СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.38+517.521.5

"МНОЖЕСТВЕННОСТЬ ИСТИНЫ" В МАТЕМАТИКЕ: ДВА ПРИМЕРА ИЗ ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Ал. Р. Валиуллин, Ар. Р. Валиуллин, В. В. Галатенко, Д. К. Кудрявцев, Т. П. Лукашенко

Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ;
e-mail: albert.valiullin1997@gmail.com arthur.valiullin97@gmail.com
vgalat@imscs.msu.ru kdk97@rambler.ru lukashenko@mail.ru

Распространенным заблуждением является убеждение в том, что в математике истина единственна или, более конкретно, что могут существовать различные подходы к определению одного и того же понятия, но эти подходы либо эквивалентны друг другу, либо же один из них обобщает другой. Представляется важным показать студентам математических специальностей, что в математике могут существовать естественные и при этом существенно различные подходы, дающие на один и тот же вопрос разные ответы. В настоящей заметке приводятся два несложных примера такого рода из области математического анализа, один из которых связан с интегрированием, а другой — с суммированием двойных рядов.

Ключевые слова: математическое образование, существенно различные подходы, несобственный интеграл Римана, A-интеграл, двойные ряды, примеры и контрпримеры.

1. Введение

Обсуждая взаимосвязь и взаимопроникновение физики и математики, Р. Фейнман указывал: "математика позволяет доказать, что в физике исходя из разных точек зрения можно прийти к одним и тем же выводам" [1, Л. 2]. Зачастую этому и аналогичным фактам придается чрезмерная общность, и это приводит к ошибочному, но весьма распространенному убеждению о единственности истины в математике, или, более конкретно, о том, что в математике возможны различные подходы к определению одного и того же понятия, но всегда эти подходы либо эквивалентны друг другу, либо же один из них обобщает другой. Примерами такого рода из стандартных математических курсов являются, в частности, эквивалентные друг другу подходы Коши и Гейне к определению предела [2, Гл. III], или же интегралы Римана [2, Гл. VII], [3, Гл. 9, § 1] и Лебега [4, Гл. V, § 5], [5, Гл. 3] (второй обобщает первый).

Представляется важным показать студентам математических специальностей, что в математике могут существовать естественные и при этом существенно различные подходы, дающие на один и тот же вопрос разные ответы.

Яркими результатами XX века, способствующими осознанию этого факта, являются, например, утверждение о невозможности ни доказать, ни опровергнуть континуум-гипотезу [6] и теорема Гёделя о неполноте [7]. Эти результаты могут (и, с точки зрения авторов, должны) быть сформулированы, хотя бы в нестрогой форме, студентам уже на младших курсах. Но строгий и детальный разбор этих результатов требует существенного времени и даже отдельных учебных курсов.

В настоящей заметке приводятся два примера, иллюстрирующих "множественность истины" в математике, каждый из которых можно обсудить на математических факультетах в рамках базовых практических занятий по математическому анализу или же спецсеминаров для младшекурсников (так называемых просеминаров). Так, эти примеры обсуждались на спецсеминаре "Теория функций действительного переменного" для студентов 1–2 курсов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Каждый из примеров можно разобрать примерно за один академический час, но более эффективным представляется разбить обсуждение на две части — сначала определить вводимые понятия и сформулировать в качестве домашнего задания вопрос для размышлений, а на следующем занятии это задание разобрать.

Отметим, что помимо примеров, подробно обсуждаемых в заметке, существуют и другие примеры подобного рода. Упомянем, в частности, вопрос о размерности — топологической и хаусдорфовой — множества Кантора [5, Гл. 2, § 11], а также классический парадокс Бертрана, связанный с определением "случайности" [8, Гл. 1, § 11].

