

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ.
ПЕРСОНАЛИИ

УДК 51.001.8 + 517.938

**В НАЧАЛЕ БЫЛО СЛОВО:
К ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ХАОТИЧЕСКОЙ
ДИНАМИКИ**

Л. М. Лерман

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет имени Н. И. Лобачевского
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;
e-mail: lermanl@mm.unn.ru*

Данный текст является вступительной лекцией перед демонстрацией фильма «Тайная жизнь хаоса» (BBC, 2010) для широкой аудитории в рамках фестиваля, проведённого Парком науки ННГУ «Лобачевский Lab» в 2015 году. Даётся краткое обсуждение предыдущей парадигмы описания и развития динамических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, и случайных явлений, введение в тему хаотической динамики и показывается, что современные успехи хаотической динамики были подготовлены предыдущим развитием таких разделов математики, как теория функций, теория множеств, топология, качественная теория дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, функция Вейерштрасса, канторовское множество, ковер Серпинского, грубая система, неустойчивость, нелинейность.

Сейчас вы увидите фильм, посвященный новому разделу современной науки — теории сложного поведения систем, или теории хаоса, описывающей явления из совершенно различных областей науки: от астрофизики до биологии и химии. Если какая-то теория позволяет описать или хотя бы качественно объяснить явления из столь разных разделов современной науки — это означает, что идеи, лежащие в основе этой теории, имеют принципиально новый характер. Поэтому перед тем, как смотреть и обсуждать сам фильм, стоит понять, что предшествовало этому прорыву, тем более, что, на мой взгляд, это совершенно опущено в фильме.

Для этого вспомним, что современный подход к науке, я бы назвал его динамическим, был сформулирован и развивался с середины 17 века, когда благодаря работам Ньютона и Лейбница (предтечей которых следует назвать Ферма) появился математический анализ и сразу после этого — дифференциальные уравнения. Это позволило сформулировать на математическом языке основные законы механики, оптики, а затем, с развитием экспериментальной физики, и законы электромагнетизма (Фарадей, Максвелл), движения жидкостей и газов (Эйлер, Навье, Пуассон, Стокс). Математическим языком для описания всех этих законов служат именно дифференциальные уравнения. Вы знакомы с ними со школы. Например, все вы знаете, что второй закон Ньютона формулируется так: ускорение тела прямо пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально его массе. На математическом языке это означает, в частности, что если тело движется по прямой

по некоторому закону $s(t)$, то вторая производная по времени $s''(t)$ от перемещения $s(t)$, т. е. ускорение тела в момент времени t , равна отношению силы, действующей на тело, к его массе. Обычно силы, действующие на движущееся тело, известны. Например, если мы бросим камень, то на камень, после его первоначального подбрасывания, будет действовать при движении только сила тяжести, если пренебречь сопротивлением воздуха, а то, как мы его подбросили, будет определять его начальное положение и скорость. При движении ракеты, кроме силы тяжести, на неё действует реактивная сила двигателя, которая известна, если мы знаем конструкцию двигателя, а также силу сопротивления воздуха. Далее нам нужно определить траекторию движения тела. В ситуациях, которые изучались в механике и теории дифференциальных уравнений, движение тела полностью определялось уравнениями и заданными начальными условиями движения, например, в законе Ньютона нужно было задать начальное положение тела и его скорость, после чего его движение можно было рассчитать в любой заданный момент времени. Я не обсуждаю сейчас, насколько это было сложно, какие средства для таких расчётов были развиты, и что развитие методов расчёта двигало науку в течение столетий, но выработавшийся взгляд на такие расчёты можно сформулировать так: если мы знаем дифференциальные уравнения и знаем с любой точностью начальные условия, то мы можем рассчитать движение с любой степенью точности. Ошибки возможны, но они происходят из трёх источников: 1) мы не знаем достаточно точно начальные условия, 2) мы не можем абсолютно точно рассчитать решение уравнения (например, приходится использовать рациональные числа вместо иррациональных), или 3) наша модель описания движения недостаточно точна. Предположим, что мы в состоянии учесть все действующие силы, имеем точную модель описания движения и можем провести расчет с произвольной точностью. На этих предположениях основано известное утверждение Лапласа: «Современные события имеют с событиями предшествующими связь, основанную на очевидном принципе, что никакой предмет не может начать быть без причины, которая его произвела. . . Мы должны рассматривать современное состояние Вселенной как результат её предшествующего состояния и причину последующего. Разум, который для какого-нибудь данного момента знал бы все силы, действующие в природе, и относительное расположение её составных частей, если бы он, кроме того, был достаточно обширен, чтобы подвергнуть эти данные анализу, обнял бы в единой формуле и движения самых огромных тел во Вселенной и самого легкого атома; для него не было бы ничего неясного, и будущее, как и прошлое, было бы у него перед глазами. . . Кривая, описываемая молекулой воздуха или пара, управляется столь же строго и определено, как и планетные орбиты: между ними лишь та разница, что налагается нашим неведением». Этот взгляд позже получил название «лапласовского детерминизма».

