^{l-2} (m+2-j) & \dots & \prod_{j=1}^{q-2} (m+2-j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k-1 & \dots & (k-1) \prod_{j=1}^{l-2} (m+k-j) & \dots & (k-1) \prod_{j=1}^{q-2} (m+k-j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q-1 & \dots & (q-1) \prod_{j=1}^{l-2} (m+q-j) & \dots & (q-1) \prod_{j=1}^{q-2} (m+q-j) \end{vmatrix}.$$

Выше мы использовали, что $\prod_{j=1}^{l-1} (m+k-j) - (m-l+2) \prod_{j=1}^{l-2} (m+k-j) = (k-1) \prod_{j=1}^{l-2} (m+k-j)$.

Вынося из k -й строчки множитель $k-1$ при $2 \leq k \leq q$, получаем рекуррентное соотношение

$$\Delta_{m+1, \dots, m+q}^q = (q-1)! \Delta_{m+2, \dots, m+q}^{q-1}.$$

Таким образом, $\Delta_{m+1, \dots, m+q}^q = (\prod_{j=2}^{q-1} j!) \Delta_{m+q-1, m+q}^2$. Но

$$\Delta_{m+q-1, m+q}^2 = \begin{vmatrix} 1 & m+q-2 \\ 1 & m+q-1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, $\Delta_{m+1, \dots, m+q}^q = \prod_{j=1}^{q-1} j!$,

$$M_{(n-1)q+1, \dots, nq}^{1, \dots, q} = x_1^{(n-1)q^2} \prod_{j=1}^{q-1} j!,$$

что доказывает б).

Из леммы 2 следует, что

$$D_{q,n}(x_1, \dots, x_n) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=2}^n (x_1 - x_i)^{q^2}$$

для некоторого многочлена $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Так как степень произведения $\prod_{i=2}^n (x_1 - x_i)^{q^2}$ относительно переменной x_1 равна $(n-1)q^2$, то из разложения (6) и пункта б) получаем, что $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не зависит от x_1 ,

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right) A_{(n-1)q+1, \dots, nq}^{1, \dots, q}.$$

Учитывая структуру первоначальной матрицы A , имеем

$$A_{(n-1)q+1, \dots, nq}^{1, \dots, q} = (-1)^\sigma D_{q, n-1}(x_2, \dots, x_n),$$

где

$$\sigma = \sum_{j=1}^q ((n-1)q + j) + \sum_{j=1}^q j = (n-1)q^2 + q(q+1).$$

Поскольку число $q(q+1)$ чётно, то

$$\begin{aligned} D_{q, n}(x_1, \dots, x_n) &= \left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right) D_{q, n-1}(x_2, \dots, x_n) (-1)^{(n-1)q^2} \prod_{i=2}^n (x_1 - x_i)^{q^2} = \\ &= \left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right) D_{q, n-1}(x_2, \dots, x_n) \prod_{i=2}^n (x_i - x_1)^{q^2}, \end{aligned}$$

что доказывает (7). ■

Окончательная формула (2) для вычисления определителя $D_{q, n}(x_1, \dots, x_n)$ получается индукцией по n из рекуррентного соотношения (7). Действительно, при $n = 2$ согласно (7) и (1) имеем

$$D_{q, 2}(x_1, x_2) = \left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right) (x_2 - x_1)^{q^2} D_{q, 1}(x_2) = \left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right)^2 (x_2 - x_1)^{q^2}.$$

Пусть формула (2) справедлива при $n \leq k$. Тогда из (7) получаем

$$\begin{aligned} D_{q, k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) &= D_{q, k}(x_2, \dots, x_{k+1}) \left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right)^{k+1} \prod_{i=2}^{k+1} (x_i - x_1)^{q^2} = \\ &= \left[\left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right)^k \prod_{2 \leq i < l \leq k+1} (x_l - x_i)^{q^2} \right] \left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right)^{k+1} \prod_{i=2}^{k+1} (x_i - x_1)^{q^2} = \\ &= \left(\prod_{j=0}^{q-1} j! \right)^{k+1} \prod_{1 \leq i < l \leq k+1} (x_l - x_i)^{q^2}, \end{aligned}$$

что доказывает (2).

Автор благодарит Л. В. Крицкова и В. С. Панфёрова за полезные обсуждения и внимание к работе, а также рецензента за указание на работы [4], [5].

Литература

- [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М., ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [2] Mouçouf M., Zriaa S. A new approach for computing the inverse of confluent Vandermonde matrices via Taylor's expansion // Linear and multilinear algebra. — 2022. — Vol. 70, No. 20. — pp. 5973-5986.
- [3] Aitken A. C. Determinants and matrices. New York, Interscience Publishers, 1956.
- [4] Kalman D. The generalized Vandermonde Matrix // Mathematics Magazine. — 1984. — Vol. 57, No. 1. — pp. 15-21.
- [5] Flowe R. P., Harris G. A A note on generalized Vandermonde determinants // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1993. — Vol. 14, No. 4. — pp. 1146-1151.
- [6] Домрина А. В. О свойствах пределов решений в некоммутативной сигма-модели // Тр. ММО. — 2022. — Т.83, Вып. 2. — С. 241-256.

Поступила 26.07.2023

ON A GENERALIZATION OF VANDERMONDE DETERMINANT

A. V. Domrina

This paper is dedicated to calculation of a general class of determinants which contains the Vandermonde determinant and can not be found in familiar textbooks and problembooks. The calculation illustrates the methods of differentiation with respect to a parameter and the Laplace expansion

Keywords: determinant, differentiation with respect to a parameter, the Laplace expansion.