

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СПЕЦИАЛИСТОВ РАЗЛИЧНОГО ПРОФИЛЯ

УДК 51:1

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ: ФИЛОСОФИЯ
ПРЕПОДАВАНИЯ

В. А. Успенский

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119899, ГСП-2, г. Москва, Воробьёвы горы;
e-mail: uspensky@mcsme.ru*

Статья представляет собою отредактированный текст доклада, сделанного 6 июля 2004 г. на X Международном конгрессе по математическому образованию (Копенгаген, 4–11 июля 2004 г.); доклад состоялся в рамках Российской национальной презентации. Излагаются некоторые принципы, на которых, по мнению автора, должно быть основано преподавание математики студентам гуманитарных специальностей. Эти принципы выработаны на основе многолетнего личного опыта автора.

Ключевые слова: математика в вузе, математика для гуманитариев.

1. Никто не знает, сохранят ли грядущие века и тысячелетия сегодняшнее деление наук на естественные и гуманитарные. Но даже и сегодня безоговорочное отнесение математики к естественным наукам вызывает серьёзные возражения. Естественнаучная, прежде всего физическая, составляющая математики очевидна, и нередко приходится слышать, что математика — это часть физики. Однако не менее очевидна и логическая, приближающаяся к философской, составляющая математики. Тем не менее восприятие математики нередко вызывает отторжение у людей, гуманитарно ориентированных. Неуклюжее (и по содержанию, и по форме) преподавание математики в средней школе немало тому способствует.

Лет сорок назад было модно подчёркивать разницу между так называемыми “физиками” (к коим относили и математиков) и так называемыми “лириками” (к коим относили всех гуманитариев). Терминология эта вошла тогда в моду с лёгкой руки поэта Бориса Слуцкого, провозгласившего в 1959 г. в стихотворении “Физики и лирики”: “Что-то физики в почёте, / Что-то лирики в загоне. / Дело не в сухом расчёте, / Дело в мировом законе”.

Однако само противопоставление условных “физиков” условным “лирикам” вовсе не было вечным. По преданию, на воротах знаменитой Академии Платона была надпись: “Негеометр (То есть нематематик. — В. У.) да не войдёт сюда!”. С другой стороны, самое математику можно называть младшей сестрой гуманитарной дисциплины, а именно юриспруденции: ведь именно в юридической практике Древней Греции, в дебатах в народных собраниях впервые возникло и далее шлифовалось понятие доказательства.

Можно ли уничтожить и нужно ли уничтожать ставшие, увы, традиционными (хотя, как видим, и не столь древние!) границы между гуманитарными, естественными и математическими науками — об этом я не берусь судить. Но вот разрушить барьеры между представителями этих наук,

между “лириками” и “физиками”, между гуманитариями и математиками — это представляется и привлекательным, и осуществимым. Особенно благородная цель — уничтожить этот барьер внутри отдельно взятой личности, то есть превратить гуманитария отчасти в математика, а математика — отчасти в гуманитария. Обсуждая эту цель, полезно вспомнить некоторые факты из истории российской науки. Эти факты связаны — в обратном хронологическом порядке — с именами Колмогорова, Барсова и Ададурова (в другом написании — Адодурова).

2. Первой научной работой великого математика Андрея Николаевича Колмогорова (1903–1987) была работа вовсе не по математике, а по истории. В начале 20-х годов XX в., семнадцатилетним студентом математического отделения Московского университета, он доложил эту работу на семинаре известного московского историка Сергея Владимировича Бахрушина. Опубликованное посмертно, исследование Колмогорова было чрезвычайно высоко оценено специалистами — в частности, руководителем Новгородской археологической экспедиции академиком Валентином Лаврентьевичем Яниным. Ему и предоставим слово (цитата взята из его предисловия к книге: А. Н. Колмогоров. Новгородское землевладение XV века. — М.: Физматлит, 1994):

Андрей Николаевич сам неоднократно рассказывал своим ученикам о конце своей “карьеры историка”. Когда работа была доложена им в семинаре, руководитель семинара профессор С. В. Бахрушин, одобрив результаты, заметил, однако, что выводы молодого исследователя не могут претендовать на окончательность, так как “в исторической науке каждый вывод должен быть снабжён несколькими доказательствами”(!). Впоследствии, рассказывая об этом, Андрей Николаевич добавлял: “И я решил уйти в науку, в которой для окончательного вывода достаточно одного доказательства”. История потеряла гениального исследователя, математика приобрела его.