Существовал также и подход к явлениям, которые считались принципиально непредсказуемыми, их называли случайными. Изучение таких явлений возникло из азартных игр, например, когда игроки пытались найти какие-то

тайные способы, позволяющие предсказать исход игры в кости, где основным элементом было случайное бросание костей, и где исход, в предположении честности игры и «правильности» костей, был непредсказуем, т.е. случаен. Позже на этих основах была построена статистическая физика, исходящая из того, что поскольку все тела состоят из огромного числа атомов (молекул), то невозможно задать все начальные условия, даже если мы знаем сами законы движения атомов или молекул. Поэтому можно и нужно рассчитать только некие средние величины, выражающие усредненные характеристики движения, например, среднюю энергию, которая пропорциональна температуре тела, и т.д. Другими словами, установился такой взгляд: случайность появляется там, где есть либо большое число частиц, либо большое число испытаний, исход каждого из которых непредсказуем. Этот взгляд развивался и был общепризнанным до середины прошлого века, когда он был полностью пересмотрен. Об этом вы узнаете из фильма.

Но я хочу показать, что истоки этого нового знания развивались в математике задолго до этих событий, только они не замечались и сначала не влияли на этот механистический взгляд на природу.

После создания математического анализа основное внимание в исследованиях уделялось функциям, которые являются очень гладкими, их называют аналитическими. Их основная особенность состоит в том, что аналитическая функция сразу определена в целом, если мы знаем хотя бы маленький её кусок: локальное поведение функции около любой точки определяет ее полностью. Считалось, что только такие функции и нужно изучать, и именно они описывают все законы в природе. Однако, как обычно бывает, развитие приводит к появлению диссидентов, взгляды которых существенно отличаются от взглядов большинства. Почти всегда общество старается отвергнуть таких диссидентов и изолировать их, а их взгляды подвергаются остракизму. Поэтому, когда стали появляться необычные примеры негладких функций, а один из первых примеров функции, негладкой в каждой точке, был построен знаменитым немецким математиком Карлом Вейерштрассом (1872), много сделавшим в теории аналитических функций, то многие даже очень хорошие математики стали относиться к этим функциям отрицательно. Приведу замечание французского математика Шарля Эрмита в письме к голландскому математику Томасу Стильтьесу: «Я с ужасом и отвращением отворачиваюсь от этой разрастающейся язвы функций, не имеющих производной».

