СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.2 + 378.14

ЖЕМЧУЖИНЫ, КОТОРЫЕ МЫ МОЖЕМ ПОТЕРЯТЬ*

В. И. Гаврилов[1], Г. Л. Луканкин[2], А. В. Субботин[1]

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия, 119992, г. Москва, Ленинские горы, 1; e-mail: gavrilov@mech.math.msu.su*

[2] *Московский областной государственный университет, Россия, г. Москва; e-mail: alukankin@mtu-net.ru*

В статье обсуждаются некоторые ключевые результаты из дифференциального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных, которые в современных университетских курсах математического анализа часто излагаются в упрощенных формулировках, несмотря на несложные исходные доказательства.

Ключевые слова: производная, частная производная, дифференцируемость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы утверждаем, что учебники по различным разделам высшей математики, написанные в XIX–XX вв. выдающимися учеными и педагогами, часто содержат изящный и глубокий по содержанию материал, который по непонятным нам причинам последующими (и современными) авторами либо не включался (и не включается) в свои учебные пособия по теме, либо представлен там в упрощенной форме, несмотря на несложные исходные доказательства. В предлагаемой публикации высказанное утверждение иллюстрируется примерами из математического анализа, связанными со свойством дифференцируемости функций одного и нескольких действительных переменных. Мы убеждены, что перечисление подобных примеров можно продолжить не только в математическом анализе, но и в других математических и близких им дисциплинах, и призываем вузовских и школьных педагогов включиться в такого рода деятельность. Мы предлагаем также редакции уважаемого нами журнала "Математика в высшем образовании" открыть отдельную рубрику для таких публикаций, озаглавив её, например, названием этой статьи.

2. О СВОЙСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. Эвристические рассмотрения, приводящие к понятию дифференцируемой функции

Для обоснования тезиса о том, что понятие дифференцируемой функции осознанно возникло у Галилея, рассмотрим прямолинейное движение

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ № НШ 680.2003.1

материальной точки, описываемое в обычной системе координат уравнением $s = f(t)$, где s — координата точки в момент времени t, отсчитываемого от какого-то выбранного начала. Согласно первому закону Ньютона (известному Галилею), если бы начиная с момента t_0 силы, приложенные к материальной точке, уравновесились, то далее она стала бы двигаться равномерно с некоторой скоростью v, называемой скоростью точки в момент t_0, и закон движения с момента t_0 характеризовался бы линейной функцией $f(t) = f(t_0) + v(t - t_0)$. Однако равнодействующая всех сил, приложенных в точке в данный момент, обычно отлична от нуля, и согласно представлениям классической механики, движение слагается тогда из двух составляющих: первая — указанное равномерное прямолинейное движение со скоростью v, достигнутой в момент t_0, и вторая — движение, которое вызвали бы приложенные силы, если бы точка в момент t_0 покоилась. Как показал Галилей, изучая свободное падение тел, если бы равнодействующая приложенных сил, начиная с момента t_0, оставалась постоянной (и направленной по той же прямой), то отклонение точки от достигнутого положения $f(t_0)$ было бы пропорционально этой равнодействующей и квадрату времени; т. е., имело бы вид $c_0(t - t_0)^2$ с коэффициентом c_0, пропорциональным равнодействующей. Таким образом, закон движения имел бы вид $f(t) = f(t_0) + v(t - t_0) + c_0(t - t_0)^2$.

Конечно, равнодействующая приложенных сил, как правило, непостоянна, но обычно она непрерывно зависит от времени. Поэтому для значений t, достаточно близких к t_0, значения пропорционального ей коэффициента c заключены в некотором промежутке (a, b). Под действием большей силы точка должна проходить больший путь, поэтому для указанных значений t выполняются неравенства

$$f(t_0) + v(t - t_0) + a(t - t_0)^2 < f(t) < f(t_0) + v(t - t_0) + b(t - t_0)^2,$$

откуда $f(t) = f(t_0) + v(t - t_0) + c(t)(t - t_0)^2$, $a < c(t) < b$. Полагая $\alpha(t) = c(t)(t - t_0)$, получим

$$f(t) = f(t_0) + v(t - t_0) + \alpha(t)(t - t_0), \tag{2.1}$$

где v — скорость движения в момент t, а $\alpha(t) \to 0$ при $t \to t_0$, как произведение ограниченной функции на бесконечно малую при $t \to t_0$, и функция $\alpha(t)$ непрерывна в точке t_0, поскольку $\alpha(t_0) = 0 = \lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t)$. Однако и без последнего свойства функции $\alpha(t)$ (и без остальных возможных её свойств) ясно, что формулой (2.1) однозначно определено значение v,

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\,, \tag{2.2}$$

так как предел функции в точке единственен.