26 апреля (по старому стилю, а по новому стилю тогда было 7 мая) 1755 г. состоялось торжественное открытие Московского университета. После молебна были произнесены четыре речи. Первая из них — и притом единственная, сказанная на русском языке, — называлась “О пользе учреждения Московского университета”. Говорил её Антон Алексеевич Барсов (1730–1791). Неудивительно, что в 1761 г. он был назначен профессором (в современных терминах — заведующим кафедрой) на кафедру красноречия; вступление в эту должность ознаменовалось его публичной лекцией “О употреблении красноречия в Российской империи”, произнесённой 31 января (11 февраля) 1761 г. Чем же занимался Барсов до того? Преподавал математику — именно с Барсова, в феврале 1755 г. специально для этой цели переведённого из Петербурга в Москву, и началось преподавание математики в Московском университете! Впоследствии Барсов прославился трудами по русской грамматике; ему же принадлежит и ряд предложений по русской орфографии, тогда отвергнутых и принятых лишь в XX веке.

Ещё раньше, в 1727 г., знаменитый математик Даниил Бернулли, работавший в то время в Петербургской академии наук, обратил внимание на студента этой академии Василия Евдокимовича Ададурова (1709–1780). В

письме к известному математику Христиану Гольдбаху от 28 мая 1728 г. Бернулли отмечает значительные математические способности Ададурова и сообщает о сделанном тем открытии: сумма кубов последовательных натуральных чисел равна квадрату суммы их первых степеней: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$. Математические заслуги Ададурова засвидетельствованы включением его в биографический раздел однотомного «Математического энциклопедического словаря» (М.: Советская энциклопедия, 1988). А из статьи «Ададуров» в первом томе другого словаря, «Нового энциклопедического словаря» Брокгауза и Ефрона, мы узнаём, что Ададуровым написано несколько сочинений по русскому языку и, более того, что «в 1744 г. ему было поручено преподавать русский язык принцессе Софии, т. е. будущей императрице Екатерине II». Последующие изыскания показали, что Ададуров является автором первой русской грамматики на русском же языке, составление каковой было большим событием: появление первой грамматики какого-либо языка, изложенной на родном языке, представляет собою важный этап в познании этого языка, сравнимый с осознанием того, что кажущаяся пустота вокруг нас заполнена воздухом. (Кстати, с 1762 г. по 1778 г. Ададуров был куратором Московского университета — вторым после И. И. Шувалова.)

Итак, даже если согласиться с традиционной классификацией наук, отсюда ещё не следует с неизбежностью аналогичная классификация учёных или учащихся. Приведённые факты показывают, что математик и гуманитарий способны уживаться в одном лице.

Здесь предвидятся два возражения. Прежде всего нам справедливо укажут, что Ададуров, Барсов, Колмогоров были выдающимися личностями, в то время как философия преподавания должна быть рассчитана на массового потребителя обучения. На это мы ответим, что образцом для подражания — даже массового подражания — как раз и должны быть выдающиеся личности и что примеры Ададурова, Барсова, Колмогорова призваны вдохновлять как обучающихся, так и обучающихся. Далее нам укажут, опять-таки справедливо, что отнюдь не всем гуманитариям и отнюдь не всем математикам суждено заниматься научной работой, это и невозможно и недолжно. Ну что ж, ответим мы, примеры из жизни больших учёных выбраны просто потому, что история нам их сохранила, но возможность и цель сочетания в одном лице математического и гуманитарного подхода к окружающему миру сохраняют привлекательность не только для научных работников, но и для тех гуманитариев (да и математиков тоже), кто не собирается посвятить себя высокой науке.

3. По всеобщему признанию, литература и искусство являются частью человеческой культуры. Ценность же математики, как правило, видят в её практических приложениях. Но наличие практических приложений не должно препятствовать тому, чтобы и математика рассматривалась как часть человеческой культуры. Да и сами эти приложения, если брать древнейшие из них — такие как, скажем, использование египетского треугольника (т. е. треугольника со сторонами 3, 4, 5) для построения прямого угла, — также принадлежат общекультурной сокровищнице человечества. (Кому, чьей сокровищнице принадлежит шестигранная форма пчелиных сот, обеспечиваю-

пчая максимальную вместимость камеры при минимальном расходе воска на строительство стен, — этот вопрос мы оставим читателю для размышления.) Каждый образованный человек должен иметь ясное представление о производном числе как о мгновенной скорости и об определённом интеграле как о площади. Весьма полезно знать и о знаменитых математических проблемах (разумеется, тех из них, которые имеют общедоступные формулировки) — решённых (проблема Ферма, проблема четырёх красок), ждущих решения (проблема близнецов) и тех, у которых решения заведомо отсутствуют (из числа задач на геометрическое построение и простейших задач на отыскание алгоритмов). Всё это, ломая традиционный стереотип математики как сухой цифири, создаёт её образ как живой области знания, причём живой в двух смыслах: 1) связанной с жизнью; 2) развивающейся, т. е. продолжающей жить. Любому любознательному человеку такая область знания должна быть интересна.

