ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

УДК 514.172.45

РАЗБОР ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЗАДАНИЯ ПО КОМБИНАТОРИКЕ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В. А. Лецко

Волгоградский гос. социально-педагогический университет, Волгоград, Россия

val-etc@yandex.ru

В статье представлен разбор заданий для самостоятельного исследования, предложенных в прошлом номере журнала, а также ряд сведений из комбинаторной теории выпуклых многогранников. В частности, описаны возможные количества диагоналей многогранников, имеющих фиксированное число вершин.

Ключевые слова: выпуклые многогранники, комбинаторика многогранников, диагонали многогранника.

1. Исследовательское задание из прошлого выпуска журнала

Через v, f и e обозначим количества вершин, граней и ребер выпуклого многогранника соответственно. Максимальное количество сторон в гранях обозначим через s. Упорядоченный набор $F = (f_3, f_4, \ldots, f_s)$, где f_i – число i-угольных граней, будем называть вектором граней. Через m обозначим максимум f_i. Через d будем обозначать число диагоналей многогранника, а через df – суммарное число диагоналей его граней.

Задача № 1. Какое наибольшее значение может принимать s, если:

a) $m = 3$;

b) $m = 4$?

А может быть, кому-то из наших читателей удастся решить последнюю задачу для произвольного m?

Задача № 2. Для каких значений v существуют выпуклые многогранники, для которых выполняется соотношение:

a) $e = d = \mathrm{df}$;

b) $v = d$?

Примечание: Обратите внимание, что пункты a и b рассматриваются отдельно. Иными словами, вторая задача, по сути, содержит две разные задачи.

Задача № 3. При каком наименьшем v для характеристик многогранника может выполняться соотношение: $v^3 + f^3 + e^3 = d^2$?

2. Некоторые сведения из комбинаторной теории выпуклых многогранников

Число s не определяется однозначно другими характеристиками многогранника. Например, для додекаэдра и десятиугольной призмы, имеющих по 20 вершин и 12 граней, значения s отличаются в два раза. Ясно лишь, что имеет место неравенство $s \leqslant \min(f-1, v-1)$. Равенство $s = v-1$ достигается у пирамид и только у них. В то же время, равенство $s = f-1$ возможно и для других многогранников.

По вектору граней однозначно восстанавливаются важнейшие характеристики многогранника. Очевидно, $f = \sum\limits_{i=3}^{s} f_i$. Учитывая, что каждое ребро принадлежит двум граням, имеем $e = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=3}^{s} i f_i$. Количество вершин можно найти теперь с помощью известного соотношения Эйлера

$$v + f - e = 2 \tag{1}$$

Наконец, вектор граней однозначно определяет интересующее нас количество диагоналей:

$$d = \binom{v}{2} - e - \sum_{i=4}^{s} \frac{i(i-3)}{2} f_i \tag{2}$$

Последняя формула очевидна, если учесть, что диагональю многогранника будет каждый отрезок, соединяющий пару вершин и не являющийся при этом ни ребром, ни диагональю грани. Таким образом, количество диагоналей однозначно определяется вектором граней.

Двойственным вектору граней многогранника является вектор вершин $V = (v_3, v_4, \ldots, v_t)$, где t – максимальная степень вершины, v_i – количество вершин степени i. Разумеется, он тоже однозначно определяет v, e и f. Но количество диагоналей, зная вектор вершин, в общем случае однозначно восстановить нельзя. Отыскание примера, подтверждающего последнее утверждение, само по себе является небольшой исследовательской задачей. Ее решение мы предоставим читателю.

Выполнения соотношения Эйлера, конечно, недостаточно для существования многогранника. Например, легко понять, что многогранника с 7-ю вершинами, 30-ю гранями и 35-ю ребрами не существует, хотя указанные числа удовлетворяют (1). Выведем необходимые и достаточные условия для того, чтобы тройка натуральных чисел (v, e, f) описывала количество вершин, ребер и граней некоторого многогранника. Поскольку из каждой вершины вы-

ходит не менее трех ребер, каждая грань окружена не менее чем тремя ребрами, а каждое ребро соединяет две вершины и разделяет две грани в любом многограннике, должны выполняться соотношения

$$3v \leqslant 2e, \quad 3f \leqslant 2e \tag{3}$$

Подставляя выражения v и f из (1) в первое и второе неравенства (3) соответственно, получим

$$e \leqslant 3f - 6, \quad e \leqslant 3v - 6 \tag{4}$$

Если же в каждое из неравенств (3) подставить выражение для e из (1), получим связь между v и f

$$v \leqslant 2f - 4, \quad f \leqslant 2v - 4 \tag{5}$$

Тройка натуральных чисел v, e, f, удовлетворяющая соотношению Эйлера и одной (а, значит, и каждой) из пар неравенств (3), (4), (5), гарантированно соответствует некоторому многограннику с данными характеристиками.

