

ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

УДК 514.172.45

РАЗБОР ЗАДАНИЯ О РАЗБИЕНИИ
МНОГОУГОЛЬНИКА ДИАГОНАЛЯМИ

В. А. Лецко

*Волгоградский гос. социально-педагогический университет,
Волгоград, Россия*

val-etc@yandex.ru

В статье представлен разбор заданий, связанных с разбиением выпуклого многоугольника диагоналями, которые были предложены для самостоятельного исследования в прошлом номере журнала, а также некоторые обобщения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: выпуклый многоугольник, разбиение, диагонали.

1. Исследовательское задание из прошлого выпуска журнала

Под многоугольником мы будем понимать часть плоскости, ограниченную плоской замкнутой несамопересекающейся ломаной (включая саму эту ломаную), никакие три последовательные вершины которой не принадлежат одной прямой. Все многоугольники в условиях задач предполагаются выпуклыми, поэтому в дальнейшем слово «выпуклый» мы будем опускать. Многоугольники, на которые разбивается исходный многоугольник своими диагоналями, будем называть элементарными. Точку внутри многоугольника будем называть особенностью порядка k , если в ней пересекаются $k + 2$ диагонали. Последняя задача представляет собой исследование, для проведения которого понадобится компьютер.

1. Какое наибольшее число сторон может иметь элементарный многоугольник, возникающий при разбиении n -угольника его диагоналями?
2. Каково максимально возможное количество элементарных многоугольников, на которые разбивается n -угольник своими диагоналями?
3. Сколько особенностей может иметь семиугольник?
4. Может ли среди элементарных многоугольников присутствовать поровну треугольников и пятиугольников?

5. Будем называть два n -угольника однотипными, если среди их элементарных многоугольников присутствует поровну треугольников, четырёхугольников, пятиугольников и т. д. Будем говорить, что два n -угольника изополярны, если у них поровну особенностей каждого порядка. Могут ли два однотипных выпуклых n -угольника не быть изополярными?

2. Решение первой задачи

Прежде всего заметим, что количество сторон элементарного многоугольника не может превышать n , то есть количества сторон исходного многоугольника. В самом деле, в формировании сторон элементарного многоугольника, очевидно, не могут участвовать более двух диагоналей, исходящих из одной вершины (сторонами некоторых элементарных многоугольников могут служить стороны исходного, но такие элементарные многоугольники всегда являются треугольниками). Но каждая диагональ соединяет две вершины и, следовательно, учитывается дважды.

Если n нечётно, элементарный многоугольник может быть n -угольником. Например, это будет так, когда исходный многоугольник правильный. Ясно, что в этом случае многоугольник, высекаемый диагоналями в центре исходного, тоже будет правильным. Отметим, что в общем случае среди элементарных многоугольников исходного многоугольника, имеющего нечётное число сторон, не обязан встречаться многоугольник с числом сторон, равным числу сторон исходного.

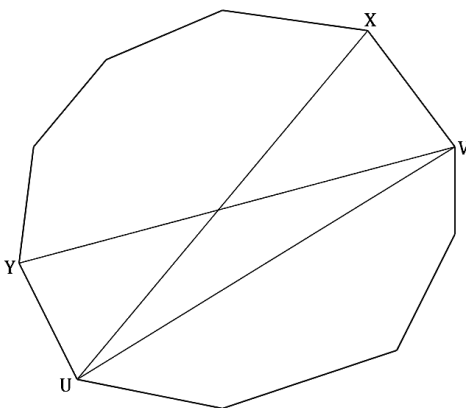


Рис. 1.

