СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.2

ВАРИАНТ ОБОСНОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ ТЕОРИИ РЯДОВ И НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С. Н. Слугин, В. С. Кротова

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; тел.: (8312) 657603

Вариант обоснования некоторых утверждений теории рядов и несобственных интегралов. Предлагаются краткие доказательства теорем о степенных рядах, несобственных интегралах, зависящих от параметра, и общих рядах Фурье для кусочно-непрерывных функций.

Ключевые слова: степенной ряд, несобственный интеграл с параметром, ряд Фурье, кусочно-непрерывная функция.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ ПРИЗНАКА КОШИ – АДАМАРА

1.1. Радиус сходимости

Для установления общего вида области сходимости степенного ряда

$$\sum_{0}^{\infty} c_n x^n = s(x) \tag{1}$$

можно использовать признак Коши – Адамара: при фиксированном x числовой ряд (1) абсолютно сходится (или ряд расходится), если верхний предел $K_0 = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} < 1$ (или соответственно $K_0 > 1$). Введем величину

$$K = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,.$$

Ясно, что $K_0 = K \cdot |x|$. Если $K = 0$, то степенной ряд абсолютно сходится всюду, радиус сходимости $R = +\infty$. Если $0 < K < +\infty$, то ряд абсолютно сходится при $|x| < R = 1/K$ и расходится при $|x| > R$. Если $K = +\infty$, то ряд расходится при $x \neq 0$, радиус $R = 0$.

1.2. Почленное интегрирование и дифференцирование

Здесь имеется в виду, что до этого в курсе математического анализа были изучены функциональные ряды.

Заметим, что интервалы сходимости рядов

$$\sigma(x) = \sum_{0}^{\infty} b_n x^n, \quad \sum_{0}^{\infty} b_n x^{n+1} = x\sigma(x), \quad \sum_{1}^{\infty} b_n x^{n-1} = [\sigma(x) - b_0]/x \quad (x \neq 0),$$

очевидно, совпадают.

Обычным способом устанавливается равномерная сходимость степенного ряда на внутреннем отрезке, содержащемся в интервале сходимости.

Из равномерной сходимости ряда (1) непрерывных функций на внутреннем отрезке следует возможность почленного интегрирования:

$$\int_0^x s(t)\,dt = x\sum_0^\infty c_n x^n/(n+1)$$

на любом внутреннем отрезке $[0,x]$ и, следовательно, на интервале сходимости $(-R,R)$. Если R_1 — радиус сходимости ряда $\sum\limits_0^\infty c_n x^n/(n+1)$, то

$$1/R_1 = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/(n+1)}\cdot K = K = 1/R, \quad R_1 = R.$$

Следовательно, R — радиус сходимости ряда интегралов.

Сумма ряда производных

$$p(x) = \sum_1^\infty n c_n x^n/x \quad (x\neq 0), \quad p(0) = c_1.$$

Если R_2 — радиус сходимости ряда $\sum\limits_1^\infty n c_n x^n$, то

$$1/R_2 = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot K = K, \quad R_2 = R.$$

Следовательно, R — радиус сходимости ряда производных. Из сходимости ряда (1) гладких функций и равномерной сходимости ряда производных на любом внутреннем отрезке следует возможность почленного дифференцирования: $s'(x) = p(x)$ при $|x| < R$.

Классические примеры: разложение в степенные ряды функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ в результате интегрирования на отрезке $0,x] \subset (-1,1)$ соответствующих биномиальных рядов, сходящихся к производным вида $(1+t)^m$ этих функций (в случае обратных тригонометрических функций производится замена $\pm x^2 = t$).

2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА, И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

2.1. Равномерная сходимость интеграла и определение предела по Гейне

Здесь имеется в виду, что в курсе математического анализа уже были изучены определенные интегралы, зависящие от параметра, и функциональные последовательности.

