СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 512 + 513

МНОГОМЕРНЫЕ КАЛЕЙДОСКОПЫ: ГЕОМЕТРИЯ, АЛГЕБРА И КОМБИНАТОРИКА

М. В. Мещеряков

Мордовский государственный университет
Саранск, Россия

mesh@math.mrsu.ru

Статья содержит наглядное изложение элементов теории групп, порождённых отражениями в конечномерных евклидовых пространствах, основанное на естественнонаучном понятии калейдоскопа. Она предназначена преподавателям линейной алгебры и геометрии, дискретной математики, учителям специализированных физико-математических классов школ и студентам факультетов математики и информатики различных направлений подготовки, включая ряд физических и инженерных специальностей. Через рассмотрение калейдоскопов отмечаются взаимосвязи между несколькими различными разделами математики и физики, объединёнными идеей симметрии. Одна из целей статьи — показать, как рассмотрение вполне конкретной задачи, не требующей предварительной математической подготовки, приводит к пониманию ряда глубоких математических результатов, связанных с вопросами классификации конечных групп отражений.

Ключевые слова: математическое образование, группы, порождённые отражениями, матричный анализ, дискретная и вычислительная геометрия, комбинаторика.

1. Введение

Исследование симметрии геометрических фигур восходит к очень древним периодам развития человеческой культуры. Достаточно указать на украшение различного рода мозаиками и орнаментами многих известных древних храмов (см. [1]).

Начало использования зеркальной симметрии относительно нескольких зеркал с целью получения кратных симметричных геометрических паттернов относится к первой половине XIX века. В переводе с греческого языка слово калейдоскоп переводится как «наблюдаю хороший вид».

Одна из версий известного *цилиндрического калейдоскопа* восходит к английскому физику XIX века Д. Брюстеру. Развитие геометрии в XIX веке привело к классификации правильных многогранников в многомерных евклидовых пространствах и к классификации алгебраических объектов, называемых простыми алгебрами Ли. Оказалось, что решение этих классификационных задач приводит к исследованию свойств конфигураций конечного числа векторов конечномерного евклидова пространства. Эти конфигурации носят название *систем корней*. Именно они составляют математическую основу изучения калейдоскопов.

На наивном уровне понимания калейдоскоп строится из проходящих через начало координат зеркал, перпендикулярных векторам «ёжика» — систем корней. Математика калейдоскопов в n-мерном евклидовом пространстве сводится к изучению *конечных групп* ортогональных матриц, порождённых матрицами отражений относительно гиперплоскостей (зеркал) евклидова пространства. Это условие конечности — наиболее существенное ограничение на расположение зеркал. Указанные группы часто возникают как группы симметрий физических и математических объектов. Исследованию этих групп и их обобщений посвящены работы таких выдающихся математиков, как Э. Картан, Г. Вейль, Г. Кокстер, Б. Делоне, Э. Винберг, Б. Венков, Е. Дынкин.

Замечательный российский математик академик В. И. Арнольд обнаружил глубокие применения *групп отражений* в теории особенностей дифференцируемых функций, каустик и волновых фронтов [2].

В тридцатых годах прошлого века Г. Кокстер получил классификацию всех возможных расположений систем зеркал n-мерного евклидова пространства, отражения относительно которых порождают конечные группы ортогональных матриц. Наша цель — кратко рассказать о некоторых из этих научных результатов, используя их связь с калейдоскопами как наглядными геометрическими объектами, чтобы продемонстрировать на этой модельной задаче естественность возникновения ряда плодотворных математических понятий и методов. Базовые математические инструменты и области математического знания, возникающие в связи с этим, включают в себя *линейную алгебру*, *основы теории групп* и немного *теории графов*.

В настоящее время такие дискретные комбинаторно-геометрические структуры возникают в задачах физики *фуллеренов* и *графенов* при разработке *нанотехнологий*.

2. Зеркала и калейдоскопы

Не давая пока точного определения, начнём с рассмотрения двумерных калейдоскопов. Например, используя два прямоугольных зеркала, соединённых вдоль ребра под углом $180^0/m$ для некоторых целых значений $m \geqslant 2$, можно получить, применяя последовательные отражения относительно взятых зеркал к выбранному геометрическому телу (обычно это крашеный кри-

сталл), различные красивые геометрические фигуры. Именно это и используется в известной детской игрушке под названием калейдоскоп.

Мы попробуем разобраться в первичных понятиях той математики, которая связана с этой игрушкой, начав её рассмотрение на интуитивном уровне строгости.