Затем стали появляться всё более изощрённые примеры негладких функций и связанных с ними множеств, особенно по мере развития понятия интеграла. Это развитие было инспирировано работами немецкого математика Георга Кантора, который заложил основы теории множеств. В частности, ему принадлежит пример известного множества, называемого канторовским. Напомню его конструкцию. Берем единичный отрезок на числовой прямой, делим его на 3 равные части точками $1/3$ и $2/3$, и удаляем среднюю треть, т.е. интервал между точками $1/3$ и $2/3$. Остаются два отрезка длины $1/3$. Поступаем с ними также. Получаем 4 отрезка длины $1/9$. Процесс продолжаем до бесконечности. То, что останется на единичном отрезке, и называется стандартным канторовским множеством. Если подсчитать общую дли-

ну удалённых интервалов, то получим 1, т. е. число, равное длине исходного отрезка. Казалось бы, ничего не осталось. Тем не менее, оказывается, что осталось достаточно много: множество точек канторовского множества можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с точками исходного отрезка: они, как говорят, равномощны! Здесь мы встречаемся с процедурой бесконечного применения одного и того же алгоритма для получения множества. Так полученные множества обладают свойством самоподобия: любая их часть подобна целому. Такие процедуры потом стали использоваться для получения множеств, называемых фрактальными.

Но это было только начало. В начале 20 века стала бурно развиваться новая математическая наука — топология, одним из основателей которой был знаменитый французский математик Анри Пуанкаре. Она изучает свойства фигур, которые не меняются при преобразованиях без разрывов и склеек. Например, сфера (поверхность шара) и поверхность куба топологически одинаковы, а сфера и тор (поверхность бублика) — различны.

Развитие общей топологии привело к таким, казалось бы, тривиальным вопросам: что следует понимать под кривой, поверхностью, и т. д. Если функции, описывающие кривую, являются гладкими, то эти вопросы более или менее ясны, хотя и не тривиальны, но если эти функции только непрерывны, то в качестве такой кривой можно, например, получить квадрат на плоскости (кривые Пеано). Другой пример, являющийся обобщением конструкции канторовского множества — так называемый ковёр Серпинского (Вацлав Серпинский — известный польский математик). Он строится так: единичный квадрат на координатной плоскости делим двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на 9 равных квадратов и выкидываем средний из них, остаются 8 квадратов. С каждым из них проделываем ту же операцию. Процесс продолжаем до бесконечности. То, что останется, и называется ковром Серпинского. Это множество можно считать кривой, т. к. его топологическая размерность равна единице. А его мера, т. е. характеристика, обобщающая площадь, равна нулю.

Короче говоря, к середине 20-х годов XX века были построены различные примеры так называемых диких континуумов, потом интерес к их построению и изучению стал спадать, и они долгое время оставались некой экзотикой. А затем началась другая история, где все эти объекты стали появляться регулярно, причём из простых дифференциальных уравнений, и эти континуумы оказались геометрическими образами хаоса!

Это уже связано с нашим городом и его наукой. В 1931 году в Нижний Новгород приехал молодой физик Александр Александрович Андронов со своей семьёй — женой Евгенией и дочерью Ириной. Андронов был учеником известного московского физика Леонида Исааковича Мандельштама, а жена Андропова, Евгения Александровна, выпускница МГУ, была из знаменитой московской математической школы Лузина. Вместе с ними в Нижний приехала ещё одна научная семья: Виктор Иванович Гапонов и его жена Мария Тихоновна Грехова с сыном Андреем. Эти люди заложили основы настоящей науки в Нижнем. В частности, Андронов создал здесь научную школу по теории колебаний, известную теперь во всем мире. Хотя сам он был физиком по

образованию, он имел большой вкус к точной постановке и изучению чисто математических задач, в основном — из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Он заложил основы математической теории колебаний и теории бифуркаций, изучающей, как меняется поведение решений дифференциального уравнения, если вы непрерывно меняете его параметры — например, в приборе, работа которого описывается этими дифференциальными уравнениями, крутите какую-нибудь ручку настройки. Чтобы придать этим понятиям точный математический смысл Андронов и знаменитый математик Понтрягин в 1937 г. выделили класс дифференциальных уравнений, которые при малых изменениях параметров не меняют свои свойства. Они назвали их «грубыми системами». Если дифференциальное уравнение содержит производные не выше второго порядка, то структура таких грубых систем оказалась простой. Долгое время, до 60-х годов XX века, считалось, что и для грубых систем, описываемых дифференциальными уравнениями, содержащими производные более высокого порядка, всё обстоит примерно также, и их структура достаточно проста. Андронов к тому времени уже умер (1952), но школа, которую он создал, продолжала успешно работать.