Подобная ситуация встречается не только в механике, но и в самой математике, например, при рассмотрении задачи нахождения касательной к графику функции, что побуждает рассмотреть ситуацию в общем случае.

2.2. Дифференцируемость функции в точке

Определение 2.1. *Числовую функцию f (т. е., отображение из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$) называют дифференцируемой в точке x_0, если x_0 — неизолированная точка её области определения $D_f \subset \mathbf{R}$ и f представима для всех $x \in D_f$ в виде*

$$f(x) = f(x_0) + k_f(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \tag{2.3}$$

где k_f — некоторое число, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ по множеству D_f и бесконечно малая функция $\alpha(x)$ непрерывна в точке x_0; т. е., $\alpha(x_0) = 0$.

Замечание 2.1. Из условия неизолированности точки $x_0 \in D_f$ следует, что x_0 — предельная точка для D_f, и поэтому имеет смысл выражение $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ по множеству D_f.

Замечание 2.2. Чаще всего D_f — невырожденный промежуток в $\mathbf{R}$, так что все его точки неизолированные. Если x_0 — внутренняя точка множества D_f, то некоторая её окрестность $U(x_0)$ целиком лежит в D_f, и справедливость представления (2.3) в определении 2.1 достаточно требовать только в точках $x \in U(x_0)$ и тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 = \alpha(x_0)$.

Этот случай обычно и рассматривают в учебных пособиях по математическому анализу как типовой в изучении свойства дифференцируемости функции в точке (часто без предположения $\alpha(x_0) = 0$, к обсуждению необходимости которого мы еще вернемся ниже). Однако определение 2.1 корректно не только в этом частном случае, но и тогда, когда x_0 входит в D_f, например, вместе с какой-либо из своих односторонних окрестностей, и в общем случае, представленным определением 2.1. Действительно, справедливо простое

Утверждение 2.1. *Для любой дифференцируемой функции f (в смысле определения* 2.1) *число k_f в представлении* (2.3) *единственно.*

Доказательство. Если вместе с (2.3) справедливо

$$f(x) = f(x_0) + \bar{k}_f(x - x_0) + \overline{\alpha}(x)(x - x_0), \quad x \in D_f, \tag{2.3$'$}$$

в котором $\overline{\alpha}(x) \to 0$ при $x \to x_0$ по множеству D_f, то, объединяя (2.3) и (2.3$'$) и сокращая на $x - x_0$, получим $k_f + \alpha(x) = \bar{k}_f + \overline{\alpha}(x)$, $x \in D_f$, $x \neq x_0$, откуда после $x \to x_0$ по множеству D_f следует $k_f = \bar{k}_f$.

Простым следствием утверждения 2.1 служит наблюдение, что всякая дифференцируемая в точке функция обязана быть непрерывной в этой точке.

2.3. Производная

Рассмотрим произвольную числовую функцию f и пусть x_0 — неизолированная точка её области определения D_f. Тогда x_0 — предельная точка для D_f и для $D_f \setminus \{x_0\}$. Поскольку множество $D_f \setminus \{x_0\}$ служит областью определения функции $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ и x_0 — предельная точка для $D_f \setminus \{x_0\}$, то можно ставить вопрос о существовании предела разностного отношения $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ в точке x_0 по множеству $D_f \setminus \{x_0\}$.

Определение 2.2. *Если* x_0 *— внутренняя точка множества* D_f*, то число* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (*если оно существует*) *называют производной функции* f *в точке* x_0 *и обозначают* $f'(x_0)$.

Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{2.4}$$

при условии, что предел существует.

Таким образом, согласно формуле (2.2), *скорость прямолинейного движения есть производная перемещения как функции времени*. Часто полезно, по аналогии с этим, трактовать и производную функции f в точке x_0 как *скорость изменения функции в этой точке*.