В область между зеркалами, называемую *камерой*, поместим, скажем, небольшой флажок и подвергнем его последовательным отражениям относительно зеркал, т. е. будем кратно применять осевые симметрии. Каждое зеркало изобразим на рисунке вместе с вектором, направленным перпендикулярно зеркалу, и будем такой вектор называть корневым вектором, или просто *корнем* (рис. 1).

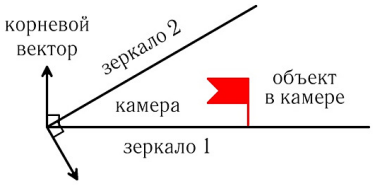

Рис. 1.

Образы флажка в калейдоскопе будут состоять из реального объекта (флажка) вместе с виртуальными объектами в виртуальных камерах, получаемых кратными отражениями реальной камеры. Исходная камера и виртуальные камеры заполняют, как нетрудно видеть, всю плоскость без перекрытий в силу указанного выше условия на выбор угла между зеркалами. Возможные типы двухзеркальных цилиндрических калейдоскопов соответствуют бесконечному семейству правильных многоугольников с чётным числом $2m$ сторон. Заметим, что правильные многоугольники с нечётным числом сторон делятся их осями симметрии (зеркалами) на чётное число треугольников, принадлежащих камерам, которые ограничены зеркалами (рис. 2). Но при рассмотрении калейдоскопов нам будут важны именно камеры.

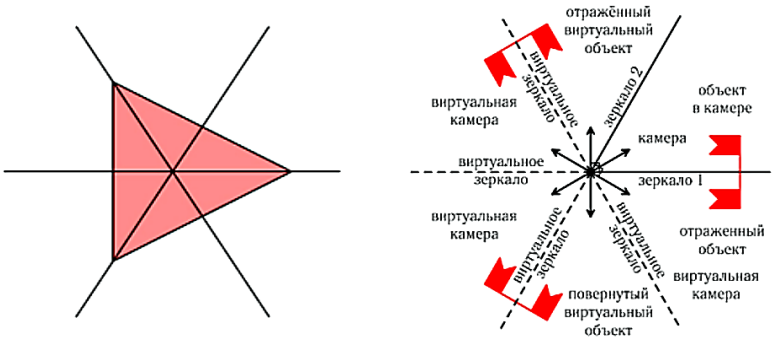

Рис. 2.

В трёхмерном пространстве, как известно ещё со времен древних греков, существуют пять различных правильных многогранников, которые делятся на три типа в соответствии со строением их групп симметрий. Именно: *тетраэдр*, двойственный сам себе, *куб* с двойственным ему *октаэдром* и *икосаэдр* с двойственным ему *додекаэдром* (рис. 3). С каждым из этих типов многогранников ассоциируются свои трёхмерные и сферические калейдоскопы. Их точное построение будет указано чуть позже.

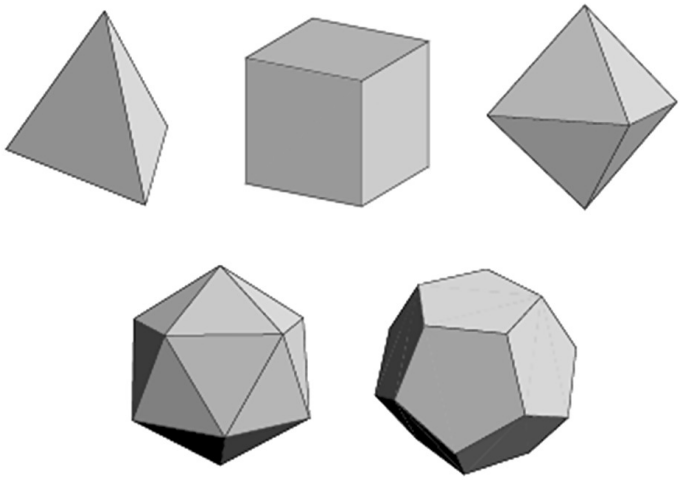

Рис. 3.

Аналогичным образом получаются многомерные калейдоскопы в n-мерном евклидовом пространстве при $n > 3$, хотя их трудно визуализировать. Существенное математическое различие с двумерным случаем состоит в том, что имеется только конечное число типов многомерных калейдоскопов, если потребовать, чтобы среди зеркал не *было бы зеркала перпендикулярного всем остальным зеркалам калейдоскопа.* Далее мы увидим, что в размерности 4 имеется пять типов калейдоскопов, в размерностях $6, 7, 8$ — четыре типа и всего по три типа калейдоскопов в остальных размерностях. Чтобы объяснить природу перечисленных ответов потребуются определённые математические понятия и инструменты.