Пусть функция $f(x,y)$ определена на полуполосе

$$[a,+\infty)\times[c,d] \tag{2}$$

и интегрируема по x на отрезках $[a,b]$ при любых $b>a$. Обозначим интегралы

$$F(b,y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx,\quad I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx.$$

Равномерная сходимость интеграла $I(y)$, то есть сходимость $F(b,y)\to I(y)$ при $b\to+\infty$ равномерно относительно $y\in[c,d]$ — означает, по определению Гейне, равномерную сходимость $F(b_n,y)\to I(y)$ для любой последовательности $b_n>a$, $b_n\to+\infty$. Обозначим

$$F_n(y)=F(b_n,y).$$

2.2. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру

Приведем доказательства известных теорем о свойствах интеграла $I(y)$.

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в полуполосе* (2); *интеграл $I(y)$ сходится равномерно относительно $y\in[c,d]$. Тогда интеграл $I(y)$ непрерывен и*

$$\int\limits_c^d i(y)\,dy=\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{3}$$

Доказательство. Для определенных интегралов $F_n(y)$ выполнены достаточные условия непрерывности и возможности смены порядка повторного интегрирования:

$$\int\limits_c^d F_n(y)\,dy=\int\limits_a^{b_n} dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{4}$$

Равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций $F_n(y)$ сходится к непрерывной функции $I(y)$. Интеграл от предела этой функциональной последовательности существует и равен пределу последовательности интегралов: $\int\limits_c^d I(y)\,dy=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_c^d F_n(y)\,dy$. Отсюда и из равенства (4) следует равенство (3). Теорема доказана.

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна по x, а частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывна в полуполосе* (2); *интеграл $I(y)$ сходится; интеграл $\int\limits_a^\infty f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно $y\in[c,d]$. Тогда функция $I(y)$ — гладкая,*

$$I'(y)=\int\limits_a^\infty f'_y(x,y)\,dx. \tag{5}$$

Доказательство. Производные по параметру определенных интегралов $F_n(y)$ — непрерывные функции $F'_n(y) = \int\limits_a^{b_n} f'_y(x,y)\,dx$. Выполнены достаточные условия для существования непрерывной производной $I'(y)$ и её равенства пределу $\lim\limits_{n\to\infty} F'_n(y)$. Следовательно, функция $I(y)$ гладкая и удовлетворяет равенству (5). Теорема доказана.

Замечание. Доказательства теорем нетрудно трансформировать, используя свойства функциональных рядов.

3. ОБЩИЙ РЯД ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Хотя здесь фактически применяются методы функционального анализа, но предложенный материал может быть использован в курсе математического анализа, так как речь пойдет о конкретном функциональном пространстве, хотя и с абстрактным функциональным базисом. Разложение в ряд Фурье здесь производится в неполном предгильбертовом пространстве, поэтому не требуется привлечение понятия интеграла Лебега.

Конкретизация базиса приводит, в частности, к тригонометрическим и алгебраическим рядам Фурье.

Напомним, что функция, определенная на отрезке, называется кусочно-непрерывной, если она непрерывна или имеет конечное множество точек разрыва первого рода (в которых существуют конечные односторонние пределы, но хотя бы один из них не равен значению функции в данной точке). Из кусочной непрерывности функции следует её ограниченность.

3.1. Скалярное произведение, норма, предел, ряд

В пространстве кусочно-непрерывных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, вводится понятие скалярного произведения — определенного интеграла

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt$$

и нормы

$$\|f\| = +\sqrt{(f,f)}.$$

Если норма $\|f\| > 0$, то функцию f можно нормировать: $e(x) = f(x)/\|f\|$, $\|e\| = 1$.

Очевидно, скалярное произведение линейно:

$$(cf+g,h) = c(f,h) + (g,h).$$

Известным способом устанавливается неравенство

$$|(f,g)| \le \|f\| \cdot \|g\|,$$

называемое в отечественной учебной литературе неравенством Коши – Буняковского (КБ), а также неравенство треугольника

$$\|f \pm g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

и следствие из него:

$$\Big|\|f\| - \|g\|\Big| \leq \|f - g\|.$$

По определению, последовательность функций $s_n(x)$ среднеквадратично (в среднем 2 порядка) сходится к функции $f(x)$, если

$$\|s_n - f\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Это соотношение обозначим $s_n \xrightarrow{2} f$.