2. Несобственный интеграл Римана и A-интеграл

2.1 Используемые понятия

Стандартный несобственный интеграл Римана определяется в терминах срезки по оси аргументов. Например, если рассматривается несобственный интеграл по промежутку $[0;1)$ (с особенностью в точке 1), он определяется как предел собственных интегралов по отрезкам $[0;1-\delta]$ ($\delta \to 0+$). Однако естественным является и подход со срезками по оси значений. Этот подход может быть формализован следующим образом. Обозначим через $[\,\cdot\,]_n$ срезку по уровню n:

$$[y]_n = \begin{cases} -n, & y < -n; \\ y, & |y| \leqslant n; \\ n, & y > n. \end{cases}$$

Положим

$$(Q)\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 [f(x)]_n\,dx.$$

Эта конструкция была предложена Э.Ч. Титчмаршем в 1928 году [9] — получаемый предел Э.Ч. Титчмарш назвал Q-интегралом. В работе [9] отмечено, что Q-интеграл не обладает свойством аддитивности, то есть необязательно

$$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \big(f(x)+g(x)\big)\,dx,$$

однако аддитивность появляется, если дополнить определение Q-интеграла ограничением на интегрируемую функцию:

$$\mu\,\{x\colon\ |f(x)|>n\} = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty). \tag{1}$$

Q-интеграл, ограниченный на класс функций, удовлетворяющих этому условию, называется A-интегралом.

При определении A-интеграла часто используют другой вариант срезки:

$$[y]_n^* = \begin{cases} y, & |y|\leqslant n;\\ 0, & |y|>n. \end{cases}$$

(см., например, [10, 11]). В случае Q-интеграла такое изменение срезки является существенным: Э.Ч. Титчмарш назвал аналог Q-интеграла со вторым вариантом срезки Q'-интегралом и показал, что Q- и Q'-интегралы неэквивалентны даже на классе монотонных функций [9, Theorem 15]. Но для A-интеграла в силу ограничения (1) изменение варианта срезки, очевидно, несущественно.

С A-интегралом связан целый ряд результатов о сопряженных функциях и тригонометрических рядах [12, 14] (Q-интеграл вводился Э.Ч. Титчмаршем как раз в рамках изучения сопряженных функций). Но этим приложения A-интеграла не ограничиваются: например, А.Н. Колмогоров использовал этот интеграл (и его обобщение, связанное с рассмотрением произвольной вероятностной меры) в своей классической работе “Основные понятия теории вероятностей” [15, 16] для обобщения понятия математического ожидания (Гл. VI, § 4).

Естественным является вопрос об эквивалентности или неэквивалентности подходов к определению интеграла, основывающихся на срезках по разным осям. Оказывается, несложно привести пример функции, интегрируемой в обоих смыслах, для которой несобственный интеграл Римана и Q-интеграл (или A-интеграл) различны.

2.2 Пример функции

Пример основывается на двух фактах — возможность изменения суммы условно сходящегося ряда перестановкой его членов (имеется в виду утверждение классической теоремы Римана о перестановках условно сходящегося ряда [2, Гл. XV, § 6], [3, Гл. 11, § 4]) и независимость Q-интеграла (A-интеграла) от “перестановок функции”. Рассмотрим условно сходящийся к нулю ряд

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

его члены обозначим через a_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Возьмем произвольное ненулевое число C и найдем такую перестановку σ множества натуральных чисел, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{\sigma(m)} = C$. Сопоставим членам ряда a_{2k+1} и a_{2k+2} длину промежутка $d_{2k+1} = d_{2k+2} = 2^{-2-k}$ (тогда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} d_m = 1$) и значения $v_{2k+1} = \frac{a_{2k+1}}{d_{2k+1}} = \frac{2^{k+2}}{k+1}$ и $v_{2k+2} = \frac{a_{2k+2}}{d_{2k+2}} = -\frac{2^{k+2}}{k+1}$ соответственно. Определим функцию $f(x)$ следующим образом. Положим ее равной $v_{\sigma(1)}$ на полуинтервале $[0; d_{\sigma(1)})$, равной $v_{\sigma(2)}$ на полуинтервале $[d_{\sigma(1)}; d_{\sigma(1)} + d_{\sigma(2)})$, равной $v_{\sigma(3)}$ на полуинтервале $[d_{\sigma(1)} + d_{\sigma(2)}; d_{\sigma(1)} + d_{\sigma(2)} + d_{\sigma(3)})$ и т. д. Функция $f(x)$, тем самым, определена на полуинтервале $[0; 1)$.