Множество всех точек $x_0 \in D_f$, в которых существует $f'(x_0)$, служит областью определения новой функции, называемой производной функцией для f и обозначаемой f'. Таким образом, область определения $D_{f'}$ производной функции f' содержится в области определения D_f исходной функции f, и в каждой точке $x_0 \in D_{f'} \subset D_f$ функция f' принимает значение $f'(x_0)$, определяемое равенством (2.4).

2.4. Связь между дифференцируемостью и производной

Теорема 2.1. *Функция* f*, дифференцируемая во внутренней точке* $x_0 \in D_f$*, имеет в этой точке производную, и последняя равна коэффициенту* k_f *в представлении функции* f *по формуле* (2.3).

Доказательство. В силу формулы (2.3) с учетом замечания 2.2,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k_f + \alpha(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \overset{\circ}{U} \subset D_f \setminus \{x_0\},$$

где U — некоторая окрестность точки x_0, $\overset{\circ}{U} = U \setminus \{x_0\}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. На основании формулы (2.4) и свойства линейности предела заключаем, что $f'(x_0)$ существует и равна k_f.

Теорема 2.1 показывает, что функция f, дифференцируемая во внутренней точке x_0 своей области определения, представима в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0), \quad x \in U, \tag{2.5}$$

где U — некоторая окрестность точки x_0, $U \subset D_f$, и $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 = \alpha(x_0)$.

Теорема 2.1′. *Функция* f*, имеющая производную в точке* x_0*, дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. По условию x_0 — внутренняя точка множества D_f и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. По теореме о представлении функции, имеющей предел в точке,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \alpha_0(x), \tag{2.6}$$

где $D_{\alpha_0} = D_f \setminus \{x_0\}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha_0(x) = 0$.

Положим

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_0(x) & \text{для всех } \ x \in D_f \setminus \{x_0\}, \\ 0 & \text{при } \ x = x_0. \end{cases}$$

Тогда также $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $0 = \alpha(x_0)$. Поэтому, по формуле (2.6) для всех $x \in D_f$ справедлива формула (2.5) и, тем самым, f дифференцируема в точке x_0 (с коэффициентом $k_f = f'(x_0)$).

На основании теорем 2.1 и 2.1$'$ заключаем, что для произвольной фиксированной точки x_0 множество функций, для которых x_0 есть внутренняя точка их областей определения и которые дифференцируемы в точке x_0, совпадает с множеством функций, имеющих производную в точке x_0. Для этого общего множества принято обозначение $D(x_0)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2.2. *Функция $f \in D(x_0)$ в том и только в том случае, когда f представима формулой* (2.5).

Другим следствием теорем 2.1 и 2.1$'$ служит важное замечание, что дифференцируемость функции в точке — свойство *локальное*. А именно: какова бы ни была окрестность U точки x_0, функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемо сужение f на множество $D_f \cap U$.

Авторы считают также важным отметить для студентов, что функция $g(x)=x^2 D(x)$ (где $D(x)$ — известная функция Дирихле, ограниченная и разрывная всюду на $\mathbf{R}$) непрерывна и дифференцируема только в точке $x_0=0$.

2.5. Свойства дифференцируемых функций

Отмеченную в пункте 2.4 теорему 2.2 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 2.2$'$. *Функция $f \in D(x_0)$ тогда и только тогда, когда $f(x) - f(x_0) = k_f(x)(x - x_0)$, $x \in D_f$, функция $k_f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $k_f(x_0) = f'(x_0)$.*

Опираясь на последний результат, несложно доказать свойство линейности операции дифференцирования, вычислить производные произведения и частного функций, вычислить производные сложных функций и обратных функций. На последних двух остановимся подробнее.

Теорема 2.3. *Если функция $f \in D(x_0)$ и функция $g \in D(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, то их композиция $(g \circ f) \in D(x_0)$ и $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2$'$, существуют окрестности U точки x_0 и V точки $y_0 = f(x_0)$, в которых справедливы формулы $f(x) = f(x_0) + k_f(x)(x - x_0)$, $x \in U$, и $g(y) = g(y_0) + k_g(y)(y - y_0)$, $y \in V$, где функция k_f непрерывна в точке x_0 и $k_f(x_0) = f'(x_0)$, а функция k_g непрерывна в точке y_0 и $k_g(y_0) = g'(y_0)$. Так как функция f непрерывна в точке x_0, внутренней для D_f, окрестности U и V можно выбрать такими, чтобы значения $y = f(x) \in V$ для всех $x \in U$. Тогда

$$\begin{aligned} g\Big(f(x)\Big) &= g\Big(f(x_0)\Big) + k_g\Big(f(x)\Big)\Big(f(x) - f(x_0)\Big) = \\ &= g\Big(f(x_0)\Big) + k(x)(x - x_0), \quad x \in U, \end{aligned} \tag{7}$$