Вообще, образованность предполагает ведь знакомство не только с тем, что непосредственно используется в профессиональной деятельности, но и с человеческой культурой как таковой, чьей неотъемлемой частью — повторим это ещё раз — является математика.

4. Однако образование состоит не только в расширении круга знаний. Не в меньшей степени оно состоит в расширении навыков мышления. Математик и гуманитарий обладают различными стилями мышления, и ознакомление с иным стилем обогащает и того, и другого. Скажем, изучение широко распространённого в математике аксиоматического метода, при котором в рассуждениях допускается использовать только ту информацию, которая явно записана в аксиомах, прививает студентам привычку к строгому мышлению. А знакомство со свойствами бесконечных множеств развивает воображение.

Поучительно сравнить между собой методы рассуждений, применяемые в математических и в гуманитарных науках. На самом деле, речь идёт здесь о двух типах мышления, и человеку полезно быть знакомым с каждым из них. Автор не берётся (потому что не умеет) описать эти типы, но попытается проиллюстрировать на двух примерах своё видение их различия.

Пример первый. Все знают, что такое вода, — это вещество с формулой H_2O . Но тогда то, что мы все пьём — это не вода. Разумеется, в повседневной речи и математик, и гуманитарий и то, и то называет водою, но в своих теоретических рассуждениях первый как бы тяготеет к тому, чтобы называть водою лишь H_2O , а второй — всё, что имеет вид воды. Потому что математик изучает идеальные объекты, имеющие такой же статус, как, скажем, круги и треугольники, которых ведь нет в реальной природе; гуманитарий же изучает предметы более реалистические. Боюсь, впрочем, что этот пример слишком умозрителен и способен отчасти запутать читателя. Вот другой, уже не умозрительный, а взятый из жизни пример. Имеется строгое (кстати, в наиболее отчётливой форме сформулированное Колмогоровым) определение того, что такое ямб. Если в стихотворении встречается отклонение от этого определения, то с точки зрения математика это уже не ямб. Однако для многих филологов стихотворение, содержащее не слишком

много нарушений указанного определения, не перестаёт быть ямбическим — в то время как математик назовёт его всего лишь похожим на ямб, ямбоподобным.

Было бы замечательно, если бы математик был способен понимать точку зрения гуманитария, а гуманитарий — точку зрения математика. И то, и другое трудно. Ещё труднее не требовать признания одной из них единственно правильной.

Понимание математиком способов мышления гуманитариев важно не только в общефилософском, но и в совершенно практическом аспекте, если иметь в виду интересы преподавания. Чтобы такое преподавание было успешным, преподаватель-математик должен понимать, как предмет воспринимается его учениками-гуманитариями. Вот простой пример. Будет ли рефлексивным отношение “жить неподалёку”? Для студентов-математиков очевидно, что будет: каждый человек живёт неподалёку от самого себя. Студенты же гуманитарии в большинстве своём расценивают высказывание “имярек живёт неподалёку от себя” либо как ложное, либо как бессмысленное.

В статье “Гуманитарная математика” [1] Н. Х. Розов справедливо призывает математиков не только тянуть гуманитариев в свою сторону, но и сделать шаг им навстречу. Он предлагает “осознать необходимость уважать и учитывать психологические особенности гуманитариев”. Этот призыв перекликается со следующими словами А. Н. Колмогорова: “. . . Учитель (для конкретности — преподаватель математики) находится в том же положении, как учёный, приходящий **со своей проблематикой** в уже существующий вычислительный центр с определённым набором вычислительных машин, запасом заготовленных (с другими целями!) программ, даже со штатом программистов. Задача его состоит в том, чтобы обучить этот сложный механизм выполнить новую работу, используя все свои уже заготовленные заранее механизмы, программы, навыки” [2].