Проиллюстрируем возможный способ получения подходящего многогранника. Пусть $v = 300$, $f = 250$, $e = 548$. Поскольку $548 \equiv 2 \pmod 3$, мы стартуем с четырехугольной пирамиды, количество ребер которой тоже сравнимо с 2 по модулю 3. Мы будем увеличивать v, e, f, применяя преобразования двух типов: наращивание треугольной грани невысоким (чтобы не нарушить выпуклости) тетраэдром; отрезание вершины степени 3 плоскостью, проходящей через внутренние точки ребер, исходящих из этой вершины. Первое преобразование увеличивает число вершин на 1, а число граней – на 2 (3 добавилось, 1 ушла). При втором, наоборот, количество вершин увеличивается на 2 (3 добавилось, 1 ушла), а количество граней – на 1. При этом каждое из преобразований увеличивает количество ребер на 3. Обозначим количество преобразований I типа, нужных для получения многогранника с требуемыми характеристиками, за x, а II – за y. Тогда

$$\begin{cases} x + y = (548 - 8)/3 = 180, \\ x + 2y = 300 - 5 = 295, \\ 2x + y = 250 - 5 = 245. \end{cases}$$

Решая систему, получим $x = 65, y = 115$. То есть, применяя к четырехугольной пирамиде 65 раз преобразование I и 115 раз преобразование II, получим многогранник (один из многих возможных) с требуемыми характеристиками.

Очевидно, в общем случае можно действовать так же. При этом если e кратно 3, то стартовать можно с тетраэдра; если $e \equiv 1 \pmod 3$, то стартовать можно с пятиугольной пирамиды; если $e \equiv 2 \pmod 3$ (случай из нашего примера), то стартовать можно с четырехугольной пирамиды. Такой подход гарантирует целочисленность решения системы. Применение как I, так и II преобразования приводит к многогранникам, в которых есть треугольные

грани и вершины степени 3, то есть, пригодным для повторных преобразований. Соотношение Эйлера гарантирует совместность системы (поэтому можно использовать всего два уравнения, третье является их следствием). Наконец, любая из пар неравенств (3), (4), (5) гарантирует неотрицательность решения.

Рассмотрим предельные случаи неравенств (3), (4), (5). Не сложно понять (и доказать), что $3v = 2e$, $e = 3f - 6$ и $v = 2f - 4$ тогда и только тогда, когда каждая вершина многогранника имеет степень 3. Такие многогранники называют *простыми*. Равенства $3f = 2e$, $e = 3v - 6$ и $f = 2v - 4$ равносильны тому, что все грани многогранника – треугольники. Такие многогранники называют *симплициальными*.

Перепишем одно из неравенств (4) в виде $6f - 2e \geqslant 12$ и подставим вместо f и e их выражения через вектор граней. Получим $6\sum\limits_{i=3}^{s} f_i - \sum\limits_{i=3}^{s} if_i \geqslant 12$, или

$$\sum_{i=3}^{s}(6-i)f_i \geqslant 12 \tag{6}$$

Причем последнее неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда многогранник является простым. Это первая часть *теоремы Эберхарда*. Во второй, не столь тривиально обосновываемой части, утверждается, что при $\sum\limits_{i=3}^{s}(6-i)f_i = 12$ обязательно найдется такое значение f_6, для которого существует простой многогранник с соответствующим вектором граней. Познакомиться с доказательством этого утверждения можно, например, в [1]. Там же приведена теорема Грюнбаума–Моцкина, из которой, в частности, следует, что простой многогранник с вектором граней $(0, 0, 12, f_6)$ существует тогда и только тогда, когда $f_6 \neq 1$. В общем случае проблема существования многогранника с заданным вектором граней не решена.

Ключевую роль в теории выпуклых многогранников играет

Теорема Штайница. *Граф любого выпуклого многогранника является планарным и 3-связным. Обратно: любой планарный 3-связный граф является графом выпуклого многогранника.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [1–3]. Теорема Штайница дает нам возможность, обосновывая существование многогранника с требуемым вектором граней, ограничиться предъявлением его графа.

3. Решение первой задачи

Достаточно легко понять, что m не может равняться 1 (иначе число граней, примыкающих к грани с нибольшим числом сторон, превышало бы общее число граней.

При $m = 2$ возможные значения вектора граней – $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 1)$ и $(2, 2, 2, 2)$ (остальные варианты не удовлетворяют соотношению (6)). С другой

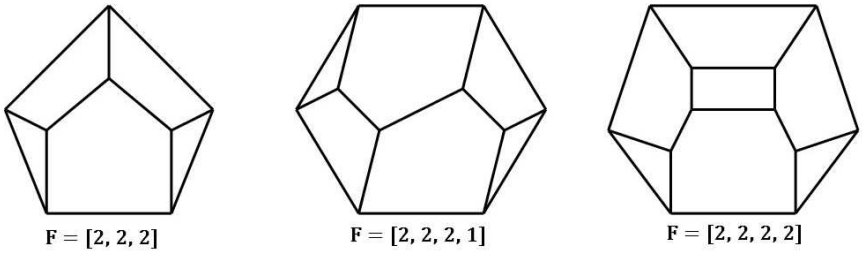

Рис. 1.