3. Отражения и конечные группы отражений

Математическая модель зеркала в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ — это $(n-1)$-мерное линейное подпространство M, состоящее из векторов[1]

[1]Векторы из $\mathbb{R}^n$ удобно рассматривать как матрицы-столбцы высоты n. Тогда скалярное произведение (u, v) векторов u и v равно произведению матриц $u^T \cdot v$, где u^T — транспонированная матрица к матрице u.

v, удовлетворяющих линейному уравнению $(\alpha, v) = 0$, где α — ненулевой вектор. Вектор α перпендикулярен подпространству M и называется *корневым вектором* зеркала M. Можно считать длину вектора α равной 1. *Отражение* в зеркале M с корневым вектором α — это линейное преобразование R_α пространства $\mathbb{R}^n$, задаваемое формулой

$$R_\alpha(v) = v - 2(\alpha, v)\alpha, \ \ \mid \alpha \mid = 1.$$

С другой стороны, отражение R_α описывается $n \times n$ матрицей $I_n - 2\alpha\alpha^T$, где I_n — единичная матрица порядка n.

Пример. На плоскости $\mathbb{R}^2$ для зеркала с корневым вектором $\alpha = (0, -1)$ имеем уравнение $x_1 = 0$. Отражение в этом зеркале задаётся матрицей

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Зеркало с корневым вектором $\beta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ образует угол θ с осью $x_1 = 0$, а отражение в нём задаётся матрицей

$$R_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в этом примере произведение матриц $R_\alpha \cdot R_\beta$ описывает поворот плоскости на угол 2θ около начала координат.

Обратим внимание на то, что матрицы отражений оказываются полезными и в такой области математики, как *вычислительная линейная алгебра* (см., например, [3]). Что касается математики калейдоскопов, то весьма важным является то, что любую ортогональную матрицу можно представить в виде произведения конечного числа матриц отражений. Это следует, скажем, из канонического блочно-диагонального вида записи матриц ортогональных операторов, хорошо известного в линейной алгебре, если учесть, что блоки имеют вид матриц из примера, рассмотренного выше.

Теперь всё подготовлено к формулировке теоремы о классификации двумерных калейдоскопов.

Теорема 1. *Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ даны два зеркала M_1 и M_2 с корневыми векторами α и β, образующими угол $\theta < \pi/2$. Пусть C – камера между двумя взятыми выше зеркалами, и она не содержит виртуальных зеркал, т. е. прямых, получающихся кратными отражениями в зеркалах M_1 и M_2 из других зеркал. Тогда верны следующие утверждения.*

1) *Группа G матриц, состоящая из всевозможных произведений матриц отражений R_α и R_β, содержит конечное число элементов тогда и только тогда, когда $\theta = \pi/m$ при некотором целом $m \geqslant 2$. Кроме того, группа G есть группа симметрий правильного многоугольника с $2m$ сторонами.*

2) *Если $\theta = \pi/m$, то образы gC камеры C, где g пробегает всю группу G, заполняют плоскость без перекрытий. Равенство $gC = C$ возможно толь-*

ко для единичной матрицы, и каждая виртуальная камера получается из реальной камеры C путём применения единственного элемента группы G.

4. Калейдоскопы в размерности 3

Обратимся теперь к точному описанию трёхмерных калейдоскопов.

Рассмотрим конфигурацию из трёх зеркал в $\mathbb{R}^3$ и группу преобразований G, порождённую отражениями в этих зеркалах. Будем считать, что все эти зеркала проходят через фиксированную точку $O \in \mathbb{R}^3$. Плоскости зеркал делят всё пространство на 8 трёхгранных углов, называемых конусами. В школьной математике их называют октантами. Один из этих конусов — это просто фиксированная камера C. Будем называть её *фундаментальной камерой* калейдоскопа. Грани этих конусов часто называются *стенками камер* и являются частями зеркал. Рис. 4 наглядно изображает эту ситуацию.

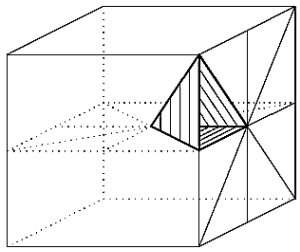

Рис. 4.

Обозначим через π/p, π/q и π/r внутренние двугранные углы между стенками камеры C. Всегда можно считать, что выполнены неравенства $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant r$. При $p = q = 2$ одно из зеркал перпендикулярно двум другим. Этот случай сводится к двумерному калейдоскопу. Поэтому предположим, что $q > 2$. Сохраняя это предположение, сформулируем теорему о строении трёхмерных калейдоскопов.