5. Настоящее сообщение основано на личном опыте автора, вот уже более сорока лет преподающего математику тем студентам филологического факультета Московского университета, которые обучаются на ОТИПЛ’е, то есть на Отделении теоретической и прикладной лингвистики. (Какое-то время это отделение называлось ОСИПЛ’ом — Отделением структурной и прикладной лингвистики.) Автор был также одним из организаторов Первой Московской олимпиады школьников по языковедению и математике, состоявшейся в начале 1965 г., и учредителем традиции регулярного проведения таких олимпиад; с тех пор — с небольшим перерывом — такие олимпиады проводятся в Москве ежегодно, и в конце 2004 г. состоялась 35-я традиционная олимпиада, собравшая 450 участников.

Соединение в названии олимпиад языковедения и математики имело целью подчеркнуть глубокое внутреннее единство этих дисциплин. В самом деле, ряд положений языковедения может быть изложен с математической точностью. (А, скажем, для литературоведения подобный тезис справедлив разве что в применении к стиховедению.) В то же время именно на уроках математики учащиеся могли бы приучаться правильно выражать свои мысли

на своём родном языке. Уроки языка и уроки литературы на родном языке проводятся, как правило, одним и тем же учителем; на наш взгляд, было бы полезнее отделить лингвистику от литературы и объединить её с математикой — с тем, чтобы один и тот же учитель преподавал и математику, и родной язык.

Высказанное суждение о целесообразности соединения в одном учительском лице преподавания математики и языка принадлежит тому разделу философии преподавания, который занимается преподаванием детям, а именно учащимся средней школы.

Если же говорить о прямом обучении математике будущих языковедов, обучении в университетских аудиториях, то следует сказать, что ряд видных российских языковедов среднего поколения являются выпускниками ОТИПЛ'а — а, значит, они в течение всех пяти курсов обучались математике. Кстати, нынешний глава ОТИПЛ'а профессор А. Е. Кибрик в 60-е годы, уже будучи — после окончания им отделения классической филологии — преподавателем университета, прослушал вместе со студентами ОТИПЛ'а первого набора полный пятилетний курс математики. На мой субъективный взгляд именно выпускники отделения теоретической и прикладной лингвистики составляют, наряду с признанными мэтрами старшего поколения, цвет отечественного языкознания. А вот и более объективная экспертная характеристика: мне неоднократно приходилось слышать, что выпускники названного отделения, как правило, работают в области русистики, романистики, германистики и т. д. более успешно, чем студенты, окончившие университет по специальностям “Русистик”, “Романистик”, “Германистик” и т. д.

Сказанное может служить иллюстрацией к известному тезису: как правило, человек, обучавшийся математике, выполняет свою работу лучше, чем человек, математике не обучавшийся.

6. Обсуждая вопрос о преподавании кому-либо чего-либо, следует начать с указания целей этого преподавания. Среди таких целей выделяются две:

- 1) дать *образование*;
- 2) подготовить к *профессии*.

Об *образовательной* цели преподавания уже было сказано выше. Сейчас мы рассмотрим вторую из названных целей.

Подготовка к *профессии* предполагает, прежде всего, сообщение определённых знаний. В своей лекции, прочитанной в Московском университете 19 октября 1960 г. и задуманной в качестве первой лекции несостоявшегося цикла “Некоторые вопросы математической лингвистики”, А. Н. Колмогоров так ответил на им же поставленный вопрос, какая математика нужна лингвистам. Во-первых, сказал он, то́, что́ нужно для акустики; во-вторых, математическая логика; в-третьих, теория вероятностей, статистика, теория информации. А за год и пять месяцев до указанной лекции, 19 февраля 1959 г., на совещании у ректора Московского университета (им был тогда И. Г. Петровский) Колмогоров решительно поддержал моё предложение о преподавании математики *всем* студентам-лингвистам, а не только тем, кто обучается на специализированном отделении. К сожалению, поддержки Колмогорова оказалось недостаточно, и математика в Московском универ-

ситете преподаётся не всем лингвистам, а лишь некоторой выделенной их части — а именно, студентам знаменитого ОТИП.Л'а, то есть отделения теоретической и прикладной лингвистики филологического факультета. Учебный план названного отделения составлен под значительным влиянием идей Колмогорова: в частности, преподавание математического анализа происходит потому, что основы математического анализа нужны для акустики и для теории вероятностей; а математическая логика понимается в широком смысле, включающем в себя теорию алгоритмов, то есть общую теорию вычислимости.