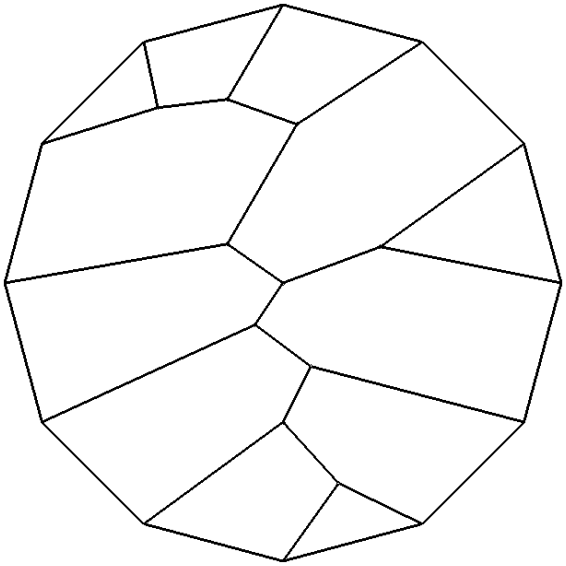

Рис. 2.

стороны, многогранники, отвечающие указанным векторам, реализуемы, что очевидно из рис. 1. Поэтому при $m = 2$ наибольшее возможное значение s равно 6.

Соотношение (6) играет ключевую роль и при нахождении наибольшего возможного значения s для интересующих нас m. Пусть $m = 3$. Заметим, что слагаемые в правой части соотношения (6), соответствующие значениям i, большим 6, отрицательны. Поэтому для максимизации s выгодно положить $f_s = 1$, а остальные f_i при $i > 6$ положить равными 0. Если при этом положить $f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 3$, получим вектор граней $F = (3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ с возможным значением $s = 12$. Граф на рис. 2 доказывает достижимость этого значения.

При $m = 4$ приведенное выше рассуждение не проходит. Положив $f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 4$, $f_{18} = 1$, а прочие f_i равными 0, мы получим вектор, заведомо не соответствующий никакому многограннику, поскольку в многогран-

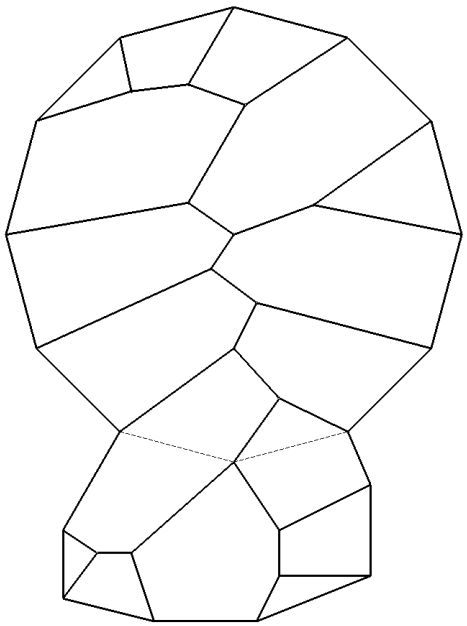

Рис. 3.

нике, имеющем 18-угольную грань, должно быть не менее 19 граней. Можно исправить ситуацию, заменив 18-угольную грань 17-угольной и добавив одну семиугольную. Но мы решим более общую задачу, найдя наибольшее возможное значение s для произвольного m.

Пусть $f = 4m + x + 1$, где x – количество граней с числом сторон больше 6 и меньше s. Для неотрицательных слагаемых в левой части соотношения Эберхарда имеем $m(6-3) + m(6-4) + m(6-5) + m(6-6) = 6m$. Тогда $6m \geqslant 12 - x - (s-6)$, откуда $s \leqslant 6m - x - 6$. С другой стороны, $s \leqslant f - 1 = 4m + x$ (равенство достигается тогда и только тогда, когда грань с наибольшим числом сторон смежна остальным). Складывая полученные неравенства, получим оценку

$$s \leqslant 5m - 3 \tag{7}$$

Последнее неравенство превратится в равенство, если $x = m - 3$ и все эти $m - 3$ грани являются семиугольниками. Пусть $s = 5m - 3$. Для доказательства доказательства существования многогранников с таким значением s остается показать, что для каждого m (ясно, что $m \geqslant 3$, поскольку среди граней должно присутствовать $m-3$ семиугольника) найдется многогранник с вектором граней F таким, что

$$\begin{cases} f_i = m & \text{при } 3 \leqslant i \leqslant 6, \\ f_7 = m - 3 & \\ f_i = 0 & \text{при } 8 \leqslant i < s, \\ f_s = 1. & \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство легко осуществить по индукции. При $m = 3$ существование подходящего многогранника уже доказано (рис. 2). На рис. 3 показано как от графа многогранника, соответствующего вектору F, описываемому соотношениями (8) для данного m, перейти к аналогичному графу для $m+1$. При таком переходе к многограннику добавляется по одной грани размерностей 3, 4, 5, 6, 7, а число ребер, ограничивающих s-угольную грань, увеличивается на 5. Важно, что в добавляемом «куске» имеются смежные треугольная, четырехугольная и s-угольная грани. Это позволяет повторять данную процедуру требуемое число раз. В частности, на рис. 3 представлен граф многогранника, показывающий, что при $m = 4$ наибольшее возможное значение s равно 17.