Если же n чётно, количество сторон элементарных многоугольников не может достигать n . В самом деле, предположим, что $n = 2k$ и среди элементарных многоугольников n -угольника найдётся n -угольник (на рис. 1 общий

случай проиллюстрирован на примере $n = 10$). Тогда этот элементарный n -угольник лежит на пересечении пар соседних диагоналей, выходящих из каждой вершины. Рассмотрим одну такую пару. Очевидно, что по одну сторону, по крайней мере одной из диагоналей (на рис. 1 это диагональ UV) лежит не более $k - 2$ вершин, а по другую — не менее k . Из второй группы вершин выходит не менее $2k$ интересующих нас диагоналей. Вторые концы двух из них (UX и VY) могут иметь в качестве вторых концов вершины U и V , а остальные как минимум $2k - 2$ диагонали обязаны пересекать диагональ UV . Но по другую сторону от UV лежит не более чем $k - 2$ вершины, из которых исходят не более $2k - 4$ интересующих нас диагоналей. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Чтобы показать, что в случае чётного n количество сторон элементарного многоугольника может достигать $n - 1$, достаточно рассмотреть правильный $(n - 1)$ -угольник и добавить n -ю вершину, как это показано на рис. 2 (общий случай вновь продемонстрирован на примере $n = 10$). Элементарный $(n - 1)$ -угольник, высекаемый диагоналями в центре правильного $(n - 1)$ -угольника, будет рассечён всего одной диагональю (на рис. 2 это диагональ A_5A_{10}), исходящей из добавляемой вершины, но при этом количество его сторон не изменится. Можно поступить и наоборот — удалить одну из вершин многоугольника с нечётным числом сторон (см. [1]).

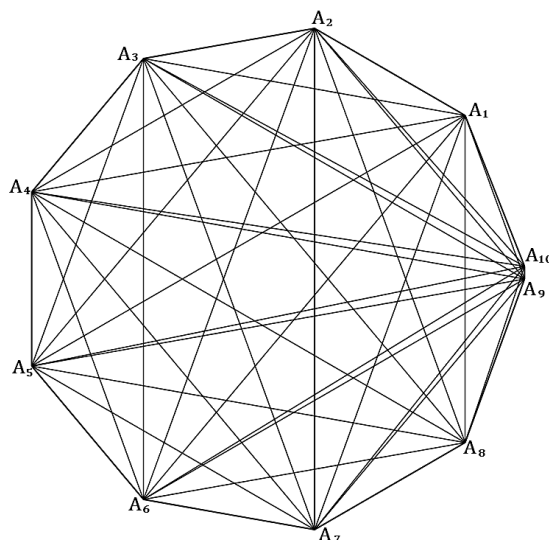


Рис. 2.

3. Решение второй задачи

Вторая задача широко известна. Классическое решение связано с применением теоремы Эйлера. Рассмотрим n -угольник с диагоналями как плоскую

укладку некоторого графа, вершинами которого служат вершины исходного многоугольника и точки пересечения диагоналей, а рёбрами — стороны исходного многоугольника и отрезки, на которые разбиваются диагонали точками пересечения. Согласно теореме Эйлера,

$$v + f - e = 1. \quad (1)$$

Здесь v — число вершин, e — число рёбер, а f — искомое количество элементарных многоугольников (внешнюю грань мы не учитываем). Для того, чтобы количество элементарных многоугольников было максимальным, очевидно, нужно, чтобы никакие три диагонали многоугольника не пересекались в одной точке внутри многоугольника (такие многоугольники мы будем называть *ординарными*, а многоугольники, имеющие особые точки — *особенными*).

Число точек пересечения диагоналей в ординарном n -угольнике равно $\binom{n}{4}$, так как каждая точка пересечения диагоналей однозначно определяется некоторой четвёркой вершин и обратно. (Этот факт легко понять, но опыт автора показывает, что даже сильные студенты и школьники часто не замечают этого простого подхода и начинают искать число точек пересечения диагоналей, суммируя эти точки по разным типам диагоналей.) С учётом вершин исходного многоугольника имеем $v = \binom{n}{4} + n$. Для подсчёта количества рёбер заметим, что на каждой диагонали число отрезков, на которые разбивается эта диагональ, на 1 больше числа точек пересечения, лежащих на этой диагонали, и, что каждая такая точка принадлежит двум диагоналям, получим, что число искомых элементарных отрезков равно $2\binom{n}{4} + \frac{n(n-3)}{2}$ (второе слагаемое, очевидно, равно количеству диагоналей). Добавив стороны исходного многоугольника, окончательно получим $e = 2\binom{n}{4} + \frac{n(n-3)}{2} + n$. Подставив найденные значения v и e в (1), окончательно получим, что максимально возможное количество элементарных многоугольников

$$f = \binom{n}{4} + \frac{n(n-3)}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}. \quad (2)$$

