

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СПЕЦИАЛИСТОВ РАЗЛИЧНОГО ПРОФИЛЯ

УДК 51:37.016

**РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА
ПРИКЛАДНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ КУРСА
“ДИСКРЕТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ”
ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВУЗОВ**

Э. Л. Хабина

*Государственный университет – Высшая школа экономики
Россия, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20
e-mail: khabina@hse.ru*

Рассматриваются возможные пути реализации прикладной направленности курса “Дискретная математика” на основе пересмотра его структуры и содержания. Описывается содержание курса “Дискретные математические модели”, разработанного в ГУ-ВШЭ для студентов экономических специальностей, предлагаются различные варианты формирования программы для студентов других специальностей, а также рассматриваются особенности изложения учебного материала на основе проблемно-ориентированного подхода.

Ключевые слова: дискретные математические модели, проблемно-ориентированный подход, программа курса, прикладная направленность курса.

В настоящее время в России произошли коренные изменения в содержании экономического образования. Это привело к необходимости пересмотра содержания математической подготовки экономистов, менеджеров, социологов, политологов и других специалистов, так как традиционно содержание практически всех математических курсов было оторвано от дисциплин социально-экономического блока.

В число базовых математических курсов, изучаемых в первый и второй годы обучения в бакалавриате Государственного университета – Высшая школа экономики (ГУ-ВШЭ), традиционно входят математический анализ, линейная алгебра, дискретная математика, дифференциальные и разностные уравнения, методы оптимальных решений. Их изучение направлено на овладение широким математическим инструментарием, необходимым для успешного изучения студентами специальных профессионально-ориентированных дисциплин, на развитие у них навыков логического мышления. При этом необходимо уделять серьезное внимание межпредметным связям математических курсов со специальными дисциплинами. В некоторых базовых курсах эти связи могут реализовываться через отдельные “вкрапления” иллюстративного материала из специальных дисциплин [2]. Это очень важно для преодоления познавательного негативизма, который зачастую наблюдается у студентов гуманитарных специальностей по отношению к предметам математического цикла.

Вместе с тем существуют и более широкие возможности усиления прикладной направленности базовых математических курсов, чем отдельные “вкрапления” в них примеров межпредметного характера. Одной из таких

возможностей является пересмотр структуры стандартного курса “Дискретная математика” в соответствии с имеющимся спросом, определяемым конкретным направлением обучения студентов. Например, потребности студентов, обучающихся по направлениям “Экономика”, “Социология”, “Политология”, и студентов, обучающихся по направлениям “Бизнес-информатика” и “Прикладная математика и информатика (в экономике)”, существенно разнятся. Первым целесообразно изучать вопросы, связанные с конкретными моделями, а именно: обобщенные паросочетания, бинарные отношения, правила принятия коллективных решений, коалиции, оценки влиятельности групп в парламентах, оценки сбалансированности малых и больших групп и т. д. При этом такой стандартный для курсов дискретной математики раздел, как “Теория графов”, нужен им лишь как инструмент, помогающий решать задачи в указанных выше проблемных областях. Для студентов же, обучающихся по специальностям “Бизнес-информатика”, “Прикладная математика и информатика”, целесообразно читать курс дискретного анализа, в котором теория графов представляет самостоятельную ценность.

Распространенная в настоящее время практика преподавания курса “Дискретная математика”, одинакового для всех студентов экономических специальностей, приводит к тому, что студенты фактически не овладевают знаниями и умениями для успешного решения широкого круга практических задач, использующих дискретные объекты и модели, не овладевают культурой алгоритмического мышления. Вместе с тем в будущей профессиональной деятельности экономистам часто придётся работать именно с дискретными моделями, описывающими реальные социально-экономические и политические процессы.

С целью устранения указанных недостатков в ГУ-ВШЭ разработан и с успехом читается на младших курсах бакалавриата различных факультетов учебный курс “*Дискретные математические модели*”, который рассматривается как необходимый компонент фундаментальной подготовки современных экономистов, менеджеров, политологов, социологов, специалистов в области бизнес-информатики, а также прикладной математики и информатики.

Прикладная направленность этого курса реализуется через содержание учебного материала, структуру его подачи, а также через формы учебных занятий.