Окончательно получаем:

при $m = 1$ многогранников не существует;
при $m = 2$ $s_{\max} = 6$;
при $m \geqslant 3$ $s_{\max} = 5m - 3$.

4. Многогранники, имеющие поровну ребер, диагоналей и диагоналей граней

Прежде чем решать вторую и третью задачи отметим следующий факт: для любого целого неотрицательного числа d существует выпуклый многогранник, имеющий ровно d диагоналей. В самом деле, очевидно, что пирамида не имеет диагоналей. Получить многогранник с d диагоналями, можно, надстроив на боковую грань $(n+2)$-угольной пирамиды низкую (чтобы не нарушить выпуклость) треугольную пирамиду. У полученного многогранника будет ровно n диагоналй (отрезки, соединяющие добавленную вершину с вершинами основания исходной пирамиды, кроме двух, лежащих в исчезнувшей боковой грани). Альтернативный способ – «отрезать» вершину основания у $(n + 3)$-угольной пирамиды.

Приступим к решению первого пункта второй задачи. Учитывая, что каждый отрезок, соединяющий две вершины многогранника, является либо ребром, либо диагональю грани, либо диагональю многогранника, приходим к выводу, что в искомом многограннике должно выполняться соотношение

$$e = d = \mathrm{df} = v(v - 1)/6 \tag{9}$$

Отсюда и из первого неравенства (3) получим $3v \leqslant v(v - 1)/3$, откуда $v \geqslant 10$. С другой стороны, из второго неравенства (4) и соотношения (9) следует $v(v-1)/6 \leqslant 3v-6$, откуда $v \leqslant 16$. При $v = 11$ и $v = 14$ значения e получаются дробными. Поэтому окончательно получаем: $v \in \{10, 12, 13, 15, 16\}$. Для каждого из возможных значений v найдем соответствующие значения e и f и занесем в таблицу 1.

Поскольку из каждой вершины выпуклого n-угольника исходит ровно $n - 3$ диагонали, а каждая диагональ соединяет 2 вершины, у выпуклого n-угольника в точности $n(n - 3)/2$ диагоналей.

Таблица 1.

v	10	12	13	15	16
e	15	22	26	35	40
f	7	12	15	22	26

Теперь для каждого значения v из таблицы 1 мы можем получить систему неравенств. Каждую из таких систем легко решить небольшим (ручным) перебором.

Для $v = 10$ грани не могут быть более чем шестиугольны. Поэтому соответствующая система примет вид:

$$\begin{cases} f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 7, \\ 2f_4 + 5f_5 + 9f_6 = 15, \\ 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 = 30. \end{cases}$$

Если $f_6 = 1$, то с учетом 1-го и 2-го уравнений $f_5 = 0$, $f_4 = 3$, $f_3 = 3$, но эти значения не подходят в 3-е уравнение (и вообще, количество граней с нечетным числом сторон не может быть нечетным).

Пусть $f_6 = 0$. Тогда из 2-го уравнения следует, что f_5 – нечетно. Но $f_5 = 3$ вновь приводит к нечетному числу граней с нечетным числом сторон. А если $f_5 = 1$, то из 1-го и 2-го уравнений следует, что $f_4 = 5$, $f_3 = 1$. Но эти значения не удовлетворяют 3-му уравнению.

Таким образом, v не может равняться 10.

Рассмотрим случай $v = 12$. Тогда у каждой грани не более 8 сторон. Имеем систему:

$$\begin{cases} f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 = 12, \\ 2f_4 + 5f_5 + 9f_6 + 14f_7 + 20f_8 = 22, \\ 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + 8f_8 = 44. \end{cases}$$

Вновь начнем с анализа сначала 2-го, а затем 1-го уравнений. Если $f_8 = 1$, то $f_7 = f_6 = f_5 = 0$, $f_4 = 1, f_3 = 10$, что не подходит в 3-е уравнение.

Итак, $f_8 = 0$. Пусть $f_7 = 1$. Тогда то $f_6 = f_5 = 0$, $f_4 = 4$, $f_3 = 7$. Легко видеть, что этот набор удовлетворяет 3-му уравнению. Для разнообразия приведем не граф, а непосредственно многогранник. Его не сложно сконструировать, отталкиваясь от простейших. На рис. 4 слева представлен образец, полученный отрезанием трех тетраэдров от усеченной четырехугольной пирамиды и последующим наращиванием верхнего основания низкой четырехугольной пирамидой.

Пусть теперь $f_7 = 0$. Если $f_6 = 2$, то $f_5 = 0$, $f_4 = 2$, $f_3 = 8$. Этот набор значений реализуется, например, в многограннике, который проще всего получить из шестиугольной призмы (усеченной пирамиды). Этот многогранник изображен на рис. 4 справа.