Легко показать, что каждая особенность порядка k уменьшает количество элементарных многоугольников на $\frac{k(k+1)}{2}$. Каждому особенному многоугольнику сопоставим упорядоченный набор $[s_1, s_2, \dots, s_m]$, где s_k — количество особенностей порядка k , а m — наибольшее число сторон элементарных многоугольников. Мы будем называть его *вектором особенностей*. Количество элементарных многоугольников, на которые разобьётся такой многоугольник

$$f = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24} - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^m s_k k(k+1). \quad (3)$$

Итак, задача о возможном количестве элементарных треугольников решена полностью? Достаточно воспользоваться формулой (3)? Однако для её применения нужно знать вектор особенностей. Но выяснение того, каким мо-

жет быть этот вектор для больших n — очень трудная задача. Достаточно заметить, что даже для частного случая, когда исходный многоугольник является правильным, она была окончательно решена сравнительно недавно (см. [2]).

Разумеется, с малыми n разобаться гораздо проще. У треугольника вообще нет диагоналей, а у четырёхугольников и пятиугольников не может быть особенностей. Многоугольник может быть особенным, начиная с $n = 6$. Ординарный шестиугольник разбивается своими диагоналями на 19 треугольников, 3 четырёхугольника и 3 пятиугольника, а особенный (очевидно, у шестиугольника может быть лишь одна особенность первого порядка) на 18 треугольников и 6 четырёхугольников. Изучению особенностей семиугольников посвящена следующая задача.

4. Решение третьей задачи

В формировании особенности второго порядка, очевидно, должны участвовать 4 диагонали, не имеющие общих вершин. Поэтому у семиугольника могут быть только особенности первого порядка.

14 диагоналей семиугольника можно подразделить на два класса. 7 диагоналей соединяют вершины через одну. Условно назовём их *малыми*. Оставшиеся 7 диагоналей будем называть *большими*. Из каждой вершины исходит ровно 4 диагонали. Эти диагонали пересекают малую диагональ, соединяющую соседние вершины, в четырёх разных точках. Поэтому точки пересечения, лежащие на малых диагоналях, не могут быть особенными. Значит, все особенности образуются при пересечении больших диагоналей.

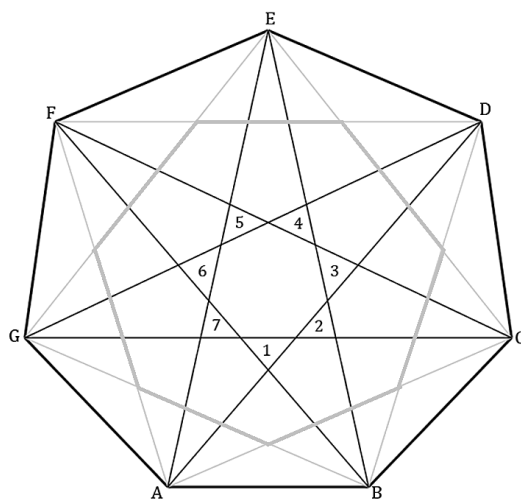


Рис. 3.

Рассмотрим ординарный семиугольник, при пересечении больших диагоналей которого образуется элементарный семиугольник (рис. 3). К этому эле-

ментарному семиугольнику примыкают 7 элементарных треугольников (на рисунке 3 они пронумерованы). Особые точки могут образовываться в том и только в том случае, когда какие-то из этих треугольников стянутся в точку. Например, перемещая вниз вершины C и G , можно добиться стягивания в точку треугольника под номером 1. При этом треугольники 2 и 7 будут увеличиваться, а затем и вовсе превратятся в четырёхугольники. Поэтому соседние пронумерованные треугольники не могут одновременно стянуться в точку. Следовательно, у семиугольника не может быть больше трёх особенностей.