Теорема 2. *Пусть G – группа ортогональных матриц, порождённая отражениями в трёх стенках фундаментальной камеры C. Допустим, что C не содержит виртуальных зеркал, полученных кратными отражениями в стенках камеры C. Тогда верны следующие утверждения.*

1) *Если для некоторой внутренней точки x камеры C орбита Gx является конечным множеством, то целые положительные числа (p, q, r) удовлетворяют следующей системе арифметических условий:*

$$2 \leqslant p \leqslant q \leqslant r \ \text{ и } \ 1/p + 1/q + 1/r > 1. \qquad (*)$$

2) *Если $q > 2$, то неравенства $(*)$ имеют только следующие целочисленные решения: $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ и $(2, 3, 5)$.*

3) *Пусть* (p, q, r) *— одна из троек пункта* 2) и C *– фундаментальная камера в трёхмерном пространстве с соответствующими этой тройке двугранными углами. Тогда объединение образов* gC *камеры* C *по всем элементам* $g \in G$ *совпадает со всем пространством. Внутренности виртуальных камер* gC *не пересекаются и число виртуальных камер равно числу элементов группы* G.

Чтобы более наглядно представить строение трёхмерных калейдоскопов заметим, что с каждым решением системы $(*)$ можно ассоциировать:

— правильный многогранник (*тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр* и *додекаэдр*) с центром в точке O,

— *триангуляцию граней* указанного многогранника равными треугольниками,

— конус C с вершиной в точке O и внутренними двугранными углами, равными π/p, π/q и π/r.

Обратимся к примерам-иллюстрациям.

Пример. Тройке $(p, q, r) = (2, 3, 4)$ отвечает трёхмерный куб, а тройке $(2, 3, 5)$ — додекаэдр или двойственный ему икосаэдр.

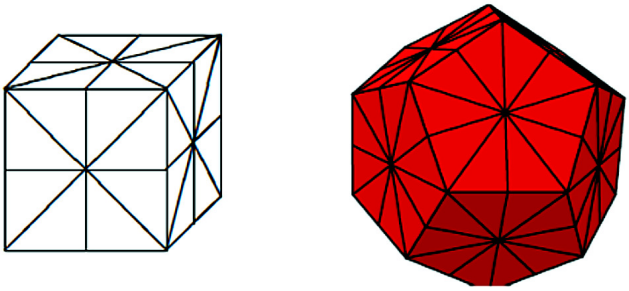

Рис. 5.

На гранях куба и додекаэдра (рис. 5) изображены следы виртуальных и реальных зеркал. Следы разбивают грани куба на равнобедренные прямоугольные треугольники.

Каждый треугольник является пересечением виртуальной или реальной камеры с плоскостью грани куба или додекаэдра.

Тройке $(p, q, r) = (2, 3, 3)$ отвечает правильный тетраэдр, или симплекс, вместе с соответствующей триангуляцией его граней прямоугольными треугольниками (рис. 6).

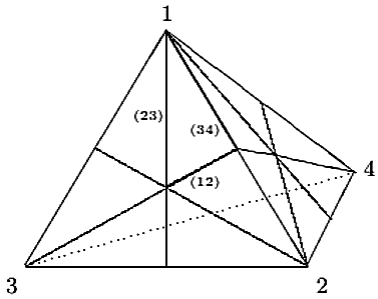

Рис. 6.

В силу теоремы 2 и замечаний после её формулировки яс-

но, что группы симметрий правильных многогранников суть группы, порождённые отражениями. Используя обозначения, общепринятые в теории групп, порождённых отражениями [4], приведём основную информацию о комбинаторике и геометрии калейдоскопов трёхмерного пространства в виде следующей таблицы.

Двугранные углы камер	**Тип многогранника**	**Группа симметрий**	**Число зеркал**	**Число камер**
$(\pi/2,\ \pi/3,\ \pi/3)$	Тетраэдр	S_4	6	24
$(\pi/2,\ \pi/3,\ \pi/4)$	Куб или октаэдр	B_3	9	48
$(\pi/2,\ \pi/3,\ \pi/5)$	Икосаэдр или додекаэдр	H_3	15	120

Доказательства теорем о строении двумерных и трёхмерных калейдоскопов можно провести на основе элементарных геометрических и комбинаторно-алгебраических соображений, доступных школьнику или студенту 1-го курса вуза по физико-математическим направлениям подготовки. Одно из лучших изложений такого доказательства есть в книге Г. Кокстера [5]. Но многомерные калейдоскопы наиболее естественно классифицируются средствами линейной алгебры на основе рассмотрения специального класса графов, называемых диаграммами Кокстера–Дынкина.