В качестве иллюстрации к сказанному приведу, с небольшими купюрами, следующий документ, подписанный 6 декабря 1967 г.:

РЕКОМЕНДАЦИИ

отделения математики механико-математического факультета МГУ
относительно математических дисциплин, преподаваемых студентам
отделения структурной и прикладной лингвистики
филологического факультета МГУ.

Отделение математики рекомендует включить, в качестве отдельных дисциплин, в учебный план отделения структурной и прикладной лингвистики следующие дисциплины:

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Введение в математический язык (уточнение логических союзов, употребление переменных, основные знаки), понятие о множестве, комбинаторика, метод координат, графики функций.

(5 часов в неделю в 1-м семестре.)

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

⟨...⟩

(6 часов в неделю во 2-м семестре и 6 часов в неделю в 3-м семестре).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (С МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКОЙ И ТЕОРИЕЙ ИНФОРМАЦИИ)

⟨...⟩

(5 часов в неделю в 4-м семестре и 6 часов в неделю в 5-м семестре.)

ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННУЮ АЛГЕБРУ

⟨...⟩

(5 часов в неделю в 6-м семестре.)

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

⟨...⟩

(6 часов в неделю в 7-м семестре.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

⟨...⟩

(6 часов в неделю в 8-м семестре и 4 часа в неделю в 9-м семестре.)

В конце каждого семестра целесообразно проводить как зачёт, так и экзамен по соответствующей математической дисциплине.

Заведующий отделением математики
академик

(П. С. АЛЕКСАНДРОВ)

7. Разумеется, грань между повышением общеобразовательного уровня и профессиональной подготовкой зачастую стирается. Скажем, знакомство с аксиоматическим методом значимо не только в плане общего образования. Гуманитарию, в аспекте его профессиональных интересов, полезно знать, что наряду с известными ему способами постижения новых понятий — способами, основанными на предъявлении либо достаточного числа примеров, либо словесных дефиниций, — существует и совершенно иной способ. Этот иной способ (он-то и называется аксиоматическим) заключается в том, что новое понятие вводится путём указания тех свойств, которыми оно должно обладать; приписывание же свойств понятию происходит путём формулирования соответствующих аксиом. Точно так же воображение, которое, как отмечалось выше, развивается при изучении бесконечности, может помочь и в профессиональной деятельности.

Сходным образом, изучение математических моделей реальных явлений позволяет осознать границы моделирования, задуматься над соотношением между моделью и моделируемой реальностью. Но помимо этой философской миссии, изучение математических моделей явлений экономики, психологии или лингвистики позволяет и лучше понять сами моделируемые явления.

Можно согласиться с теми, кто не устаёт напоминать об ограниченности математических моделей. Под ограниченностью понимается обычно их неспособность охватить описываемое ими явление во всей его полноте. Но я не согласен с теми, кто в этой ограниченности видит их слабость. Скорее, в этом их сила. Математическая модель должна быть проста, а потому огрублена. Проиллюстрирую сказанное таким примером. Все знают, что Земля — шар. Те, кто получил некоторое образование, знают, что Земля — эллипсоид вращения, сдавленный у полюсов. Геодезисты знают, что Земля — геоид; геоид есть геометрическая фигура, поверхность которой совпадает с поверхностью Земли без учёта таких мелких деталей, как горы и т. п. (более точно, — совпадает с той поверхностью, которую образовывал бы Мировой океан, если бы все материки и острова погрузились под воду или, ещё более точно, были бы срезаны по уровню этого океана). Мы имеем здесь три математические модели, с возрастающей точностью описывающие моделируемый ими объект — форму планеты Земля. Самая важная из этих моделей — самая первая, она же самая неточная. Хотя для прокладки авиамаршрутов нужна, возможно, и вторая, а для запуска баллистических ракет даже третья.

Роль математической модели для представителя гуманитарной науки можно сравнить с ролью скелета для художника, рисующего человека. Художник не изображает скелет, скелет скрыт и от него, и от зрителя картины, но чтобы грамотно изобразить человеческую фигуру, полезно представить её себе в виде скелетного каркаса, обросшего плотью. Так, гениальный математик А. Н. Колмогоров очертил скелет понятия падежа, указав,

в частности, основные исходные представления, необходимые для образования этого понятия (представления о синтаксически правильной фразе, о состоянии предмета, о выражении состояний предмета контекстами и т. п.). Гениальный лингвист А. А. Зализняк обрастил этот скелет лингвистической плотью в своём знаменитом трактате “Русское именное словоизменение”.

8. Из только что сказанного как бы напрашивается вывод, что главная цель обучения гуманитариев математике состоит в обучении их математическим моделям языка или хотя бы в создании фундамента для такого обучения. Однако это не так.