Показать существование семиугольников с одной особенностью совсем легко. Например, действуя описанным выше способом. Семиугольник с двумя особенностями проще всего получить из произвольного пятиугольника. Проведём прямую через несмежные вершины элементарного пятиугольника (на рис. 4 это точки X и Y) и выберем на этой прямой две новые вершины так, чтобы вместе с имеющимися вершинами исходного пятиугольника они образовывали выпуклый семиугольник. Точки X и Y будут для этого семиугольника требуемыми особенностями.

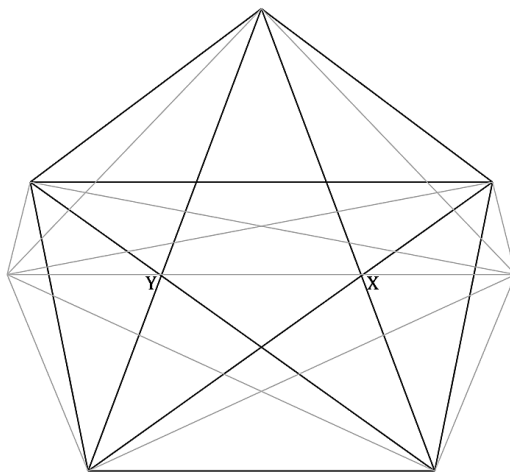


Рис. 4.

Наконец, семиугольник с тремя особенностями проще всего получить из правильного восьмиугольника. Из соображений симметрии легко понять, что вектор особенностей правильного восьмиугольника имеет вид $[8, 1]$. Удалив одну из вершин восьмиугольника, получим семиугольник с тремя особенностями (на рис. 5 это точки X, Y и Z).

Конечно, совершенно необязательно в построении семиугольника с тремя особенностями отталкиваться от правильного восьмиугольника. Существуют семиугольники с тремя особенностями, не имеющие никаких «следов правильности».

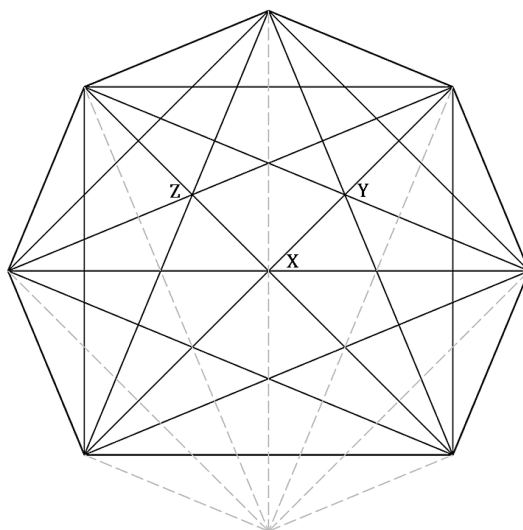


Рис. 5.

5. Решение четвёртой задачи

На первый взгляд может показаться, что треугольники всегда встречаются среди элементарных многоугольников чаще всего. Так, во всех рассмотренных нами примерах количество элементарных треугольников превышает суммарное количество остальных элементарных многоугольников вместе взятых. Такое преобладание треугольников объясняется тем, что элементарные многоугольники, хотя бы одна из вершин которых является вершиной исходного многоугольника, могут быть только треугольниками. А такие элементарные многоугольники во всех рассмотренных примерах составляют большинство. Так, в ординарных семиугольниках их по 28, а остальных элементарных многоугольников всего 22 (причём среди остальных тоже имеются треугольники). Описанная ситуация проиллюстрирована на рис. 3. Всё разнообразие элементарных многоугольников сосредоточено внутри многоугольника, высекаемого из исходного малыми диагоналями (на рис. 3 стороны этого многоугольника выделены жирными серыми линиями).