где $k(x) = k_g\Big(f(x)\Big)k_f(x)$, $x \in U$. Функция $k_g\Big(f(x)\Big)$ непрерывна в точке x_0 как композиция непрерывных функций, а функция $k(x)$ непрерывна в точке x_0 как произведение непрерывных функций. Поэтому, согласно формуле (2.7) и теореме 2.2$'$, функция $(g \circ f)(x)$ дифференцируема в точке x_0 и её производная $(g \circ f)'(x_0) = k(x_0) = k_g\Big(f(x_0)\Big)k_f(x_0) = k_g(y_0)\, f'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0)$.

Теорема 2.4. *Если функция $f \in D(x_0)$ и $f'(x_0) \neq 0$, а обратная функция f^{-1} определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и непрерывна в этой точке, то функция $f^{-1} \in D(y_0)$ и $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2$'$, в некоторой окрестности U точки x_0 справедлива формула $f(x) = f(x_0) + k_f(x)(x - x_0)$, $x \in U \subset D_f$, в которой функция $k_f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $k_f(x_0) = f'(x_0)$. По теореме о сохранении знака непрерывной функции, значения $k_f(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0, которую, не ограничивая общности, можно считать совпадающей с U. Поэтому

$$x - x_0 = \frac{1}{k_f(x)}\,[f(x) - f(x_0)] \quad \text{для всех} \quad x \in U \subset D_f. \tag{2.8}$$

По условию существования функции f^{-1} в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и её непрерывности в y_0, выбираем такую её окрестность V, прообраз $f^{-1}(V)$ которой содержится в U. Поскольку пересечение двух окрестностей точки является окрестностью этой точки, будем считать, что V совпадает с той окрестностью точки $y_0 = f(x_0)$, в которой определена функция $f^{-1} = g$. Тогда (2.8) примет вид

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{k_f\Big(g(y)\Big)}\,(y - y_0), \quad y \in V \subset D_g. \tag{2.9}$$

Сложная функция $k_f\Big(g(y)\Big) \neq 0$, $y \in V \subset D_g$, непрерывна в точке y_0 (поскольку, по условию теоремы, функция $g = f^{-1}$ непрерывна в точке y_0), и, следовательно, согласно (2.9) и теореме 2.2$'$, функция $g = f^{-1}$ дифференцируема в точке y_0 и её производная

$$(f^{-1})'(y_0) = g'(y_0) = \frac{1}{k_f\Big(g(y_0)\Big)} = \frac{1}{k_f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Мы заканчиваем этот параграф замечанием, что приведенные выше доказательства теорем 2.3 и 2.4 возможны только при предположении о непрерывности функции $\alpha(x)$ в определении 2.1 дифференцируемой функции. Поэтому отсутствие этого предположения в определении 2.1 и появление его в доказательствах теорем 2.3 и 2.4 представляется нам логической ошибкой.

Отметим также, что определение 2.1 и равносильные ему теоремы 2.2 и 2.2$'$ инициированы учебником [2] и использованы в [3] и [4].

3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Символом $\mathbf{R}^m$, $m \geq 1$, принято обозначать m-мерное вещественное евклидово пространство. Отображение f из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}$ называют функцией нескольких (m) действительных переменных. Значение такой функции f в точке $(x_1, \ldots, x_m)$ своей области определения D_f (лежащей в $\mathbf{R}^m$) обозначают $f(x_1, \ldots, x_m)$, а $x_1, \ldots, x_m$ называют аргументами функции f. Принято часто точки из $\mathbf{R}^m$ обозначать одной буквой: в аналитических рассмотрениях строчной $x = (x_1, \ldots, x_m)$; в геометрических — прописной, скажем M, или с указанием координат $M(x_1, \ldots, x_m)$. Поэтому и значения функции f в точках D_f обозначают $f(M) = f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$. При $m = 1, 2, 3$ нумерация аргументов функции не применяется: для $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ стандартна запись аргумента функции одной буквой; для $\mathbf{R}^2$ — запись вида $f(x, y)$; для $\mathbf{R}^3$ — вида $f(x, y, z)$.