Главная цель обучения гуманитариев математике — психологическая. Эта цель состоит не столько в сообщении знаний и даже не столько в обучении методу, сколько в изменении — нет, не в изменении, а в *расширении* психологии обучающегося, в привитии ему строгой дисциплины мышления (слово “дисциплина” означает здесь, разумеется, не учебный предмет, а приверженность к порядку и способность следовать этому порядку). Помимо дисциплины мышления я бы назвал ещё три важнейшие умения, выработке которых должны способствовать математические занятия. Перечисляю их в порядке возрастания важности: первое — это умение отличать истину от лжи; второе — это умение отличать смысл от бессмыслицы; третье — это умение отличать понятное от непонятного.

Вливание элементов математической психологии в сознание гуманитариев (недруги такого вливания называли бы его индоктринизацией, а то и интоксикацией) может осуществляться как в *прямой* форме, путём обучения в классах и аудиториях, так и в форме *косвенной*, путём проведения совместных исследований, участия математиков в проводимых гуманитариями семинарах и т. п.; к косвенным формам влияния относятся даже вопросы, задаваемые математиками на лекциях на гуманитарные темы. Здесь на память приходит известный случай из истории психологии. В конце XIX века в одной из больших аудиторий Московского университета был объявлен доклад на тему “Есть ли сознание у животных?” Собралось несколько сот слушателей. Перед началом доклада председательствующий — а им был Президент Московского математического общества Н. В. Бугаев — задал каждому вопрос, знает ли он, что такое сознание; каждый дал отрицательный ответ. Тогда Бугаев объявил, что поскольку никто из присутствующих не знает, что такое сознание, доклад о том, есть ли оно у животных, состояться не может. Это типичный пример косвенного воздействия математического мышления на мышление гуманитарное. Подобные формы воздействия также являются одними из элементов математического образования. За последние полвека произошло заметное уменьшение количества непонятных или бессмысленных утверждений в отечественной литературе по языкознанию; полагаю, что это произошло не без влияния — как прямого, так и главным образом косвенного — математики.

Разумеется, математики не претендуют на то, чтобы ответить на проблемы, возникающие в гуманитарных науках (хотя именно математику Колмогорову принадлежит первое научное определение лингвистического понятия “падеж” — см. выше). Но они помогают гуманитариям лучше уяснить суть этих проблем и критически отнестись к попыткам их решения.

Роль математики в подготовке гуманитариев можно сравнить с ролью строевой подготовки в обучении воина. Все эти ружейные артикулы, повороты, строевой шаг и иные движения, которым обучают молодого бойца, вряд ли находят применение в реальном бою. Но во всех армиях мира они рассматриваются как необходимая основа всякого военного обучения, поскольку приучают выполнять команды. (Кстати, оперирование с математическими алгоритмами также приучает выполнять команды. “Сначала я вам скажу, что я делаю, а [только] потом объясню, зачем,” — это программное заявление содержится в одной книге по методике математики в высшей школе, недостаточно, на мой взгляд у нас оценённой [3, с. 199].) Строевая подготовка тренирует дисциплину — только не дисциплину мышления, как это делает математика, а дисциплину действий.

Другая аналогия — тренировка моряков на парусных судах. Не знаю, как сейчас, но во времена моей молодости всякий, кто обучался в гражданских мореходных вузах, в обязательном порядке проходил плавание на парусных судах — и это при том, что применять полученные парусные навыки впоследствии ему вроде бы не приходилось. Тем не менее обучение этим навыкам считалось (а, может быть, и считается до сих пор) необходимой частью морской подготовки, необходимым тренингом. Сходным тренингом — тренингом мышления, наведением порядка в мозговых извилинах — служит математика.

9. В практике гуманитария вряд ли возникнет нужда в использовании, скажем, аксиомы о параллельных. Для гуманитария эта аксиома — нечто вроде того, чем является какая-нибудь бом-брам-стенгга для современного моряка. Однако знать и, главное, понимать эту аксиому чрезвычайно поучительно — и не только потому, что основанная на ней математическая модель (так называемая евклидова геометрия) достаточно хорошо описывает реальное физическое пространство. Поучительность заключена в том её качестве, которое хотя и содержится явно в её формулировке, для большинства остаётся затемнённым. Предлагаю читателю провести такой эксперимент. Попросите нескольких человек, не получивших специального математического образования, сформулировать аксиому о параллельных, ту самую, которую они проходили в школе. Скорее всего, ответ будет таким: “через точку, не лежащую на прямой, можно провести другую прямую, параллельную первой”; иногда к этому добавляют “и притом только одну”. Таким образом, в массовом сознании характер аксиомы о параллельных — разрешительный: что-то можно сделать. На самом деле же характер этой