Но преобладание треугольников среди элементарных многоугольников характерно лишь для относительно небольших значений n . Тривиально подсчитывается, что количество элементарных треугольников, примыкающих к вершинам исходного многоугольника равно $n(n - 3)$. С ростом n это число растёт квадратично. В то же время, общее количество элементарных многоугольников, как видно из формул (2) и (3), является полиномом 4-й степени от n . Поэтому с ростом n вклад «периферийных» треугольников перестанет быть определяющим. Впрочем, это напрямую не означает, что треугольники перестанут составлять большинство, ведь они встречаются и среди остальных элементарных многоугольников.

Сначала предположим, что многоугольник ординарный. В этом случае суммарное количество сторон элементарных многоугольников равно $4\binom{n}{4} + n(n-3) + n$ (каждый элементарный отрезок диагоналей учтён дважды, а стороны — по одному разу). Это число на $(n-2)^2$ меньше учетверённого количества элементарных многоугольников. Значит, при любом n среднее число сторон элементарного многоугольника меньше 4. Но, если бы существовал многоугольник, среди элементарных многоугольников которого пятиугольников не меньше, чем треугольников, его среднее число сторон, разумеется, было бы не меньше 4. Значит, у всех ординарных многоугольников число элементарных треугольников больше числа элементарных пятиугольников и даже больше суммарного числа всех элементарных многоугольников, имеющих более четырёх сторон.

Мы знаем, что каждая особенность порядка k уменьшает число элементарных многоугольников на $\frac{k(k+1)}{2}$. В то же время, легко показать по индукции, что каждая особенность порядка k уменьшает суммарное число сторон элементарных многоугольников на $2k^2 + 4k$. Это число более чем в 4 раза превышает уменьшение количества элементарных многоугольников. Иными словами, каждая особенность уменьшает среднее число сторон элементарных многоугольников. Следовательно, среди них тоже не может быть таких, у которых число элементарных пятиугольников не меньше числа элементарных треугольников.

Число элементарных четырёхугольников может превышать число элементарных треугольников начиная с $n = 9$. Например, у девятиугольника с вершинами $A(0; 0), B(1; 0), C(50; 49), D(50; 53), E(3; 99), F(1; 100), G(-2; 100), H(-50; 51), I(-50; 47)$ среди элементарных многоугольников 67 треугольников и 69 четырёхугольников (остальные 18 элементарных многоугольников имеют по 5 сторон). С ростом n элементарные четырёхугольники составляют все большую долю элементарных многоугольников. По-видимому, начиная с некоторого n , эта доля превышает 50% для любого n -угольника, но точный ответ на этот вопрос автору неизвестен.

6. Решение пятой задачи

Если два n -угольника однотипны, соответствующие графы имеют поровну граней и рёбер (а следовательно, на основании соотношения Эйлера, и вершин). Если многоугольники не имеют особенностей, порядок которых больше двух, добиться одновременного равенства этих характеристик у многоугольников, имеющих разные векторы особенностей, невозможно. В самом деле, каждая особенность первого порядка уменьшает f на 1, а e — на 3, а особенность второго порядка «съедает» 3 грани и 8 рёбер. Для выравнивания количеств элементарных многоугольников каждая особенность второго порядка у одного многоугольника должна компенсироваться тремя особенностями первого у другого. Но тогда у графа первого многоугольника будет больше рёбер, чем у графа второго, что исключает их однотипность.

А вот наличие особенности третьего порядка уже позволяет выровнять число элементарных многоугольников и суммарные количества их сторон у многоугольников с разными векторами особенностей. Минимальный пример таких векторов: $v_1 = [0, 3, 0]$, $v_2 = [3, 0, 1]$. Тривиально проверяется, что по сравнению с максимально возможным числом граней графа, соответствующего первому многоугольнику, уменьшено на $3 \cdot 3 = 9$, а рёбер — на $3 \cdot 8 = 24$. Для второго многоугольника соответствующие характеристики — $3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 9$ и $3 \cdot 3 + 1 \cdot 15 = 24$. Разумеется, многоугольники, имеющие указанные векторы особенностей, могут, но не обязаны быть однотипны.