Диаграммы Кокстера–Дынкина строятся либо по камерам, на которые гиперплоскости, отвечающие отражениям из группы, разбивают содержащее их конечномерное евклидово пространство, либо по системе корневых векторов, связанных с системой зеркал групп отражений. Комбинаторика систем корней и связанная с ней техника вычислений является одним из наиболее разработанных методов работы в задачах дискретной и вычислительной геометрии. Укажем здесь лишь на двухтомник [6], где на глубоко содержательных приложениях из теории упаковок и теории кодирования демонстрируется применение методов, развитых в математике калейдоскопов.

Первоначальное представление о применениях конечных групп отражений или математических калейдоскопов в теории особенностей гладких отображений можно получить по книге В. И. Арнольда [2]. В следующем разделе мы кратко изложим некоторые основные понятия математики калейдоскопов в многомерном случае.

5. Калейдоскопы в высоких размерностях

Обращаясь к калейдоскопам в многомерных евклидовых пространствах, обозначим через Σ систему всех корневых векторов таких расположений зеркал, *которые инвариантны относительно отражений* R_α для всех корневых векторов $\alpha \in \Sigma$. Это свойство называется *условием калейдоскопичности* системы корневых векторов («ёжика») заданного расположения зеркал. Оно допускает следующую формулировку: для любых $\alpha, \beta \in \Sigma$ вектор $R_\alpha(\beta) \in \Sigma$.

Произвольная система корней Σ называется *неприводимой*, если её нельзя представить в виде объединения двух непустых ортогональных подсистем. Приведём изображения нескольких примеров неприводимых двумерных систем корней вместе с их простыми подсистемами, определяемыми ниже (рис. 7–9).

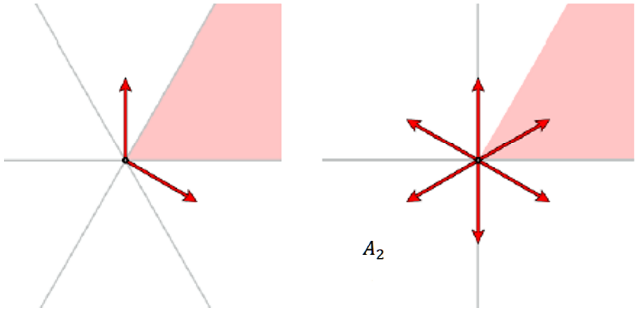

Рис. 7.

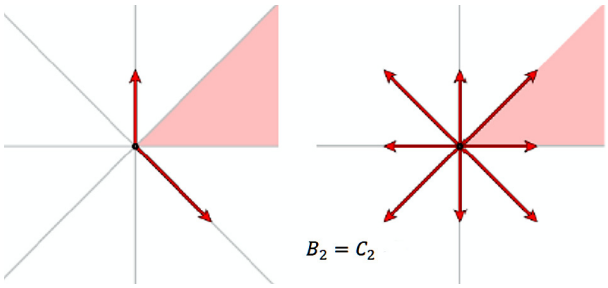

Рис. 8.

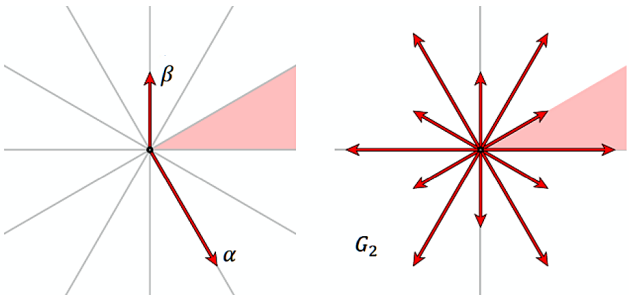

Рис. 9.

Системы корней с условием калейдоскопичности обладают рядом замечательных свойств. Подробное изложение этих свойств с доказательствами можно найти, например, в [4, 7, 8]. Сформулируем только нужные для наших целей свойства.

Система корней Σ содержит подсистему корней $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, называемых *простыми корнями*, обладающую свойствами:

a) *Набор Δ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$.*

b) *Скалярные произведения $(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant 0$, т.е. углы между этими векторами не являются острыми.*

c) *Всякий корень $\beta \in \Sigma$ представляется в виде линейной комбинации векторов базиса Δ, у которой все её ненулевые коэффициенты целые числа одного знака.*

В качестве ещё одного примера-иллюстрации на рис. 10 изображены системы корней типа B_3 и типа C_3.