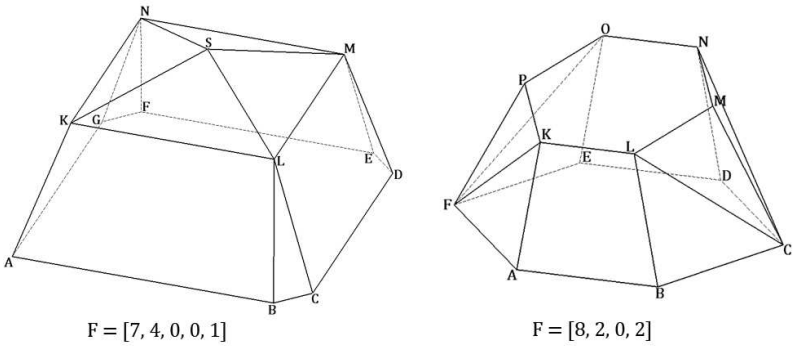

Рис. 4.

Предположение $f_6 = 1$ приводит к нечетному числу граней с нечетным числом сторон. При $f_6 = 0$ такое же противоречие возникает, если $f_5 = 4$, $f_4 = 1$ и $f_5 = 0, f_4 = 11$. А случай $f_5 = 2$, $f_4 = 6$, $f_3 = 4$ не удовлетворяет третьему уравнению системы.

Для $v = 13$ соответствующая система имеет вид:

$$\begin{cases} f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 = 15, \\ 2f_4 + 5f_5 + 9f_6 + 14f_7 + 20f_8 = 26, \\ 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + 8f_8 = 52. \end{cases}$$

Для $v = 15$ имеем:

$$\begin{cases} f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9 + f_{10} = 22, \\ 2f_4 + 5f_5 + 9f_6 + 14f_7 + 20f_8 + 27f_9 + 35f_{10} = 35, \\ 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + 8f_8 + 9f_9 + 10f_{10} = 70. \end{cases}$$

Наконец при $v = 16$ соответствующая система примет вид:

$$\begin{cases} f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9 + f_{10} = 26, \\ 2f_4 + 5f_5 + 9f_6 + 14f_7 + 20f_8 + 27f_9 + 35f_{10} = 40, \\ 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + 8f_8 + 9f_9 + 10f_{10} = 80. \end{cases}$$

Рассуждая так же, как раньше, не сложно убедиться, что последние три системы не имеют решений в целых неотрицательных числах.

Таким образам, существует ровно два типа многогранников, у которых равны количества ребер, диагоналей и диагоналей граней (мы считаем многогранники однотипными, если они имеют равные векторы граней).

5. Сколько диагоналей может быть у многогранника с данным числом вершин?

Обозначим через $D(v)$ множество всевозможных количеств диагоналей выпуклых многогранников, имеющих v вершин.

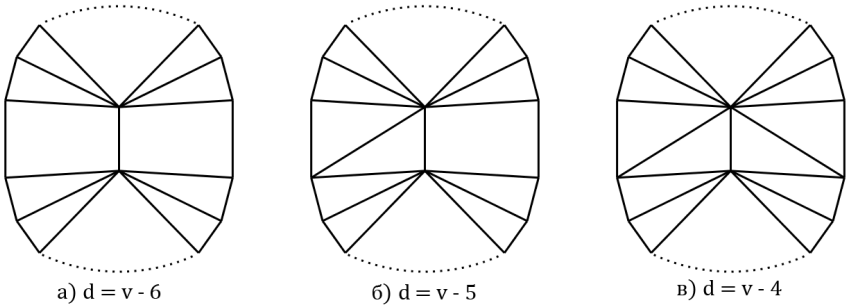

Рис. 5.

Очевидно, что при $s = v-1$ у многогранника нет диагоналей (пирамида). Следующий по простоте случай – многогранники, у которых вне самой большой (по количеству сторон) грани лежат ровно 2 вершины. Будем называть грань, содержащую $v-2$ вершины, основанием. Расположив вершины, не принадлежащие основанию, так, чтобы соединяющее их ребро было компланарно двум ребрам основания, получим многогранник, граф которого изображен на рис. 5а.

Из формулы (5) следует, что у него $v-6$ диагоналей. Впрочем, это легко видеть и без применения формулы: из каждой диагонали основания, за исключением вершин, принадлежащих четырехугольным граням, исходит ровно одна диагональ, и других диагоналей нет.

Пошевелив одну из вершин, получим многогранник, изображенный на рис. 5б. Ясно, что у него на одну диагональ больше, чем у предыдущего. В самом деле, одна из диагоналей бывшей четырехугольной грани превратилась в ребро, а другая – в диагональ многогранника.

Разбив на треугольники вторую четырехугольную грань, получим многогранник, имеющий $v-4$ диагонали (рис. 5в).

Этим исчерпываются все возможные случаи для многогранников (имеющих не менее 6 вершин), в основании которых лежит многоугольник, имеющий $v-2$ сторон. Поэтому при $v \geqslant 6$ в $D(v)$ входит тройка последовательных чисел $v-6$, $v-5$, $v-4$.