Наличие особенности третьего порядка означает, что искомые многоугольники должны иметь не менее 10 сторон. Для построения десятиугольника с вектором особенностей $[0, 3, 0]$ построим сначала девятиугольник с таким же вектором особенностей. Это удобно сделать, стартуя с особенностей и проходящих через них прямых (будущих диагоналей). Шесть вершин можно выбрать произвольно на этих диагоналях, а ещё три получить как точки пересечения соответствующих прямых. Учитывая свободу выбора будущих особенностей и шести вершин, несложно добиться выпуклости девятиугольника. В частности, мы исходили из девятиугольника с вершинами $A(90; -90)$, $B(120; 0)$, $C(120; 60)$, $E(48; 96)$, $F(-\frac{2750}{241}; \frac{18550}{241})$, $F(-\frac{1200}{23}; \frac{1200}{23})$, $H(-100; 0)$, $I(-\frac{2400}{31}; -\frac{1200}{31})$, $J(-40; -80)$. (По координатам видно, какие вершины выбирались произвольно, а какие получались как точки пересечения.)

Чтобы получить из данного девятиугольника десятиугольник с таким же вектором особенностей, достаточно выбрать десятую вершину в одном из треугольников, образованных одной из сторон девятиугольника и продолжениями за девятиугольник двух сторон, смежных данной, и убедиться, что при этом случайно не возникли новые особенности. Десятиугольник с вектором особенностей $[3, 0, 1]$ можно получить из восьмиугольника с вектором особенностей $[3, 1, 0]$. Возьмём восьмиугольник с вершинами $A(80; -80)$, $C(120; 0)$, $D(80; 80)$, $E(0; 100)$, $F(-80; 80)$, $H(-100; 0)$, $I(-\frac{1200}{17}; -\frac{1200}{17})$, $J(0; -100)$. Две оставшиеся вершины нужно добавлять так, чтобы соединяющий их отрезок проходил через особенность второго порядка, повышая, тем самым, её порядок до третьего.

Варьируя добавляемые вершины в указанных пределах, можно добиться однотипности возникающих десятиугольников. В частности, в качестве десятой вершины первого многоугольника можно взять точку $D(72; 97)$, второй многоугольник пополнить вершинами $B(102; -51)$ и $G(-100; 50)$. При этом получатся десятиугольники, каждый из которых разбивается на 120 треугольников, 80 четырёхугольников, 31 пятиугольник, 5 шестиугольников и 1 семиугольник (рис. 6). Конечно же, рисунок является только иллюстрацией, а убедиться в том, что указанные многоугольники имеют требуемые разбиения можно аналитически. Таким образом, однотипные многоугольники не обязаны иметь равные векторы особенностей.

Разумеется, выбор вершин, дополняющих наши многоугольники до десятиугольников и, тем более, подсчёт элементарных многоугольников вёлся не

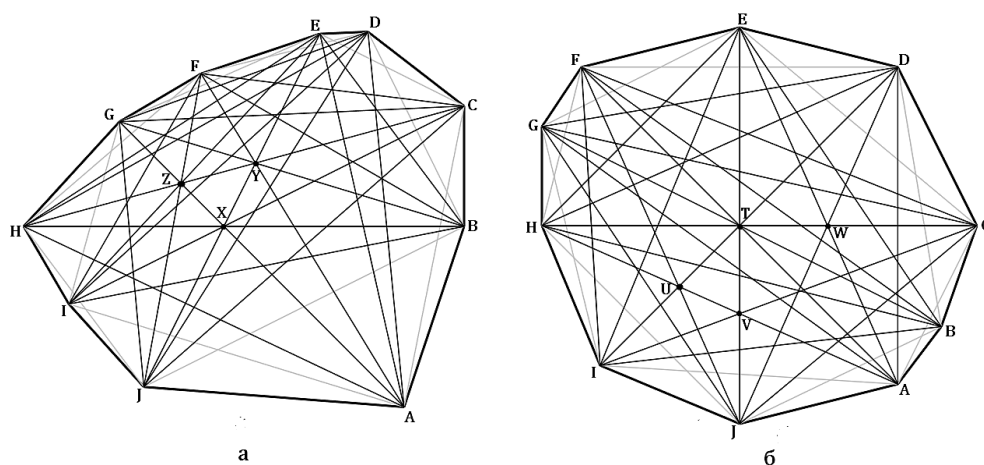


Рис. 6.