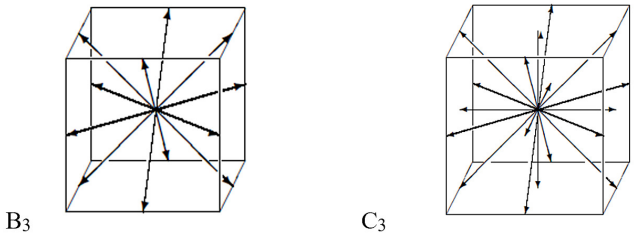

Рис. 10.

В результате изучение калейдоскопов сводится к исследованию свойств системы простых корней Δ. Она содержит полную информацию о геометрических свойствах фундаментальной камеры C. По системе Δ камера C определяется посредством системы неравенств: $(\alpha_i, x) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant 0$, то углы между зеркалами $\Theta_{ij} \leqslant \pi/2$. В силу свойства c) для внутренних точек $x \in C$ выполнены неравенства $(\alpha, x) < 0$. Поэтому никакое зеркало из системы отражающих зеркал не проходит через внутренние точки C. Далее, в силу теоремы 1 верно $\Theta_{ij} = \pi/p_{ij}$, где p_{ij} — целые неотрицательные числа. Эту же информацию содержит симметрическая *матрица Картана – Кокстера* $A = (a_{ij})$, где числа a_{ij} равны попарным скалярным произведениям простых корней (α_i, α_j). Наконец, классификацию различных типов фундаментальных камер можно получить, используя *диаграммы* или *графы Кокстера – Дынкина*. Вершины этого графа отвечают простым корням и две вершины α_i, α_j соединяются ребром, если $p_{ij} > 2$.

Например, диаграмма $\circ\!\!-\!\!\bullet$ изображает векторы $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, порождающие плоскость с уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ в трёхмерном евклидовом пространстве. Таким же образом каждая диаграмма Кокстера – Дынкина из n точек определяет «ёжик» из n (не ортогональных) базисных векторов в n-мерном евклидовом пространстве.

Все неприводимые диаграммы Кокстера – Дынкина нетрудно классифицировать (см. [7]). На рис. 11 приводится список возможных графов Кокстера – Дынкина.

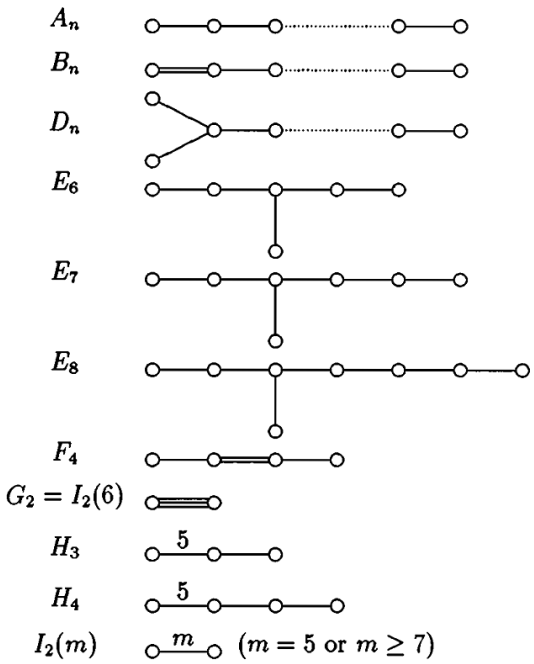

Рис. 11.

Переход от калейдоскопов к матрицам и графам — образец одного из важных математических методов, позволяющих кодировать многомерную геометрическую информацию посредством дискретных данных. Ограничиваясь этим эскизным изложением существа решения задачи о калейдоскопах, приведём, тем не менее, итоговую таблицу, содержащую часть известных комбинаторных результатов о классификации калейдоскопов в размерностях $n > 3$.

Размерность	**Число групп отражений**	**Число зеркал**	**Число камер**
4	5	10, 12, 16, 24, 60	$5 \cdot 4!$, $2^5 \cdot 4!$, $2^4 \cdot 4!$, $2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12$, $2 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 30$
5	3	15, 20, 25	$6 \cdot 5!$, $2^4 \cdot 4!$, $2^5 \cdot 5!$
6	4	21, 30, 36, 36	$7 \cdot 6!$, $2^5 \cdot 6!$, $2^6 \cdot 6!$, $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12$
7	4	28, 42, 49, 63	$8 \cdot 7!$, $2^7 \cdot 7!$, $2^6 \cdot 7!$, $2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 18$
8	4	36, 56, 64, 120	$9 \cdot 8!$, $2^7 \cdot 8!$, $2^8 \cdot 8!$, $2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 30$
$n > 8$	3	$n(n+1)/2$, $n(n-1)$, n^2	$(n+1)n!$, $2^{n-1}n!$, $2^n n!$

Детальному комбинаторно-геометрическому рассмотрению теории конечных групп отражений в конечномерных евклидовых пространствах посвящена недавно изданная книга [8], которая содержит также хорошо подобранные циклы задач для самостоятельного решения или разбора их на студенческих семинарах.