Так как для каждого промежутка, на котором функция принимает некоторое свое фиксированное положительное значение, существует промежуток той же длины, на котором функция принимает противоположное значение, для любого порога срезки n интеграл $\int\limits_0^1 [f(x)]_n \, dx$ равен нулю. Следовательно, $(Q)\int\limits_0^1 f(x)\, dx = 0$. Несложно проверить и дополнительное условие (на $\mu\{x\colon |f(x)| > n\}$), показав тем самым, что вместо Q-интеграла здесь можно говорить и про A-интеграл. В то же время, несобственный интеграл Римана

$$\int\limits_{[0;1)} f(x)\, dx = \sum_{m=1}^{\infty} v_{\sigma(m)} d_{\sigma(m)} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{\sigma(m)} = C,$$

то есть отличен от нуля.

Конструкция может быть тривиальным образом модифицирована так, чтобы рассматриваемая функция $f(x)$ была непрерывной на полуинтервале $[0; 1)$. Например, вместо того, чтобы брать функцию, равную $v_m = \frac{a_m}{d_m}$ на промежутке длины d_m, можно на этом промежутке брать кусочно-линейную функцию, быстро изменяющуюся от нуля до значения $\operatorname{sgn} v_m(|v_m|+1)$, равную этому значению практически до конца промежутка, а в конце возвращающуюся в ноль, интеграл от которой по промежутку равен a_m.

3. Суммирование двойных рядов по квадратам и кругам

3.1 Используемые понятия

Рассмотрим двойной ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}$ (индексирование для удобства дальнейшего изложения начнем с нуля). Встает вопрос об определении сходимости такого ряда. Естественными подходами являются суммирование по прямоугольникам и по квадратам. В рамках этих подходов вводятся частичные суммы $S_{M,N} = \sum\limits_{m=0}^{M} \sum\limits_{n=0}^{N} a_{m,n}$. В случае суммирования по прямоугольникам говорят, что сумма ряда равна S, если для каждого положительного ε найдется такой номер K, что при любых M и N, больших K, выполняется неравенство

$|S_{M,N} - S| < \varepsilon$ (см., например, [2, Гл. 15, § 8] или [3, Гл. 11, § 5]). В случае суммирования по квадратам суммой ряда называется $\lim\limits_{N\to\infty} S_N^{\square}$, где $S_N^{\square} = S_{N,N}$. Легко понять, что если двойной ряд суммируется по прямоугольникам к S, то и по квадратам он также суммируется к S, но при этом из суммируемости по квадратам суммируемость по прямоугольникам не следует.

Рассматривая суммируемость по квадратам, естественно рассмотреть и суммируемость по кругам (точнее, по четвертям кругов). Обозначим через S_R° сумму $\sum\limits_{m,n\colon m^2+n^2\leqslant R^2} a_{m,n}$. Будем говорить, что двойной ряд суммируется по кругам к S, если существует и равен S предел $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni R\to\infty} S_R^{\circ}$.

При сравнении суммируемости по квадратам и кругам одним из возникающих вопросов является следующий: существует ли двойной ряд, который по квадратам и кругам суммируется к разным (конечным) суммам. Ответ на этот вопрос положительный. Иными словами, существует двойной ряд, сумма которого, неформально выражаясь, зависит от того, какой из двух естественных способов суммирования использовать.