вручную, а с помощью компьютерной программы (в нашем случае это была программа на maple). Приведённый пример не единственный. С другими можно познакомиться на сайте Математического марафона, где предлагалась эта задача (см. [3], ММ128).

С другими подходами к классификации выпуклых многоугольников на основе их разбиения диагоналями можно познакомиться в работе [4].

7. Открытые вопросы

Итак, ответы на все поставленные вопросы получены. Но, как это обычно бывает, эти ответы порождают новые вопросы, причём зачастую гораздо более сложные. Приведём некоторые из таких вопросов.

1. В каком диапазоне при фиксированном n может изменяться количество элементарных многоугольников с данным числом сторон?
2. Каково минимально возможное количество элементарных многоугольников, на которые разбивается n -угольник своими диагоналями? Верно ли что при чётных n этот минимум всегда достигается для правильных многоугольников, а при нечётных — для многоугольников, полученных из правильных удалением одной вершины?
3. Какие векторы особенностей могут быть у восьмиугольников?

Автор уверен, что ответ на этот вопрос ему известен. У восьмиугольника, не имеющего особенностей второго порядка, может быть от 0 до 9 особенностей первого порядка. Если же у восьмиугольника есть особенность второго порядка (их не может быть более одной), то вектор особенностей может иметь вид: $[1, 1]$, $[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 6]$, $[1, 8]$.

Весомые аргументы (но не строгое доказательство) невозможности существования восьмиугольников, отвечающих векторам $[1, 5]$ и $[1, 7]$, можно найти в сюжетах 2.6 и 4.11 книжки [4] и при обсуждении задачи ММ128 Математического марафона (см. [5]).

4. На сколько классов однотипных многоугольников разбиваются выпуклые восьмиугольники?
5. Найти общую формулу или хотя бы несколько следующих членов, для каждой из последовательностей: A160860, A230150, A230281, A230503 (см. [6]).
Все эти последовательности тесно связаны с обсуждаемыми задачами.
6. Для данного упорядоченного набора целых неотрицательных чисел определить, существует ли многоугольник, для которого этот набор является вектором особенностей.

Разумеется, это лишь часть напрашивающихся вопросов. Автор будет благодарен читателям, которые пришлют формулировки новых интересных вопросов или ответы на имеющиеся.

Литература

- [1] Лецко В. А. Комбинаторика выпуклого многоугольника – Потенциал, №3 (2010), с. 49–54.
- [2] B. Poonen, M. Rubinstein. The number of intersection points made by the diagonals of a regular polygon, SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 11, No. 1 (1998), p. 135–156.
- [3] Лецко В. А. Математический Марафон, 2019. На сайте <http://www-old.fizmat.vspu.ru/doku.php?id=marathon>
- [4] Лецко В. А., Воронина М. А. Классификация выпуклых многоугольников // Грани познания — 2011, № 1 — С. 1–12. [Электронный журнал]. URL: <http://grani.vspu.ru/files/publics/1301378772.pdf>
- [5] Лецко В. А. От задачи к исследованию. — СПб: СММО Пресс, 2021 — 336 с.
- [6] The OEIS Foundation. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, 2022. На сайте <http://oeis.org>

Поступила 09.10.2022

THE ANALYSIS OF A TASK ON CONVEX POLYGON PARTITION BY DIAGONALS

V. A. Letsko

The article presents an analysis of tasks related to the partition of a convex polygon by diagonals, which were proposed for independent research in the last issue of the journal, as well as some generalizations of the problems under consideration.

Keywords: convex polygon, partition, diagonals.