Линейность предела:

$$(f_n \xrightarrow{2} f,\ g_n \xrightarrow{2} g,\ c_n \to c) \Rightarrow (c_n f_n + g_n \to cf + g)$$

устанавливается с учетом неравенства треугольника и ограниченности сходящейся числовой последовательности c_n. Непрерывность нормы:

$$(f_n \xrightarrow{2} f) \Rightarrow (\|f_n\| \to \|f\|)$$

проверяется с помощью следствия из неравенства треугольника. Из непрерывности нормы следует ограниченность последовательности норм функций $f_n \xrightarrow{2} f$.

Скалярное произведение непрерывно:

$$(f_n \xrightarrow{2} f,\ g_n \xrightarrow{2} g) \Rightarrow [(f_n, g_n) \to (f, g)].$$

Доказательство основано на неравенстве КБ и на ограниченности последовательности норм функций.

По определению, функция $f(x)$ разлагается в ряд

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} f_k(x),$$

если частные суммы ряда

$$s_n(x) = \sum_0^{n} f_k(x) \xrightarrow{2} f.$$

Пусть $f_k(x) = c_k\, e_k(x)$. Из линейности и непрерывности скалярного произведения следует равенство

$$(f, e) = \sum_0^{\infty} c_k (e_k, e). \tag{6}$$

3.2. Полная система функций

Система функций $g_k(x)$ $(k = \overline{0, x}\,)$ называется полной (замкнутой), если для любой функции $f(x)$ пространства и произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такая линейная комбинация $L(x)$ функций $g_k(x)$, что норма $\|L-f\|<\varepsilon$, то есть имеется такая последовательность линейных комбинаций $L_n(x)$ этих функций, что $L_n \xrightarrow{2} f$. Отметим, что в составе комбинаций $L_n(x)$ могут быть и функции с номерами $k > n$.

Лемма. *Если система функций $g_k(x)$ полная, то для любой функции $f(x)$ пространства существует такая последовательность линейных комбинаций $l_n(x)$ этих функций с номерами $k \leq n$, что $l_n \xrightarrow{2} f$.*

Идею доказательства леммы проиллюстрируем на частных случаях.

Пусть линейные комбинации $L_n \xrightarrow{2} f$, $L_0 = a_0g_0 + a_2g_2$ и в первом случае $L_1 = b_1g_1 + b_2g_2 + b_4g_4$, а во втором $L_1 = c_1g_1$. Положим

$$l_0 = a_0g_0, \quad l_1 = l_0 + 0g_1, \quad l_0 = L_0$$

и в первом случае

$$l_3 = b_1g_1 + b_2g_2 + 0g_3, \quad l_4 = L_1,$$

а во втором

$$l_3 = L_1 + 0g_2 + 0g_3.$$

Ясно, что при такой формальной процедуре введения дополнительных линейных комбинаций с нулевыми коэффициентами получаются искомые последовательности.

Классические примеры систем функций $g_k(x)$. Тригонометрическая: 1, $\cos nx$, $\sin nx$ $(n \geq 1,\ |x| \leq \pi)$. Степенная: x^n $(n \geq 0)$.

Для проверки их полноты в пространстве кусочно-непрерывных функций вначале устанавливается возможность их среднеквадратичной аппроксимации непрерывными функциями. Идею доказательства такой возможности продемонстрируем на частном случае, когда функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, имеет единственный разрыв, причем во внутренней точке c.