6. Комментарии и замечания

Другим важным аспектом, связанным с классификацией калейдоскопов, является возможность эффективного исследования широкого класса многогранников, возникающих как выпуклые оболочки орбит различных точек пространства при действии на них всевозможных кратных отражений. Этот класс многогранников, называемых *весовыми многогранниками*, используется для описания представлений групп и алгебр Ли [4]. Под названием *многогранников отображений моментов* они возникают при изучении свойств гамильтоновых динамических систем с компактными группами симметрий [9]. Дискретная и комбинаторная геометрия этого класса многогранников лежит в основе многих математических моделей передачи информации. Приведём рисунки различных видов таких многогранников в трёхмерном пространстве, показывающие их замечательное разнообразие.

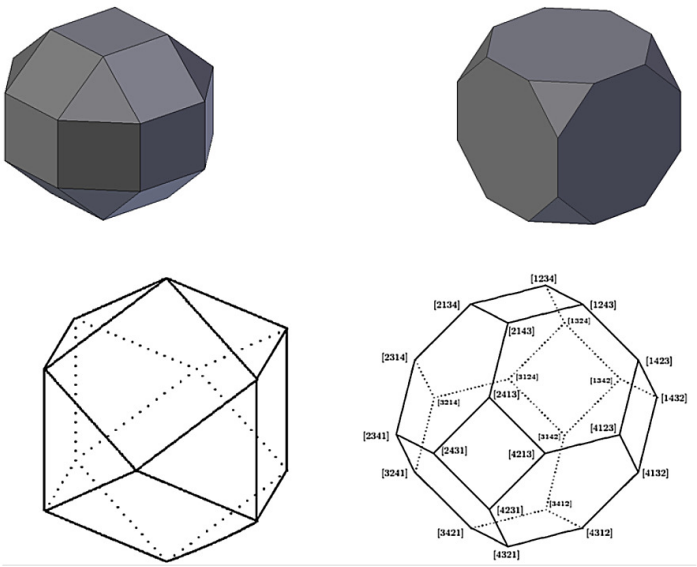

Рис. 12.

Справа внизу на рис. 12 изображён многогранник, называемый *пермутоэдром*, с метками вершин в виде перестановок. Пермутоэдр возникает как выпуклая оболочка орбиты вектора с компонентами $(1, \ldots, n)$ при стандартном действии группы перестановок S_n на его компоненты.

На рис. 13 указана серия рисунков выпуклых оболочек орбит и их перестроек при различном выборе точек в замыкании фундаментальной камеры группы отражений типа A_3, действующей в трёхмерном евклидовом пространстве.

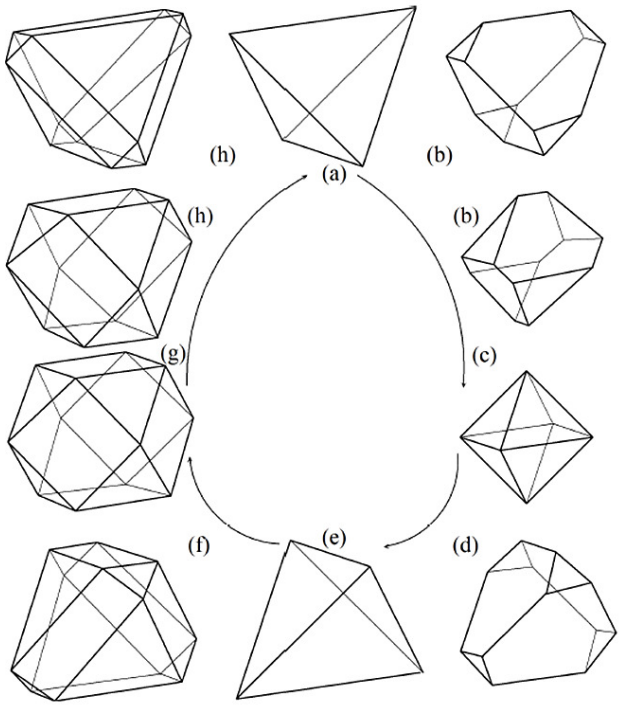

Рис. 13.