3.1. Частные производные

Рассмотрим отображение f из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}$, область определения D_f которого служит окрестностью каждой своей точки (D_f — открытое множество в $\mathbf{R}^m$). Зафиксируем точку $x \in D_f$. Разность между произвольным значением $x' \in D_f$ и x называют (полным) приращением аргумента x функции f и обычно обозначают Δx. Таким образом, $\Delta x = x' - x$, $x' = x + \Delta x$. Здесь Δx — вектор размерности m, и если $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $x' = (x'_1, \ldots, x'_m)$, то $\Delta x = (x'_1 - x_1, \ldots, x'_m - x_m) = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) = \sum\limits_{k=1}^{m} \Delta x_k e^k$, где e^k — векторы стандартного базиса в $\mathbf{R}^m$.

Рассматривают также случай, когда действительно изменяется лишь одна из координат вектора x, скажем k-я. Это выражается в том, что $\Delta x = \Delta x_k e^k = (0, \ldots, \Delta x_k, 0, \ldots, 0)$, где Δx_k стоит на k-ом месте, все же остальные координаты — нули.

Разность $\Delta f(x) = f(x') - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ называют (полным) приращением функции f в точке x, а разность $\Delta_k f(x) = f(x + \Delta x_k e^k) - f(x)$ — частным приращением функции f в точке x по k-му аргументу x_k, $k = \overline{1, m}$.

Определение 3.1. *Частной производной функции f от m действительных переменных по k-й переменной* (“*по x_k*”) *называют функцию — будем её обозначать $\partial_k f$, — задаваемую следующими условиями:* а) *областью её определения служит множество тех точек D_f, в которых отношение $\dfrac{f(x + \Delta x_k e^k) - f(x)}{\Delta x_k}$ имеет предел при $\Delta x_k \to 0$;* б) *в каждой такой точке значение $\partial_k f$ равно этому пределу:*

$$(\partial_k f)(x) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x + \Delta x_k e^k) - f(x)}{\Delta x_k}\,. \qquad (3.1)$$

В координатной форме формула (3.1) имеет вид

$$(\partial_k f)(x) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{\Delta x_k}.$$

Таким образом, например, для функций f двух переменных

$$\partial_1 f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \quad \partial_2 f(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

(h и k — стандартные обозначения для приращения первого и второго аргументов функции двух переменных, наряду с Δx и Δy).

Для обычно $\partial_k f$ употребляют классические обозначения f'_{x_k} или $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ $\left(\text{для функции } f(x,y) \text{ употребительны обозначения } f'_x,\ f'_y \text{ или } \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

3.2. Понятие дифференцируемой функции нескольких переменных

Определение 3.2. *Говорят, что функция f из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}$ дифференцируема в точке x, если D_f — окрестность точки x, и (полное) приращение функции f в этой точке представимо в виде*

$$f(x+\Delta x) - f(x) = l(\Delta x) + \alpha(\Delta x)\,\|\Delta x\|_m, \tag{3.2}$$

где l — линейная функция на $\mathbf{R}^m$, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\alpha(0) = 0$, и $\|\cdot\|_m$ обозначает любую норму на $\mathbf{R}^m$, эквивалентную евклидовой норме на $\mathbf{R}^m$.

В координатной форме линейная функция l задается на $\mathbf{R}^m$ в виде $l(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} l_k x_k$, где l_k, $k = \overline{1,m}$ — некоторые действительные числа, а точка $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ — произвольная.

Стандартным образом проверяется, что представление (3.2) в определении 3.2 эквивалентно представлению

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^{m} l_k \Delta x_k + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(\Delta x)\,\Delta x_k, \tag{3.3}$$

в котором все функции $\alpha_k(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\alpha_k(0) = 0$ для $k = \overline{1,m}$.

На основании (3.3) заключаем, что функция f из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}$, дифференцируемая в точке x, имеет в этой точке частные производные по всем аргументам и $\partial_k f(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) = l_k$, $k = \overline{1,m}$. Поэтому представления (3.2) и (3.3) принимают вид

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\,\Delta x_k + \alpha(\Delta x)\,\|\Delta x\|_m \tag{3.2'}$$

и

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\,\Delta x_k + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(\Delta x)\,\Delta x_k, \tag{3.3'}$$

где все функции $\alpha(\Delta x)$ и $\alpha_k(\Delta x)$, $k = \overline{1,m}$, как функции от m переменных $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) = \Delta x$, бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и непрерывны в точке $\Delta x = 0$.