Основной целью курса является знакомство студентов младших курсов бакалавриата с основными современными подходами к описанию дискретных математических объектов, к построению и изучению прикладных дискретных математических моделей, адекватных реалиям и потребностям социально-экономической и общественно-политической жизни современного общества. Изучение курса “Дискретные математические модели” не требует от слушателей предварительных знаний, выходящих за пределы программ средней общеобразовательной школы и курса “Линейная алгебра”.

Содержание курса поддерживается специально разработанным учебным пособием Ф. Т. Алескерова, Э. Л. Хабиной, Д. А. Шварца “Бинарные отношения, графы и коллективные решения” [1].

Курс содержит следующие разделы.

Тема 1. Элементы теории множеств

Множества, подмножества. Множество всех подмножеств. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение, разность множеств, симметрическая разность, разбиение, декартово произведение. Диаграммы Эйлера – Венна. Алгебраические законы операций над множествами. Принцип двойственности.

Тема 2. Паросочетания

Задача о распределении работ. Задача о свадьбах. Графы. Двудольные графы. Паросочетания. Условие Холла. Совершенные и максимальные паросочетания, условия их существования. Чередующиеся цепи. Трансверсали семейства множеств.

Тема 3. Обобщенные паросочетания, или паросочетания при линейных предпочтениях участников

Задача о распределении выпускников-медиков по клиникам в США. Предпочтения. Условия классической рациональности предпочтений. Обобщенные паросочетания. Устойчивость паросочетаний. Теорема о существовании устойчивого паросочетания при любых предпочтениях участников (теорема Гейла – Шепли). Манипулирование предпочтениями. Примеры моделей, использующих обобщенные паросочетания: распределение студентов по комнатам общежития, распределение работников по фирмам и др.

Тема 4. Бинарные отношения, полезность и функции выбора

Бинарные отношения и их свойства. Операции над бинарными отношениями. Графическая интерпретация бинарных отношений и их свойств. Матрица смежности графа. Специальные классы бинарных отношений: частичный порядок, слабый порядок, линейный порядок. Отношение несравнимости и его свойства для специальных классов бинарных отношений. Модель ординальной полезности. Представление бинарного отношения функцией полезности. Выбор по отношению предпочтения. Свойства функций выбора. Функции выбора, рационализируемые строгими и нестрогими отношениями предпочтения^{*1}.

Тема 5. Задача голосования

Примеры правил голосования: правило простого большинства, парадокс Кондорсе, правило Борда. Парадокс Эрроу*. Парадокс Сена*. Стратегическое поведение участников в задаче голосования, множественное манипулирование.

Тема 6. Коллективные решения на графе

Что делать, если самые простые правила принятия решений не дают явного победителя? Альтернативные модели принятия решений. Внутренняя и внешняя устойчивость. Ядро. Другие нелокальные правила принятия коллективных решений: позиционные правила; правила, использующие мажоритарное отношение; правила, использующие вспомогательную числовую

¹ Здесь и далее символом * помечены вопросы, имеющие повышенный уровень трудности. Их изучение целесообразно осуществлять только при достаточно высоком уровне подготовки студентов или в рамках спецкурса сходной тематики на более поздних стадиях обучения.

шкалу; правила, использующие турнирную матрицу; q -паретовские правила большинства*. Правило порогового агрегирования. Правила выбора непокрытого множества, слабоустойчивого множества, множества k -устойчивых альтернатив*. Задача о лидере.

Тема 7. Системы пропорционального представительства

Примеры правил формирования парламентов (выборных органов) в разных странах. Понятие и цели пропорционального представительства. Методы наибольшего остатка: квота Хара, квота Друпа, нормальная и усиленная имперские квоты. Правило д'Ондта. Методы делителей: наименьший делитель, Датская система, система Сент-Лаге. Индексы представительности: индекс максимального отклонения, индекс Рэ, индекс Лузмора-Хэнби, индекс удельного представительства и др.

Тема 8. Коалиции и влияние групп в парламенте

Как партия влияет на принятие решения при голосовании в парламенте? Голосование с квотой. Элементы комбинаторики: число размещений, число сочетаний, число упорядочений. Индекс влияния Банцафа. Теорема о среднем для индекса Банцафа*. Анализ влияния групп и фракций в Государственной думе РФ. Институциональный баланс власти в Совете министров Евросоюза. Влияние стран в Совете Безопасности ООН. Другие индексы влияния (индексы Шепли-Шубика, Джонстона, Дигена-Пакела, Холера-Пакела). Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций: кардинальные и ординальные индексы*. Как отражается на влиянии нежелание партий вступать в некоторые коалиции? Парадоксы блокирования.