Прежде чем двигаться дальше, зафиксируем один важный момент. Пусть вектор граней одного многогранника содержит не менее двух k-угольных граней, а у другого многогранника на две k-угольных грани меньше, но при этом значения f_{k-1} и f_{k+1} на единицу больше, чем у первого многогранника. В остальном же векторы граней этих многогранников идентичны. Покажем, что у первого многогранника на одну диагональ больше, чем у второго. Для этого достаточно сравнить количества диагоналей в двух гранях, имеющих по k сторон, с суммарным количеством диагоналей в грани с $k-1$ стороной и грани с $k+1$ стороной (прочие параметры, входящие в формулу (2) будут идентичны). Для первого многогранника имеем $k(k-3)$ диагоналей в соответствующих гранях, а для второго – $(k-1)(k-4)/2+(k+1)(k-2)/2 = k(k-3)+1$

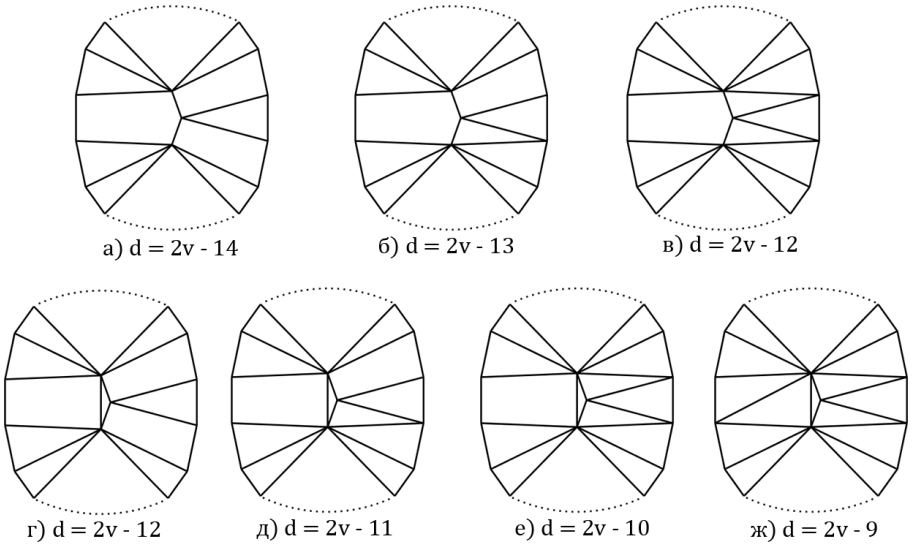

Рис. 6.

диагоналей. Таким образом, у второго диагоналей граней на одну больше, и, следовательно, диагоналей самого многогранника на одну меньше, чем у первого.

Справедливо (и аналогично проверяется) более общее утверждение. Из двух многогранников, имеющих поровну вершин и ребер, больше диагоналей у того, у которого количества сторон в гранях распределены более равномерно.

Продолжим увеличивать количество вершин вне основания, по одной отрывая их от основания.

На рис. 6 представлены графы многогранников, отвечающие всем возможным векторам граней многогранника, имеющего v вершин, ровно 3 из которых лежат вне основной грани. Важно, что 6 возможных для этого случая значений d вновь заполнили собой отрезок натурального ряда от $2v-14$ до $2v-9$.

На этой стадии мы уже готовы ответить на второй пункт второй задачи. Но мы сделаем это в следующем разделе, а пока продолжим рассуждение.

Пусть вне основания расположено k вершин. Сначала расположим эти вершины так, чтобы вместе с двумя смежными вершинами основания они образовывали $(k+2)$-угольник, среди остальных граней было бы $k-1$ четырехугольников. (Это максимально возможное число четырехугольников.) Найдем количество диагоналей получившегося многогранника. Для этого подсчитаем количество отрезков, соединяющих вершины над основанием с вершинами основания, и отнимем те из них, что являются рёбрами, диагоналями в четырёхугольниках и диагоналями наибольшей грани над основанием:

$$\mathrm{dm}(k) = k(v-k) - (v-k) - 2(k-1) - 2(k-1) = (k-1)(v-k-4). \quad (10)$$

Легко проверить, что $\mathrm{dm}(k)$ соответствует наименьшему возможному количеству диагоналей многогранника, у которого вне основной грани лежат ровно k вершин. Поочередно разбивая четырехугольные грани на пары треугольных, мы постепенно, с шагом 1 увеличим $\mathrm{dm}(k)$ на $k-1$.

Теперь разобьем $(k+2)$-угольную грань на $(k+1)$-угольную и треугольную и одновременно восстановим четырехугольные грани. При этом количество диагоналей многогранника не изменится: разбиение $(k+2)$-угольной грани уменьшит это количество на $k-1$, а возвращение четырехугольных граней увеличит на то же число. Далее снова начнем по одной разбивать четырехугольные грани, продолжая получать многогранники, каждый из которых содержит на одну диагональ больше, чем предыдущий. Когда четырехугольных граней не останется, разобьем $(k+1)$-угольную грань на k-угольную и треугольную и вновь вернем четырехугольные грани. При этом возникнет многогранник, у которого будет на одну диагональ меньше, чем у предыдущего. Но это не важно. Главное, что подобные преобразования гарантируют, что в результате всего процесса мы будем постепенно (с повторами) увеличивать количество диагоналей, не пропуская ни одного натурального числа.