3.2 Пример двойного ряда

Чтобы построить пример, можно ограничиться рассмотрением членов $a_{m,n}$, среди которых от нуля отличны лишь некоторые из членов $a_{0,n}$ и $a_{m,m}$, причем члены $a_{0,n}$, помимо нулевого, принимают только единичное значение, а члены $a_{m,m}$ — значение -1. Опишем конструкцию примера, обеспечивающую равенство всех частичных сумм по квадратам $S_N^{\square}$ нулю, а частичных сумм по кругам S_R° — единице. В рамках конструкции индуктивно будем строить возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$: члены ряда a_{0,n_k} будут браться равными 1, члены ряда a_{n_k,n_k} — равными -1, остальные члены будут полагаться нулевыми. Положим $n_1 = 1$. Тогда $a_{0,1} = 1$, $a_{1,1} = -1$, $S_1^{\square} = 0$, $S_1^{\circ} = 1$. Предположим, что уже построен элемент n_k, построим n_{k+1}. Пусть n_j ($j \leqslant k$) — первый из уже построенных элементов последовательности, для которого $2n_j^2 > n_k^2$ (такие члены заведомо есть, например, сам n_k). В качестве n_{k+1} возьмем такое наименьшее натуральное число, что $2n_j^2 \leqslant n_{k+1}^2$. Получим, что при $n_k < m < n_{k+1}$ выполняются равенства $S_m^{\square} = S_{n_k}^{\square} = 0$, $S_m^{\circ} = S_{n_k}^{\circ} = 1$; далее, $S_{n_{k+1}}^{\square} = S_{n_k}^{\square} + a_{0,n_{k+1}} + a_{n_{k+1},n_{k+1}} = S_{n_k}^{\square} = 0$, $S_{n_{k+1}}^{\circ} = S_{n_k}^{\circ} + a_{0,n_{k+1}} + a_{n_j,n_j} = S_{n_k}^{\circ} = 1$.

Описанную конструкцию иллюстрирует Рис. 1. На этом рисунке узлы (m,n) целочисленной решетки, для которых $a_{m,n}$ взят равным 1 и -1, выделены серым и черным, соответственно, невыделенным узлам соответствуют нулевые члены ряда.

Приведенный пример может стать основой для серии дальнейших исследовательских задач для студентов: например, какова асимптотика последовательности n_k, или же сохранится ли утверждение, если в определении суммирования по кругам устремлять R к бесконечности не по множеству натуральных, а по множеству всех действительных чисел.

Отметим, что вместо суммирования по кругам (или вместе с ним) можно рассмотреть и классическое суммирование по треугольникам (возникающее,

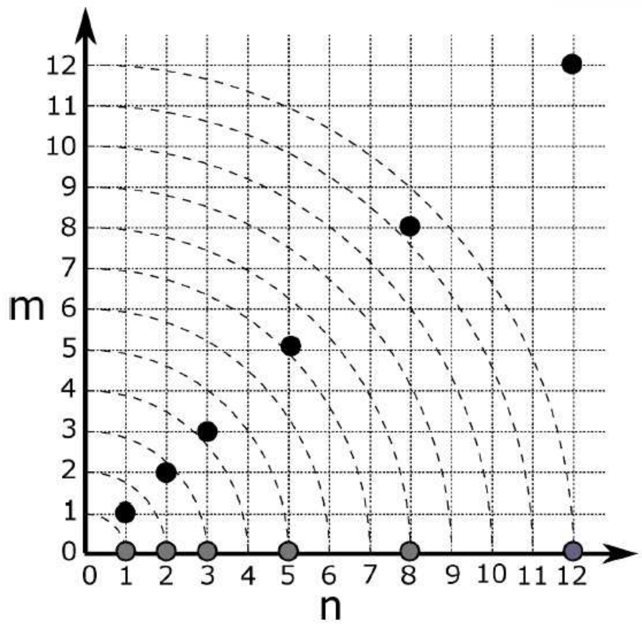

Рис. 1.