Тема 9. Знаковые графы

Психологический комфорт в трудовом коллективе. Знаковые графы. Теория структурного баланса. Сбалансированность малых групп. Мера сбалансированности. Сбалансированность выборного органа. Анализ сбалансированности пьесы У. Шекспира "Макбет" и других литературных произведений.

Тема 10. Задача дележа

Примеры моделей дележа: от библейской притчи до современных трудовых споров. Постановка задачи дележа. Процедура "дели и выбирай". Манипулирование. Критерии справедливости дележа. Процедура "подстраивающийся победитель" и её свойства. Решение трудовых споров. Разрешение территориальных конфликтов. Слияние фирм. Случай неделимых решений*. Манипулирование при использовании процедуры "подстраивающийся победитель"*. Невозможность удовлетворения трем критериям справедливого дележа при числе участников больше двух.

Тема 11. Игровые модели

Практические примеры игровых моделей: кто перезванивает, если сорвался звонок? Как владельцам кафе выбрать меню комплексного обеда в условиях конкуренции? Игры 2×2 : стратегии, выигрыши, платежная матрица. Доминантные стратегии. Понятие равновесия игры по Нэшу. Примеры игр 2×2 : дилемма заключенного, гонка вооружений и др. Примеры игр, имеющих равновесие по Нэшу, не имеющих его, а также имеющих бесконечно много равновесий. Вероятность события и ожидаемый выигрыш. Смешанные стра-

тегии. Теорема о существовании равновесия Нэша в смешанных стратегиях для любой игры 2×2 . Ожидаемые полезности: переговоры правительства с профсоюзами. Фокальные равновесия.

Как видно из представленного выше перечня вопросов, курс “Дискретные математические модели” ориентирован на изучение именно прикладных аспектов теории графов, теории бинарных отношений, элементов комбинаторики, теории игр и др.

Представленная программа курса содержит довольно большой (и даже несколько избыточный) набор вопросов, что позволяет преподавателям варьировать номенклатуру изучаемых тем в зависимости от направления обучения студентов, уровня их базовой подготовки и профессиональных интересов, объема учебной нагрузки, выделяемой учебным планом на данный курс.

В ГУ-ВШЭ курс “Дискретные математические модели” читается на 1–2 курсах бакалавриата в объеме 28–44 аудиторных часов в зависимости от факультета. Так, например, для экономистов он читается в объеме 44 часов на 1 курсе бакалавриата и содержит практически все приведенные выше темы, а для политологов курс имеет меньший объем (28 часов), читается на 2 курсе бакалавриата и ориентирован на приложения, имеющие более тесную связь с общественно-политической сферой. Различные варианты распределения тем для разных факультетов представлены в таблице.

Таблица

Тема	Экономика	Менеджмент	Социология	Политология	Бизнес-информатика, прикладная математика
1. Элементы теории множеств	+				раздел изучается в других курсах
2. Паросочетания	+	+			+
3. Обобщенные паросочетания	+	+	+	+	+
4. Бинарные отношения, полезность и функции выбора	+				+
5. Задача голосования	+	+	+	+	+
6. Коллективные решения на графе	+	+	+	+	+
7. Системы пропорционального представительства	+			+	+
8. Коалиции и влияние групп в парламенте	+	+	+	+	+
9. Знаковые графы	+	+	+	+	+
10. Задача дележа	+	+	+	+	+
11. Игровые модели	+	+	+	+	+

Заметим, что каждый раздел обладает содержательной законченностью и самостоятельностью. Его изучение рассчитано, как правило, на 4 часа аудиторной нагрузки. Количество часов может быть увеличено за счет исключения из программы обучения отдельных вопросов, например помеченных *. Порядок изучения тем также может свободно меняться произвольно, за редкими исключениями. Например, было бы бессмысленно изучать бинарные отношения, не изучив элементы теории множеств. Нецелесообразно рассматривать системы пропорционального представительства, т. е. методы формирования парламента, после того как уже обсуждались вопросы влияния партий (групп) в парламенте. С целью повышения интереса студентов и создания у них дополнительной мотивации к дальнейшему изучению курса, иногда в начале курса для ознакомления излагается раздел “Задача дележа” (в программе он располагается ближе к концу курса), основные идеи которого наиболее тесно связаны с реальной жизнью, понятны практически каждому слушателю, а потому вызывают живейший отклик.