аксиомы совсем другой. *Возможность* провести параллельную устанавливается не аксиомой, а теоремой, и эту несложную теорему доказывают в школе (из точки опускают перпендикуляр на исходную прямую, а затем из той же точки восстанавливают перпендикуляр к этому перпендикуляру; это второй перпендикуляр и будет искомой параллельной). Аксиома же о параллельных имеет запретительный характер. Она утверждает не возможность чего-то, а, напротив, невозможность: “через точку, не лежащую на прямой, нельзя провести две различные прямые, параллельные первой”. В аксиоме о параллельных есть что-то общее с американским Биллем о правах: провозглашаемые в ряде статей этого документа права формулируются не в терминах разрешений, как можно было бы ожидать, а в терминах запретов: “Конгресс не должен...”, “Ни один солдат не должен...”, “Чрезмерные залоги не должны...” и т. п. (Эта аналогия, кстати, даёт хороший повод поговорить на занятиях о роли запретов вообще — как в законах природы, так и в человеческих законах.)

Теперь автор этих строк должен покаяться. Высказав в предыдущем абзаце гипотезу о том, каков будет результат эксперимента, автор погрешил против истины. Потому что автор уже провёл этот эксперимент и знает, что в действительности ситуация куда менее утешительна. И читатель, возможно, уже в этом убедился. Оказывается, большой процент населения полагает — во всяком случае, так утверждает, — что аксиома о параллельных состоит в том, что параллельные прямые не пересекаются. Давшего такой ответ следует немедленно спросить, что такое параллельные прямые. Все как один ответят, что параллельные это такие прямые, которые не пересекаются. (Многие даже прибавят: “и лежат в одной плоскости”; разницу между параллельными и скрещивающимися прямыми понимают все.) Может ли аксиома состоять в том, что непересекающиеся прямые не пересекаются? Как ни удивительно (возможно, это удивительно лишь математику), находятся и такие, кто даёт положительный ответ на этот казалось бы риторический вопрос. В подавляющем большинстве, надо признать, люди правильно понимают, что такая аксиома выглядела бы по меньшей мере странно, и приходят в замешательство.

Желающие могут продолжить социологический эксперимент и спросить, в чём состоит открытие Лобачевского. Имя Лобачевского знают практически все. И очень многие ответят так: “Лобачевский доказал, что параллельные прямые пересекаются”. Тут опять-таки надо немедленно спросить, что такое параллельные прямые и попытаться добиться осознания того, что Лобачевский, при всём своём величии, вряд ли мог доказать приписываемое ему утверждение. “Параллельные прямые пересекаются” — классический пример утверждения, ложность которого должна быть очевидна для всякого. (С утверждением “Параллельные прямые не пересекаются” дело обстоит сложнее. Оно, конечно, и осмысленно, и верно, но тавтологично и потому не несёт

никакой информации; включение его в число аксиом возможно, но бессмысленно.)

Вопрос про аксиому о параллельных не является, разумеется, вопросом на испытание памяти. Точно так же вопрос про открытие Лобачевского не является вопросом на проверку эрудиции. Оба вопроса — на понимание смысла делаемых утверждений. Строго говоря, вся ситуация лежит здесь не в сфере математики, а в сфере семантики русского или иного естественного языка. И это довольно типично: значительная часть того, что происходит на уроках математики для гуманитариев, как раз и должна, по нашему разумению, состоять в обучении этой семантике. Математики впитывают эту семантику неосознанно, поскольку занятия математикой невозможны без чётко сформулированных утверждений. Столь же неосознанно у гуманитариев эта семантика размывается — не без влияния расплывчатых текстов гуманитарных наук.

10. К воспитываемой на уроках математики дисциплине мышления относится осознание отчётливого различия между истиной и ложью, между доказанным и всего лишь гипотетическим: ведь эти различия нигде не проявляются с такой чёткостью, как в математике.