например, в теореме Мертенса о произведении рядов [2, Гл. XV, § 7], [3, Гл. 11, § 4]). В этом случае под сходимостью двойного ряда понимается сходимость последовательности его треугольных частичных сумм $S_R^{\Delta} = \sum\limits_{m,n:\, m+n \leqslant R} a_{m,n}$ ($R \in \mathbb{N}$). При сравнении суммирования по квадратам и треугольникам пример, аналогичный обсужденному выше, легко записывается в явном виде:

$$a_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = 0,\ n = 2^k\ (k \in \mathbb{Z}^+); \\ -1, & m = n = 2^k\ (k \in \mathbb{Z}^+); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Можно заметить, что в суммировании по треугольникам, кругам и квадратам в частичные суммы входят все точки целочисленной решетки, удаленные от начала координат не более чем на заданное расстояние (то есть во всех трех случаях речь идет о кругах), просто расстояние понимается в разных смыслах: Манхэттенское расстояние (расстояние городских кварталов, ℓ^1) $|m| + |n|$ в случае суммирования по треугольникам, классическое евклидово (ℓ^2) расстояние $\sqrt{m^2 + n^2}$ в случае суммирования по кругам и ℓ^∞-расстояние $\max\{|m|, |n|\}$ в случае суммирования по квадратам.

4. Заключение

Осознание возможности существования в рамках абсолютно строгой математики принципиально разных, неэквивалентных подходов к ответу на заданный вопрос представляется важным для того, чтобы сильнее почувствовать творческую составляющую математических исследований. Описанные в заметке примеры иллюстрируют, что “множественность истины” присутствует и в математике. Они легко могут быть интегрированы в базовые практические занятия по математическому анализу на математических факультетах или же в спецсеминары для младшекурсников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейнман Р. Характер физических законов. 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 160 с.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. – СПб.: Лань, 2018. – 800 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.
5. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. – М.: Факториал, 1998. – 160 с.
6. Коэн П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. – М.: Мир, 1969. – 347 с.
7. Успенский В.А. Теорема Гёделя о неполноте в элементарном изложении // УМН. 1974. Т. 29. Вып. 1 (175). С. 3–47.
8. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
9. Titchmarsh E.C. On conjugate functions // Proc. London Math. Soc., Ser 2. 1929. Vol. 29. No. 1677. P. 49–80.
10. Лукашенко Т.П. A-интеграл и его применение в исследованиях П.Л. Ульянова и других математиков // Изв. вузов. Матем. 2008. №5. С. 77–82.
11. Ефимов М.П. О свойствах Q-интеграла // Матем. заметки. 2011. Т. 90. Вып. 3. С. 340–350.
12. Ульянов П.Л. Применение A-интегрирования к одному классу тригонометрических рядов // Матем. сб. 1954. Т. 35 (77). №3. С. 469–490.
13. Ульянов П.Л. A-интеграл и сопряженные функции // Уч. записки Моск. гос. ун-та. Математика. 1956. Том VIII. Вып. 181. С. 139–157.
14. Lukašenko T.P. On the A-integral representation of the Hilbert transform and conjugate function // Analysis Math. 1982. Vol. 8. P. 263–275.
15. Kolmogorov A.N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. – Berlin: Springer-Verlag, 1933. – 62 p.
16. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.–Л.: ОНТИ, 1936. – 80 с.

Поступила 10.07.2018

"PLURALITY OF TRUTH" IN MATHEMATICS: TWO EXAMPLES FROM MATHEMATICAL ANALYSIS

Al.R. Valiullin, Ar.R. Valiullin, V. V. Galatenko, D. K. Kudryavtsev, T. P. Lukashenko

There exists a common misbelief that the truth in mathematics is unique or, more specifically, that different approaches to a definition of a notion are possible, but these approaches are either equivalent or some of them generalize the others. We think that it is important to show students of mathematical departments that natural but essentially different approaches may exist in mathematics that give mutually contradicting answers to the same question. In this paper we discuss two simple examples of this kind: one of them deals with integration, and the other one — with double series.

Keywords: mathematics education, essentially different approaches, improper Riemann integral, A-integral, double series, examples and counterexamples.