Особенности построения курса. Построение учебного курса “Дискретные математические модели” имеет ряд особенностей, направленных на устранение недостатков, свойственных традиционному пути изложения вопросов дискретной математики вне связи с конкретными практическими приложениями.

При традиционном подходе сначала излагается обширная математическая теория и только потом рассматриваются отдельные практические приложения, чаще всего не связанные с экономикой. Такой подход не способствует усвоению курса студентами-экономистами и создает впечатление оторванности курса от практических нужд.

Мы предлагаем проблемно-ориентированный подход к изучению программного материала: в начале каждой темы рассматривается ряд конкретных практических задач, заимствованных из социально-экономической и политической сфер жизни современного общества. Затем по ним строятся соответствующие математические модели. Далее для описания и изучения данных моделей предлагается компактный математический аппарат. Применение этого математического аппарата и позволяет решать ранее поставленные задачи, а также ставить и решать новые задачи.

Покажем, как эта схема может быть реализована на примере раздела “Обобщенные паросочетания”.

1. Описание практической задачи.

Сначала рассматривается пример распределения выпускников медицинских факультетов университетов в США по клиникам. Выпускники-медики высказывают свои индивидуальные предпочтения относительно клиник, которые предлагают им свои вакансии, а представители потенциальных работодателей, изучив документы соискателей и проведя собеседование с ними, также составляют свой список предпочтений. Возникает вопрос: как приемлемым образом распределить всех студентов по клиникам так, чтобы были учтены их предпочтения и предпочтения работодателей? Что значит учесть предпочтения обеих сторон?

2. Математическая постановка проблемы и построение математического аппарата для её решения.

Для ответов на поставленные выше вопросы требуется формализовать понятие предпочтения, выяснить какими бывают предпочтения, т.е. какие свойства могут быть им присущи. Это приводит к введению условий классической рациональности предпочтений, т.е. к рассмотрению предпочтений в виде линейных порядков.

Далее приходим к необходимости выяснить природу и вид строящегося соответствия между выпускниками и клиниками, что позволяет ввести определение обобщенного паросочетания.

Следующим шагом на пути построения модели является прояснение требования приемлемости паросочетания для участников процесса распределения вакансий. Как следствие рассуждений на указанную тему, вводятся понятия индивидуально рациональных и индивидуально иррациональных паросочетаний, устойчивых и неустойчивых паросочетаний, а также понятие блокирующей пары в паросочетании при заданных предпочтениях участников.

Далее требуется понять, как же построить индивидуально рациональное устойчивое паросочетание и при каких условиях это можно сделать. Ответ на эти вопросы даёт теорема Гейла – Шепли, которая доказывается конструктивно и иллюстрируется соответствующими примерами. При этом сначала алгоритм построения обобщенного паросочетания описывается на конкретном примере, а затем формулируется в общем виде и на его основе доказывается теорема Гейла – Шепли.

Научившись строить обобщенные паросочетания “идеальные” в определенном смысле, можно ставить и последовательно решать следующие проблемы: а) насколько оптимальны для сторон построенные паросочетания, и б) можно ли манипулировать своими предпочтениями для получения выгоды?

3. Применение построенного математического аппарата и формулировка сходных задач.

Теперь студенты могут решать конкретные задачи, используя весь комплекс полученных знаний и умений, а также формулировать и рассматривать сходные, но имеющие и определенные особенности, практические задачи. Например, можно рассмотреть проблему расселения студентов по комнатам общежития с учетом их предпочтений, распределение студентов по спецкурсам в университетах, наём “бригад” работников и т.д.

Такой подход к изложению учебного материала позволяет повышать познавательные интересы студентов, а также усиливать мотивацию к изучению данного курса. Это связано прежде всего с тем, что студенты видят, как изучаемый математический аппарат может быть применён в практических ситуациях, казалось бы, внешне далеких от математики.

При изложении материала отдается предпочтение алгоритмическому подходу. Именно поэтому доказательства большинства теорем носят конструктивный характер, что позволяет не только обосновывать свойства изучаемых дискретных математических объектов, но и строить на практике дискретные объекты, обладающие заданными свойствами. Всё это развивает алгоритмическую культуру мышления студентов и профессиональную компетентность будущих экономистов.