Казалось бы, что может быть важнее и первичнее, чем умение отличать истинные высказывания от высказываний ложных. Однако ещё более важным, ещё более первичным является умение отличать осмысленные высказывания от бессмысленных. Вот характерный пример бессмысленного высказывания: “Рассмотрим множество *всех* слов, имеющих хотя бы одну общую букву”. Бессмысленность этого заявления вызвана тем, что такого множества не существует. (В самом деле, “рот” и “сыр” имеют общую букву эр и потому должны принадлежать этому множеству. Слово “око” должно принадлежать этому множеству, поскольку имеет общую букву со словом “рот”, и не должно ему принадлежать, поскольку не имеет общих букв со словом “сыр”.) Мы потому назвали пример характерным, что подобные псевдоконструкции, ничего на самом деле не конструирующие, были довольно типичны для литературы по языкознанию несколько десятилетий назад. Возникало даже парадоксальное удовлетворение, когда некоторое утверждение можно было квалифицировать как всего лишь ложное, — чувство удовлетворения возникало потому, что ложность утверждения свидетельствовала о его осмысленности.

В диалоге преподавателя-математика со студентом-гуманитарием зачастую приходится просить студента вдуматься в то, что он только что сказал, и затем спросить его, понимает ли он то, что сам сказал. Не столь уж редко честные студенты после размышления признаются в некоторой растерянности, что не понимают.

Надо сказать, что для того, чтобы квалифицировать высказывание как ложное, бессмысленное или непонятное, надо, как правило, сделать некото-

рое усилие — иногда почти героическое: “как же так, уважаемый человек что-то говорит или пишет, а ты осмеливаешься его не понимать или, поняв, возражать”. Не все и не всегда способны на такое усилие.

11. Способность к тому усилию, о котором только что говорилось, тренируется (во всяком случае, должна тренироваться) на уроках математики и при общении с математиками. Дело в том, что математика — наука по природе своей демократическая. На её уроках воспитывается — а при косвенном воздействии прививается — демократизм. Математическая истина не зависит от того, кто её произносит, академик или школьник; при этом академик может оказаться неправ, а школьник прав. Чем наука дальше от математики, чем она, так сказать, гуманитарнее, тем сильнее убедительность того или иного высказывания начинает зависеть от авторитета высказывающего лица. На гуманитарных факультетах подобная персонализация истины ещё недавно ощущалась довольно сильно.

Нет в математике и “царского пути”. Здесь я ссылаюсь на известную историю, то ли подлинную, то ли вымышленную, которую одни рассказывают про великого математика Архимеда и сиракузского царя Гиерона, другие про великого математика Евклида и египетского царя Птолемея. Царь выразил желание изучить геометрию и обратился с этой целью к математику. Математик начал его обучать. Царь выразил недовольство тем, что его учат совершенно так же, в той же последовательности, как и всех других, не принимая во внимание его царский статус, каковой особый статус, по мнению царя, предполагал и особый способ обучения. На что математик, по преданию, ответил: “Нет царского пути в геометрии”.

12. Когда знаменитого педиатра доктора Спока спросили, с какого возраста следует воспитывать ребёнка, он, узнав, что ребёнку полтора месяца, ответил: “Вы уже опоздали на полтора месяца”. Точно так же, навыки математического мышления и прежде всего способность отличать осмысленное от бессмысленного и истинное от ложного следовало бы неназойливо прививать уже с начальных классов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розов Н. Х. Гуманитарная математика // Математика в высшем образовании. 2003. № 1. С. 53–62.
2. К столетию со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова // Проблемы передачи информации. 2002. Т. 38, вып. 2. С. 77–78. [На указанных страницах напечатано письмо А. Н. Колмогорова к В. А. Успенскому. Это письмо воспроизведено также в трёх книгах: Колмогоров в воспоминаниях / Ред.-сост. Ширяев А. Н. — М.: Физматлит, 1993. С. 309–310.; Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Поспелов Д. А., Фет Я. И. — Научно-издат. центр ОИГТМ СО РАН, 1998. С. 122–123.; Успенский В. А. Труды по нематематике. — М.: ОГИ, 2002. С. 1090–1091.]
3. Соьер У. У. Прелюдия к математике / Пер. с английского. — М.: Просвещение, 1965.

**MATHEMATICS FOR STUDENTS IN THE HUMANITIES:
PHILOSOPHY OF TEACHING**

V. A. Uspenskiy

The article is a revised version of a speech given on June 6, 2004 at the 10th International Congress on Mathematical Education (Copenhagen, 4–11 June 2004); the talk was a part of the Russian national presentation. The author presents principles which, he argues, should form the basis of mathematics instruction to the students majoring in the humanities. These principles have been elaborated on the basis of the author's personal experience of many years.

Keywords: mathematics at university, mathematics for humanists.