Описанный процесс будем продолжать, пока все грани, кроме основания, не станут треугольными.

Чтобы найти количество диагоналей получившегося многогранника, прибавим к найденному количеству диагоналей в начале рассуждения те диагонали, которые появились при преобразовании четырёхугольников и наибольшей грани над основанием в треугольники (разумеется, тот же результат можно получить, используя формулу (2):

$$\mathrm{DM}(k) = (k-1)(v-k-4) + (k-1) + \frac{k(k-1)}{2} = (k-1)\left(v - \frac{k+6}{2}\right). \quad (11)$$

Отметим, что длины отрезков возможных значений d являются последовательными треугольными числами. В самом деле,

$$\mathrm{DM}(k) - \mathrm{dm}(k) = (k-1)\left(v - \frac{k+6}{2}\right) - (k-1)(v-k-4) = \frac{k(k+1)}{2} - 1.$$

Остается заметить, что на отрезке натурального ряда от $\mathrm{dm}(k)$ до $\mathrm{DM}(k)$ все значения допустимы и их количество на 1 больше разности максимального и минимального значений.

Поскольку $\mathrm{DM}(k)$ растёт быстрее чем $\mathrm{dm}(k)$, начиная с некоторого значения k, интервалы начнут сливаться и дадут один цельный интервал. Для этого достаточно, чтобы левый конец отрезка допустимых значений d при некотором k не превышал бы правый конец отрезка при следующем значении k более чем на 1. Так будет, начиная с

$$k = \left\lfloor \frac{\sqrt{8v-15}}{2} \right\rfloor. \quad (12)$$

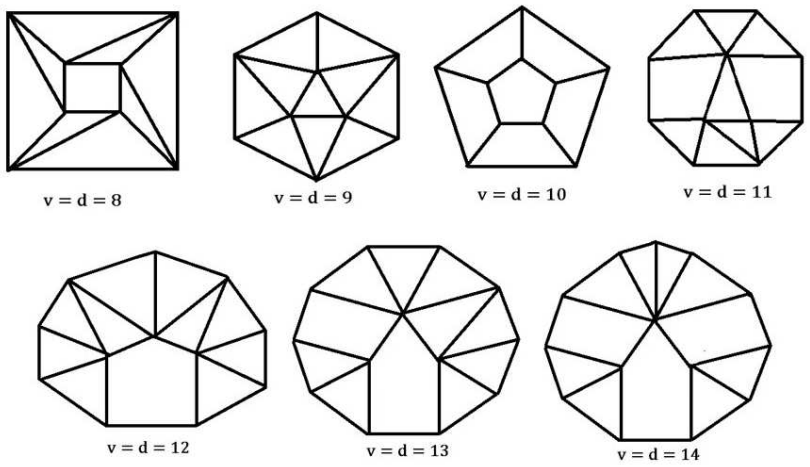

Рис. 7.

Этим же числом, начиная с $v = 5$, определяется число отрезков, содержащих все возможные значения d для данного числа вершин.

Наибольшее значение количества диагоналей будет достигаться, когда все грани будут треугольниками. Это условие, как мы знаем, равносильно равенству $f = 2v - 4$. А количество диагоналей будет равно

$$d_{\max}(v) = \frac{v(v-1)}{2} - (3v - 6) = \frac{(v-3)(v-4)}{2}. \tag{13}$$

Такое количество диагоналей будет, например, у бипирамиды.

Формулы (10)–(13) дают полное описание $D(v)$ для каждого v.

В таблице 2 представлены 25 наименьших $D(v)$.

6. Многогранники, имеющие поровну вершин и диагоналей

Из таблицы 2 (а также формулы (13)) следует что при $v < 8$ количество диагоналей строго меньше числа вершин. Поэтому для искомого количества вершин имеем $v \geqslant 8$.

Мы уже знаем, что если вне основания многогранника лежит всего две вершины, то $D(v) = \{v - 6, v - 5, v - 4\}$. Ясно, что ни одно из этих чисел не может равняться v. Если вне основания лежат при вершины, то $D(v) = \{2v - 14, \ldots, 2v - 9\}$. При $v > 14$ это значение больше v. Следовательно, при $v > 14$ значение d всегда лежит в промежутке между вторым и третьим отрезками $D(v)$.

Таким образом искомые v должны удовлетворять условию $8 \leqslant v \leqslant 14$. Но из таблицы 2 видно, что для каждого такого v существуют многогранники с условием $v = d$. На рис. 7 представлены соответствующие графы.