Предлагаемый студентам материал обильно иллюстрируется примерами из современной российской и зарубежной социально-экономической и общественно-политической жизни. Например, при изучении темы “Коалиции и влияние групп в парламенте” рассматриваются оценки влияния групп и фракций в российском парламенте и в Совете министров Евросоюза, влияние стран в Совете Безопасности ООН, а при изучении темы “Знаковые графы” рассматриваются приложения теории структурного баланса к анализу сбалансированности литературных произведений.

Основными формами учебных занятий являются лекции и практические занятия. На лекциях излагается основной теоретический материал курса. Лекции проходят в форме своеобразных консультаций. К предстоящей лекции студенты получают задание проработать соответствующий теоретический материал по учебному пособию и дополнительной литературе, подобрать иллюстрирующий тему практический материал (примеры конкретных трудовых споров, слияния фирм, раздела наследства, правил принятия решений в конкретных акционерных обществах, банках и т. д.). Лектор излагает материал, с которым слушатели уже ознакомились заранее, в конспективной форме, расставляя при этом акценты на наиболее значимых или сложных для восприятия и понимания вопросах. При таком подходе высвобождается время для ответов на вопросы студентов, на расширение и углубление изученного материала.

Данный вариант построения лекций способствует развитию у студентов навыков самостоятельной работы с учебной и научной литературой, в том числе и на иностранных языках.

Лекции поддерживаются практическими занятиями. Базовое учебное пособие [1] снабжено большим количеством задач и упражнений. Большинство предлагаемых студентам задач носят профессионально-ориентированный прикладной характер. Пособие содержит задания следующих типов:

- 1) задачи, разъясняющие содержание основных определений и теорем;
- 2) задачи, разъясняющие основные идеи доказательств;
- 3) задачи на проверку выполнения условий теорем;
- 4) задачи на построение контрпримеров;

- 5) задачи на изучение работы некоторого метода или алгоритма в стандартных ситуациях и в особых случаях;
- 6) задачи на доказательство;
- 7) задачи практического содержания на построение несложных математических моделей, аналогичных изученным;
- 8) задания исследовательского характера.

Применение в учебном процессе таких заданий в едином комплексе развивает у студентов практические навыки по решению задач как собственно математического, так и прикладного характера, содействует развитию у них логического мышления и неформального оперирования абстрактным математическим инструментарием.

Некоторые практические занятия проводятся в форме деловых игр. Например, при изучении процедур справедливого дележа на занятии моделируются различные ситуации: ведение переговоров работодателя с трудовым коллективом по достижению взаимоприемлемых договоренностей в трудовых спорах, ведение переговоров по разделу имущества между супругами при бракоразводном процессе и т. д. Также активно используются возможности проведения мини-исследований по ряду программных вопросов. Например, студентам предлагается написать небольшое исследование на тему “Как принять коллективное решение?” на основе анализа учебного материала и дополнительной научной литературы.

Таким образом, и содержание курса “Дискретные математические модели”, и особенности организации учебного материала теоретического и практического характера, и формы проведения занятий направлены на реализацию прикладной составляющей курса и на усиление мотивации изучения студентами экономических специальностей предметов математического цикла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения / Учебное пособие для вузов. — М.: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2006. 298 с.
2. Aleskerov F., Khabina E. Teaching mathematics in the State University “High School of Economics”. 10th International Congress on Mathematical Education. July 4–11, 2004. Copenhagen, Denmark. — P. 10–12.

Поступила 17.07.2010

**REALISATION OF A PRINCIPLE OF APPLIED ORIENTATION
IN A COURSE “DISCRETE MATHEMATICAL MODELS”
FOR STUDENTS OF ECONOMIC SPECIALITIES
AT HIGHER SCHOOL**

E. L. Khabina

Possible ways are discussed to realize the applied direction in the course “Discrete Mathematics” on the base of revising its structure and content. The content of the course “Discrete mathematical models” worked out in State University Higher School of Economics for students of economic professions is described, different variants of the program formation for students of other professions are proposed, features of presentation of the education stuff on the base of problem-oriented approach are discussed as well.

Keywords: discrete mathematical models, the problem oriented approach, the course program, applied direction of the course.