3.3. Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных

Теорема 3.1. *Функция $f(x,y)$ будет дифференцируемой в точке $M(x,y)$, если f'_y определена и конечна в точке M, а f'_x определена в окрестности U этой точки и непрерывна в самой точке M (функции f'_x и f'_y можно в этой формулировке поменять местами).*

Доказательство. Представим разность $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ в виде суммы двух разностей

$$\Delta f = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] \qquad (3.4)$$

(здесь точки $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ и $(x, y+\Delta y)$ принадлежат U).

Так как $f'_y(x,y)$ существует и конечна, то

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = f'_y(x,y)\,\Delta y + \alpha_2(\Delta y)\,\Delta y, \qquad (3.5)$$

где $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \alpha_2(\Delta y) = 0$ и функцию $\alpha_2(\Delta y)$, определенную первоначально для $\Delta y \neq 0$, можно доопределить значением $\alpha_2(0) = 0$, и считать поэтому непрерывной функцией в точке $\Delta y = 0$, а следовательно, и бесконечно малой функцией при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, непрерывной в точке $(0,0)$.

Далее, по формуле конечных приращений, имеем

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y), \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда, в силу непрерывности функции f'_x в точке (x,y), находим

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f'_x(x,y)\Delta x + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x, \qquad (3.6)$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha_1(\Delta x, \Delta y) = 0$ и $\alpha_1(0,0) = 0$.

Подставляя выражения (3.5) и (3.6) в (3.4), получим представление

$$\Delta f = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

для всех $(\Delta x, \Delta y)$ из некоторой окрестности точки $(0,0)$, которое указывает на свойство дифференцируемости функции $f(x,y)$ в точке (x,y).

Замечание 3.1. В современных вузовских учебных пособиях по математическому анализу принято проверять наличие свойства дифференцируемости функции $f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ при условии существования обеих функций f'_x и f'_y в окрестности этой точки и непрерывности каждой из них в самой точке M. При этом с разностью в левой части (3.5) поступают так же, как было сделано выше в доказательстве с разностью в левой части (3.6). В таком предположении утверждение теоремы получают и для функций любого конечного числа переменных.

3.4. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных

Рассмотрим частные приращения $\Delta_1 f = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ и $\Delta_2 f = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ функции $f(x,y)$ в точке (x,y) по x и по y, соответственно. Если дать функции $f(x,y)$ последовательно приращения по x и по y, то она перейдет в $(1+\Delta_1)f$, а затем в $(1+\Delta_2)(1+\Delta_1)f = (1+\Delta)f$, где $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ — полное приращение функции $f(x,y)$ в точке (x,y). Поэтому

$$\Delta f = \Delta_1 f + \Delta_2 f + \Delta_2\Delta_1 f. \tag{3.7}$$

Но если функция $f(x,y)$ дифференцируема, её частные производные существуют и конечны, а потому

$$\Delta_1 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_1\right)\Delta x, \quad \Delta_2 f = \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_2\right)\Delta y, \tag{3.8}$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_1 = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_2 = 0$ и можно считать, что $\alpha_1(0,0) = \alpha_2(0,0) = 0$.

Итак, на основании (3.7) и (3.8) и определения 3.1 доказана следующая

Теорема 3.2. *Для того, чтобы функция $f(x,y)$ была дифференцируемой в точке $M(x,y)$, в которой существуют обе её частные производные, необходимо и достаточно, чтобы вторая разность $\Delta^2 f = \Delta_2\Delta_1 f$ была бесконечно малой функцией по отношению к $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ при $\rho \to 0$.*

Замечание 3.2. Отметим, что $\Delta^2 f = \Delta_2\Delta_1 f = \Delta_1\Delta_2 f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x,y)$.

Замечание 3.3. Конечно, утверждение теоремы 3.2 представляет скорее теоретический интерес, поскольку проверка её условий для конкретных функций может быть весьма громоздкой и сложной.

3.5. Равенство смешанных производных второго порядка для функций двух переменных

Обычно здесь доказывают два результата.