В заключение статьи приведём рисунок одного из сферических калейдоскопов (рис. 14). Он получается при пересечении семейства камер одной из евклидовых групп отражений со сферой.

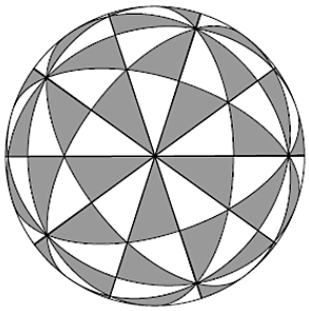

Рис. 14.

В неевклидовой геометрии Лобачевского также возможно рассмотрение калейдоскопов. Их математическое определение, связанное с теорией гиперболических групп отражений, можно найти в работе Э. Б. Винберга [10]. На плоскости Лобачевского имеется бесконечно много различных калейдоскопов, как и в трёхмерном пространстве Лобачевского. На рис. 15 приведено изображение калейдоскопа, связанного с некоторым примером гиперболической группы отражений ранга 3.

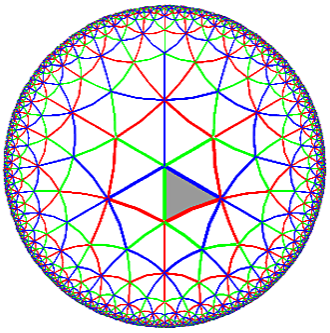

Рис. 15.

Наконец, на рис. 16 изображены примеры калейдоскопов на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре, причём калейдоскоп на рис. 16,б — это гравюра голландского графика М. Эшера.

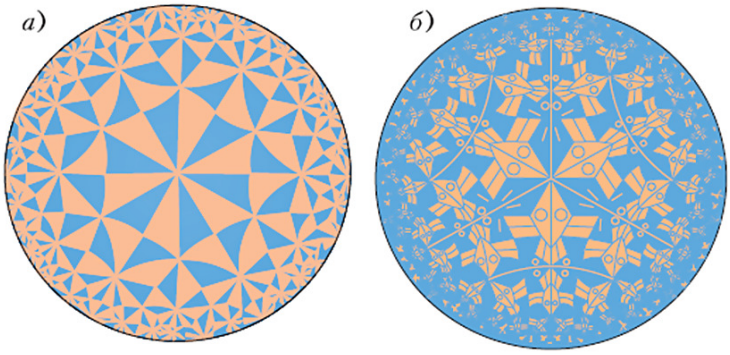

Рис. 16.

Относительно калейдоскопов в n-мерном пространстве Лобачевского имеется удивительный и глубокий результат Э. Б. Винберга об отсутствии калейдоскопов при $n \geqslant 30$ [10].

Литература

[1] Вейль Г. Симметрия. М.: Наука, 1968.

[2] Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.

[3] Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983.

[4] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.

[5] Кокстер Г. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.

[6] Конвей Дж., Слоен Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т.1, 2. М.: Мир, 1990.

[7] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.

[8] Borovik A. V.,Borovik A. Mirrors and reflections: The geometry of finite reflection groups. New York: Springer Science+Business Media, 2010.

[9] Audin M. Torus actions on symplectic manifolds. Basel: Birkhauser, 2004.

[10] Винберг Э.Б. Калейдоскопы и группы отражений // Матем. просв. — 2003. — Сер.3. Вып.7. — С.45-63.

[11] Винберг Э. Б. Гиперболические группы отражений // Успехи мат. наук. — 1985. — Т.40. Вып. 1. — С.29-66.

Поступила 22.11.2022

MULTIDIMENSIONAL KALEIDOSCOPES: GEOMETRY, ALGEBRA AND COMBINATORICS

M. V. Meshcheryakov

The article contains a visual presentation of the elements of group theory generated by reflections in finite-dimensional Euclidean spaces, based on the natural science concept of a kaleidoscope. It is intended for teachers of linear algebra and geometry, discrete mathematics, teachers of specialized physical and mathematical classes of schools and students of mathematics and computer science departments of various areas of training, including a number of physical and engineering specialties. Through the consideration of kaleidoscopes, the relationships between several different branches of mathematics and physics, united by the idea of symmetry, are noted. One of the goals of the article is to show how the consideration of a very concrete problem that does not require prior mathematical training leads to an understanding of a number of deep mathematical results related to the classification of finite reflection groups.

Keywords: mathematical education, groups generated by reflections, matrix analysis, discrete and computational geometry, combinatorics.