Вводится число $\delta \in (0, c-1)$. Определяется функция $g(x) = f(x)$ вне отрезка $[c-\delta, c]$, а на этом отрезке строится линейная функция $g(x)$ со значениями на концах:

$$g(c-\delta) = f(c-\delta), \quad g(c) = f(c+0).$$

Функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и может отличаться от функции $f(x)$ только на полуинтервале $(c-\delta, c]$. Обе функции ограничены, поэтому существует число $h > |f(x) - g(x)|$, $\forall x$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ при $\delta < \varepsilon^2/(4h^2)$ выполняется неравенство

$$\|f-g\|^2 = \int\limits_{c-\delta}^{c} [f(x) - g(x)]^2 dx < \varepsilon^2/4.$$

По теореме Вейерштрасса о равномерной аппроксимации, есть такой алгебраический полином $p(x)$, что

$$|g(x) - p(x)| < \varepsilon / \left(2\sqrt{b-a}\right), \ \forall x.$$

Следовательно,

$$\|g - p\| \le \varepsilon/2, \quad \|f - p\| \le \|f - g\| + \|g - p\| < \varepsilon.$$

Доказательство легко провести для любого конечного множества точек разрыва первого рода.

Алгебраический полином является линейной комбинацией степенных функций. Следовательно, степенная система полна в указанном пространстве.

В случае тригонометрической системы аналогично проверяется возможность среднеквадратичной аппроксимации кусочно-непрерывных функций $f(x)$, определенных при $|x| \le \pi$, непрерывными функциями $g(x)$ с концевыми значениями $g(-\pi) = g(\pi)$, затем применяется теорема Вейерштрасса о равномерной аппроксимации функций $g(x)$ тригонометрическими полиномами.

3.3. Ортогональность. Проекция. Базис

По определению, функции $f(x)$ и $g(x)$ ортогональны, $f \perp g$, если $(f, g) = 0$.

Если функции $e_i \perp g$, то их линейная комбинация $l \perp g$. “Теорема Пифагора”:

$$(f \perp g) \Rightarrow \left(\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2\right).$$

Система функций $e_n(x)$ называется ортонормированной (о. н. с.), если

$$\|e_n\| = 1, \quad e_i \perp e_k \quad (i \ne k),$$

а функции называются ортами.

Ортогональной проекцией функции $f(x)$ на о. н. с. функций $e + k(x)$ $(k = \overline{0, n})$ называется линейная комбинация

$$s_n(x) = \sum_0^n \lambda_k \, e_k(x)$$

с коэффициентами Фурье

$$\lambda_k = (f, e_k).$$

Эта проекция — ближайшая (в среднеквадратичном смысле) среди всех линейных комбинаций $l_n(x)$ ортов $e_i(x)$ $(i \le n)$. Действительно, для любого номера $i \le n$ выполняются равенства

$$(f - s_n, e_i) = (f, e_i) - \sum_{k=0}^n \lambda_k (e_k, e_i) = (f, e_i) - \lambda_i = 0,$$

орты $e_i \perp (f - s_n)$, следовательно, их линейная комбинация $(z_n - l_n) \perp (f - s_n)$. По “теореме Пифагора”,

$$\|f - l_n\|^2 = \|f - s_n\|^2 + \|s_n - l_n\|^2 \ge \|f - s_n\|^2.$$

Базисом пространства называется полная о. н. с.

3.4. Общий ряд Фурье и его почленное интегрирование. Тригонометрический ряд

Теорема. *Любая кусочно-непрерывная функция, определенная на отрезке, разлагается в ряд по базису ортов* $e_n(x)$ $(n = \overline{0, x})$*:*

$$f(x) \sim \sum_0^\infty \lambda_n \, e_n(x), \quad \lambda_n = (f, e_n). \tag{7}$$

При заданном базисе разложение в ряд единственное:

$$\textit{если} \;\; f(x) \sim \sum_0^\infty c_n \, e_n(x), \quad \textit{то} \;\; c_n = \lambda_n \quad (\forall n).$$

(Ряд (7) назовем общим рядом Фурье.)

Доказательство. Согласно лемме в п. 3.2, имеется такая последовательность линейных комбинаций $l_n(x)$ функций $e_i(x)$ $(i \le n)$, что $l_n \xrightarrow{2} f$. Частные суммы $s_n(x)$ ряда (7) являются ортогональными проекциями функции $f(x)$ на систему этих ортов. По доказанному в п. 3.3,

$$\|f - s_n\| \le \|f - l_n\| \to 0, \quad s_n \xrightarrow{2} f,$$

функция $f(x)$ разлагается в ряд (7).