Всё изменилось в 1961 г., когда знаменитый молодой американский математик Стефен Смейл, лауреат престижной Филдсовской премии за работы по топологии, построил пример, который можно интерпретировать как описывающий поведение решений некоторого дифференциального уравнения, содержащего производную третьего порядка, и это поведение оказалось очень сложным, хотя уравнение было грубым. Оказалось правильным известное изречение Андронова, что в теории дифференциальных уравнений, как в счете дикарей: три — это уже много.

Так началась новейшая история в теории дифференциальных уравнений, когда основным объектом исследований стали системы со сложным поведением или, как их сейчас называют, со стохастическим поведением. Одно из существенных открытий в этой области было сделано здесь, в Горьком, молодым тогда членом Андроновской школы Леонидом Павловичем Шильниковым (1965). Он показал, что к сложной динамике приводят простые дифференциальные уравнения, и эти условия существования сложной динамики можно легко проверить. Затем здесь было сделано много других существенных открытий, и это движение продолжается до сих пор. В частности, то, что вы узнаете из фильма об Эдварде Лоренце и его знаменитой системе дифференциальных уравнений, было детально исследовано здесь, в Горьком, в работах Шильникова и его учеников (Афраймович и Быков).

Основные прорывы, которые были сделаны за последние полвека в теории дифференциальных уравнений, были сделаны именно в этой области. Неудивительно, что Абелевская премия по математике за 2014-й год (аналогичная Нобелевской — как известно, Нобель в своём завещании не включил математику в число наук, за которые присуждается премия его имени) была присуждена за работы по теории хаоса академику РАН Якову Григорьевичу Синаю¹, с которым Шильников и члены его школы долгое время поддерживали тесные научные связи.

¹ См. Абелевскую лекцию Я. Г. Синая «Начало теории детерминированного хаоса» — Математика в высшем образовании, № 12 (2014), с. 139–148.

Что же является основой хаотического поведения? Это, во-первых, нелинейность изучаемых дифференциальных уравнений, и, во-вторых, наличие сильной неустойчивости в поведении решений, когда решения с близкими начальными условиями могут быстро расходиться друг от друга. Тогда любое малое изменение этих начальных условий приводит большому различию в поведении решений, что в результате и ведет к хаосу. При этом не нужно иметь много уравнений: трёх уже достаточно, как в системе Лоренца.

Подводя итог, я хочу сказать перед просмотром фильма, что революция в мировоззрении, которая произошла на наших глазах в понимании природы и процессов, происходящих в ней, была подготовлена развитием математики в областях, которые, казалось бы, не имели никакого отношения к этой революции, но это развитие подготовило умы к восприятию всей этой сложности. Очень важно, чтобы семя легло в подготовленную почву. В противном случае могло бы произойти то, что произошло в химии, когда работу про знаменитую теперь колебательную химическую реакцию, открытую Борисом Павловичем Белоусовым в 1958 году, отказались публиковать в журналах, сказав, что это не может быть, потому что этого не может быть никогда!

Поступила 14.04.2016

IN THE BEGINNING WAS THE WORD: TO THE HISTORY OF OCCURRENCE OF CHAOTIC DYNAMICS

L. M. Lerman

This text is the introductory lecture before a film screening «The Secret Life of Chaos» (BBC, 2010) for the broad audience in the program of the festival organized by «Park of the science Lobachevsky Lab» of the NNGU in 2015. It is briefly discussed the previous paradigm on the description and development of dynamical processes whose mathematical models are differential equations, some probabilistic phenomena, the introduction to the topic of chaotic dynamics. It is shown that the contemporary advances in chaotic dynamic were prepared by the preceding development of such branches of mathematics as theory of functions, set theory, topology, qualitative theory of differential equations.

Keywords: differential equation, Weierstrass function, Cantor set, Sierpincki carpet, structurally stable system, instability, nonlinearity.