Таблица 2.

v	$D(v)$	$\lvert D(v)\rvert$
4	$\{0\}$	1
5	$\{0,1\}$	2
6	$\{0,1,2,3\}$	4
7	$\{0,1,2,3,4,5,6\}$	7
8	$\{0\}\cup\{2,\dots 10\}$	10
9	$\{0\}\cup\{3,\dots 15\}$	14
10	$\{0\}\cup\{4,\dots 21\}$	19
11	$\{0\}\cup\{5,\dots 28\}$	25
12	$\{0\}\cup\{6,\dots 8\}\cup\{10,\dots 36\}$	31
13	$\{0\}\cup\{7,\dots 9\}\cup\{12,\dots 45\}$	38
14	$\{0\}\cup\{8,\dots 10\}\cup\{14,\dots 55\}$	46
15	$\{0\}\cup\{9,\dots 11\}\cup\{16,\dots 66\}$	55
16	$\{0\}\cup\{10,\dots 12\}\cup\{18,\dots 78\}$	65
17	$\{0\}\cup\{11,\dots 13\}\cup\{20,\dots 25\}\cup\{27,\dots 91\}$	75
18	$\{0\}\cup\{12,\dots 14\}\cup\{22,\dots 27\}\cup\{30,\dots 105\}$	86
19	$\{0\}\cup\{13,\dots 15\}\cup\{24,\dots 29\}\cup\{33,\dots 120\}$	98
20	$\{0\}\cup\{14,\dots 16\}\cup\{26,\dots 31\}\cup\{36,\dots 136\}$	111
21	$\{0\}\cup\{15,\dots 17\}\cup\{28,\dots 33\}\cup\{39,\dots 153\}$	125
22	$\{0\}\cup\{16,\dots 18\}\cup\{30,\dots 35\}\cup\{42,\dots 171\}$	140
23	$\{0\}\cup\{17,\dots 19\}\cup\{32,\dots 37\}\cup\{45,\dots 54\}\cup\{56,\dots 190\}$	155
24	$\{0\}\cup\{18,\dots 20\}\cup\{34,\dots 39\}\cup\{48,\dots 57\}\cup\{60,\dots 210\}$	188
25	$\{0\}\cup\{19,\dots 21\}\cup\{36,\dots 41\}\cup\{51,\dots 60\}\cup\{64,\dots 231\}$	155
26	$\{0\}\cup\{20,\dots 22\}\cup\{38,\dots 43\}\cup\{54,\dots 63\}\cup\{68,\dots 253\}$	206
27	$\{0\}\cup\{21,\dots 23\}\cup\{40,\dots 45\}\cup\{57,\dots 66\}\cup\{72,\dots 276\}$	225
28	$\{0\}\cup\{22,\dots 24\}\cup\{42,\dots 47\}\cup\{60,\dots 69\}\cup\{76,\dots 300\}$	245

7. Решение третьей задачи

Для решения третьей задачи прибегнем к небольшому компьютерному перебору для поиска решений диофантова уравнения

$$v^3+e^3+f^3=d^2. \tag{14}$$

Поскольку нас интересует решение (14) с наименьшим v, то во внешнем цикле будем наращивать v, начиная с 4. Учитывая (3) и (4), для каждого v будем перебирать e от $\lceil 3v/2\rceil$ до $3v-6$. Вычислим f из соотношения Эйлера и проверим, является ли $v^3+e^3+f^3$ полным квадратом.

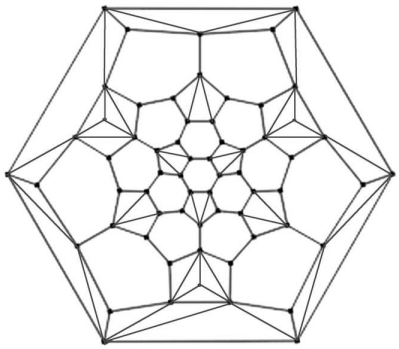

Рис. 8.

Наименьшими решениями (14), отвечающими сделанными ограничениям, будет четверка $(17, 34, 19, 266)$ и симметричный набор $(19, 34, 17, 266)$. Однако ни одна из них не подходит, поскольку количество диагоналей многогранника с 17 (19) вершинами не может превышать 91 (120). Следующий набор – $(63, 130, 69, 1666)$. Легко убедиться, что $1666 \in D(63)$. Это означает, что $v = 63$ и есть ответ к нашей задаче.

Для убедительности предъявим граф конкретного многогранника, характеристики которого удовлетворяют соотношению (14). В качестве вектора граней искомого многогранника годится, например, $F = (50, 2, 0, 17)$. На рис. 8 приведен граф соответствующего многогранника.

Литература

[1] Grünbaum B. Convex Polytopes, 2nd edition. Springer, 2003.

[2] Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники графы оптимизация. М.: Наука, 1981.

[3] Ziegler G. M. Lectures on polytopes. Vol. 152. Springer Science & Business Media, 2012. Рус. пер.: Циглер Г. М. Теория многогранников. М.: МЦНМО, 2014.

Поступила 05.10.2020

ANALYSIS OF A RESEARCH TASK ON COMBINATORICS OF CONVEX POLYHEDRA

V. A. Letsko

In this article we analyze the tasks for autonomous research offered in the preceding issue. We also present more facts on convex polyhedral combinatorics. In particularly, all possible numbers of diagonals of polyhedrons with a fixed number of vertices were calculated.

Keywords: convex polyhedra, polyhedral combinatorics, polyhedron diagonals.