Единственность разложения: для любого номера n коэффициент (см. (6))

$$\lambda_n = (f, e_n) = \sum_{k=0}^\infty c_k (e_k, e_n) = c_n.$$

Теорема доказана.

Среднеквадратично сходящийся ряд допускает почленное интегрирование, причем ряд интегралов (с переменным пределом интегрирования) сходится равномерно.

Пусть постоянная c и переменная x находятся на области определения функции $f(x)$ — отрезке $[a, b]$.

Теорема. *Интеграл* $\int_c^x f(t)\, dt$ *является суммой равномерно сходящегося ряда*

$$\sum_0^\infty \lambda_n \int_c^x e_n(t)\, dt.$$

(Из ограниченности кусочно-непрерывных функций на отрезке следует непрерывность интегралов, указанных в теореме.)

Доказательство. Остаток ряда $r_n(x) = f(x) - s_n(x)$. Достаточно проверить равномерную сходимость последовательности интегралов $\int_c^x r_n(t)\, dt$ к нулю

$$\left| \int_c^x r_n(t)\, dt \right| \le \left| \int_c^x |r_n(t)|\, dt \right| \le \int_a^b |r_n(t)|\, dt = (|r_n|, 1) \le$$
$$\le \|r_n\| \, (b - a) \to 0 \quad (n \to \infty, \; \forall x)$$

(здесь формально введена сомножителем функция — тождественная единица, и учтено неравенство КБ). Последовательность интегралов сходится равномерно. Теорема доказана.

В пространстве кусочно-непрерывных функций $f(x)$, определенных при $|x| \leq \pi$, тригонометрическая о. н. с.

$$1/\sqrt{2\pi}, \quad (\cos nx)/\sqrt{\pi}, \quad (\sin nx)/\sqrt{\pi} \quad (n = \overline{1, \infty})$$

является базисом (по поводу полноты системы см. п. 3.2). Отсюда следует разложимость функций $f(x)$ в тригонометрические ряды, среднеквадратично сходящиеся к $f(x)$.

Замечание. Применение теоремы о почленном интегрировании ряда Фурье облегчает доказательство теорем с достаточными условиями абсолютной и равномерной сходимости и почленной дифференцируемости тригонометрического ряда.

3.5. Алгебраический ряд Фурье

В пространстве кусочно-непрерывных функций $f(x)$, определенных при $|x| \leq 1$, алгебраический базис строится в результате ортогонализации степенной системы $g(x) = x^n$ $(n \geq 0)$. Орт $e_0(x) = g_0(x)/\|g_0\| \equiv 1/\sqrt{2}$. Построение следующих ортов производится индуктивно по схеме:

$$h_n(x) = g_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (g_n, e_k)\, e_k(x), \quad e_n(x) = h_n(x)/\|h_n\|.$$

Функции $g_n(x)$ являются линейными комбинациями ортов $e_k(x)$. Из этого факта и полноты степенной системы (см. п. 3.2) следует полнота о. н. с. функций $e_k(x)$. Следовательно, они составляют базис. Как известно, орты

$$e_n(x) = \sqrt{n + 1/2} \cdot L_n(x),$$

где полиномы Лежандра $L_n(x)$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$L_0(x) \equiv 1, \quad L_1(x) = x, \quad (n+1)\, L_{n+1}(x) = (2n+1)x\, L_n(x) - n\, L_{n-1}(x) \ \ (n \geq 1).$$

Любая кусочно-непрерывная функция $f(x)$, определенная при $|x| \leq 1$, разлагается в алгебраический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} (n + 1/2) \int_{-1}^{1} f(t)\, L_n(t)\, dt \cdot L_n(x).$$

A MODIFICATION OF PROOF FOR SOME THEOREMS IN THEORY OF SERIES AND IMPROPER INTEGRALS

S. N. Slughin, V. S. Krotova

The short proofs of some theorems for power series, improper integrals depending on parameters, and Fourier series are proposed.

Keywords: power series, improper integral with parameter, Fourier series, piecewise continuous function.