Теорема 3.3 (W. H. Young). *Если у функции $f(x,y)$ обе частные производные f'_x и f'_y определены в окрестности точки (x,y) и дифференцируемы в этой точке, то имеем в этой точке $f''_{xy} = f''_{yx}$.*

Стандартное доказательство этой теоремы основано на изучении второй разности $\Delta^2 f = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$.

Другую теорему, принадлежащую Шварцу, обычно формулируют и доказывают с излишним условием существования обеих производных f''_{xy} и f''_{yx} в окрестности точки (x,y) и непрерывности каждой из них в самой точке (x,y). На самом же деле достаточно предполагать существование и непрерывность одной из смешанных производных.

Теорема 3.4 (H. A. Schwartz). *Если в окрестности точки (x,y) функция $f(x,y)$ обладает частными производными f'_x, f'_y и f''_{xy}, причем f''_{xy} непрерывна в точке (x,y), то другая смешанная производная f''_{yx} существует в этой точке и совпадает с f''_{xy}.*

Доказательство. По условию существует такое число $\delta_0 > 0$, что функции f, f'_x, f'_y и f''_{xy} определены для всех $(x+h, y+k)$, $|h| < \delta_0$, $|k| < \delta_0$. Положим $\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y)$. Тогда, применяя дважды формулу конечных приращений, для всех $|h| < \delta_0$ и $|k| < \delta_0$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x+h) - \varphi(x) &= h\varphi'(x+\theta_1 h) = h[f'_x(x+\theta_1 h, y+k) - f'_x(x+\theta_1 h, y)] = \\ &= hkf''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k), \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $0 < \theta_1 < 1$ и $0 < \theta_2 < 1$.

Вторая частная производная в правой части (3.10) по предположению непрерывна в точке (x, y), и, следовательно, $f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k) = f''_{xy}(x, y) + \alpha(h, k)$, где $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \alpha(h, k) = 0 = \alpha(0, 0)$. Поэтому для всех $0 < |h| < \delta_0$ и $0 < |k| < \delta_0$, на основании (3.10), имеем

$$\frac{1}{h}\left[\frac{\varphi(x+h)}{k} - \frac{\varphi(x)}{k}\right] - f''_{xy}(x, y) = \alpha(h, k). \tag{3.11}$$

Рассмотрим теперь произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем число $\delta > 0$ таким, чтобы $0 < \delta \le \delta_0$ и $|\alpha(h, k)| < \varepsilon$ для всех $0 < |h| < \delta$ и $0 < |k| < \delta$. Тогда на основании (3.11) имеем оценку

$$\left|\frac{1}{h}\left[\frac{\varphi(x+h)}{k} - \frac{\varphi(x)}{k}\right] - f''_{xy}(x, y)\right| < \varepsilon \tag{3.12}$$

для всех $0 < |h| < \delta$ и $0 < |k| < \delta$.

Так как, по определению, $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{\varphi(x)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = f'_y(x, y)$ и $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{\varphi(x+h)}{k} = f'_y(x+h, k)$, то, переходя в обеих частях неравенства (3.12) к пределу при $k \to 0$, получим неравенство

$$\left|\frac{f'(x+h, y) - f'(x, y)}{h} - f''_{xy}(x, y)\right| \le \varepsilon,$$

справедливое для всех $0 < |h| < \delta$. Последнее означает, что существует

$$f''_{yx}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y)}{h} = f''_{xy}(x, y).$$

Изложение материала п.п. 3.3–3.5 взято из учебника [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Валле-Пуссен де ля Ш. Ж. Курс анализа бесконечно малых. Т. 1. — М.-Л.: ГТТИ, 1933. 460 с.
2. Грауэрт Г., Либ Н., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Мир, 1971. 680 с.
3. Райков Д. А. Одномерный математический анализ. — М.: Высшая школа, 1982. 415 с.
4. Gavrilov V. I., Pavićević Ž. Matematička Analiza I. Podgorica, PMF “Unirex”, 1994. 531 p.

RICHNESS OF MATHEMATICS THAT MAY BE LOST

V. I. Gavrilov, G. L. Lukankin, A. V. Subbotin

The authors discuss several basic results on the differentiability of real functions of one and several variables that are often represented in simplified forms in the modern university textbooks on the calculus, although the original proofs are not so complicated.

Keywords: derivative, partial derivative, differentiability.