СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.98, 378.147

ОБУЧЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ: ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ КУРС

Н. В. Филимоненкова

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Петра Великого
Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29;
e-mail: nf33@yandex.ru

Работа посвящена решению проблем, возникающих при изложении дисциплины «Функциональный анализ» будущим инженерам. Подведены итоги создания нового учебного комплекса. Указаны его характеристики и рекомендации к использованию.

Ключевые слова: функциональный анализ, вычислительная математика, учебный комплекс, прикладная ориентация.

1. Проблемы обучения функциональному анализу в техническом вузе

Предметом изучения курса «Функциональный анализ» являются в основном пространства функций и их отображения, откуда и происходит название дисциплины. Функциональный анализ как самостоятельный раздел математики сложился в начале прошлого века в результате обобщения конструкций математического анализа, линейной алгебры и геометрии. С тех пор его идеи и методы проникают во все области математики, физики и в прикладные науки на правах мощной обобщающей теории и удобного инструмента исследования конкретных задач.

Изучение функционального анализа характерно для математических факультетов классических университетов. Но и в техническом вузе этот курс встречается в учебных планах специальностей «Прикладная математика», «Информатика и вычислительная техника», «Прикладная математика и информатика», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», «Механика и математическое моделирование», «Прикладные математика и физика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии». В соответствии с ФГОС ВПО основная образовательная программа бакалавриата по перечисленным специальностям предусматривает изучение элементов функционального анализа. Обычно это базовая часть математического и естественнонаучного цикла, время изучения — один семестр, количество аудиторных часов небольшое.

Тесные рамки учебного времени, прикладная направленность и уровень базовой подготовки современных студентов технического вуза не позволяют им освоить столь сложную математическую дисциплину с позиций классического подхода, подразумевающего фундаментальность и самодостаточность подачи сугубо теоретического материала. Кроме того, прагматически настроенных студентов трудно заинтересовать идеей обобщения и формализации математических конструкций. Очевидно, мотивация повышается, если приблизить академический курс к вычислительной практике с обязательным привлечением электронных вычислительных средств. Для будущих математиков-инженеров и математиков-программистов необходимо акцентировать прикладную роль функционального анализа, которая сводится к аналитическому обоснованию эффективной работы численных методов.

Среди опубликованных учебных ресурсов лишь немногие ставят и решают похожую методологическую задачу. Например, теоретические учебники В. А. Треногина [1], В. И. Лебедева [2] ориентированы на прикладные специальности. Однако, они слишком объёмны, сложны (особенно [1]) и, хотя освещают функциональный анализ с точки зрения численных методов, проходят не полностью путь от идеи до расчетной формулы, что затрудняет их использование в рядовом техническом вузе. Требуется существенная адаптация.

В задачниках по функциональному анализу не принято акцентировать ни вычислительную, ни даже алгоритмическую компоненту и тем более не принято активно привлекать компьютерные технологии. В существующих сборниках преобладают теоретические упражнения. Они, как правило, начинаются со слова «доказать», оперируют сугубо абстрактными схемами (пространство X, норма p, оператор A и т. д.). Подавляющее большинство таких упражнений являются антиподами типовых расчетов и зачастую превышают способности студентов технического вуза. Воплощением такого подхода является сборник А. А. Кириллова, А. Д. Гвишиани [3], предназначенный для классических университетов, однако в той или иной мере все задачники по функциональному анализу тяготеют к погружению в формально-логический аппарат. При постановке учебных задач будущим инженерам, как минимум, следовало бы видоизменить форму подачи традиционных сюжетов: перейти от абстрактных к конкретным пространствам, нормам, операторам и от эксклюзивных упражнений на доказательство к более типовым, алгоритмичным вычислениям и построениям. Этот путь реализован в практикуме Белорусского государственного университета [4], хотя и не до конца: в ассортименте задач не хватает «мягкой пищи» — простейших одношаговых упражнений, нацеленных на отработку элементарных инструментов дисциплины. Другой путь приближения функционального анализа к вычислительной практике состоит в том, чтобы поставить в центр задачи применение какого-либо численного метода, вытекающего из теории. Такая тенденция эпизодически проступает в задачнике А. В. Треногина, В. М. Писаревского, Т. С. Соболевой [5]. Следуя учебнику [1], этот задачник основательно штурмует численные приложения функционального анализа, но, к сожалению, в основном со стороны теории, а не практики, причем на солидном уровне абстракции. К тому же применение численных методов естественно требует использования ЭВМ, и такие попытки встречаются в [4, 5], но их вес незначительный. Можно сделать вывод, что в существующих сборниках задач по функциональному анализу почти нет таких выходов к численным методам, которые были бы по плечу среднему студенту и предполагали бы как математическую аргументацию, так и реализацию с использованием вычислительной техники.

Недостаток практического внимания к численным методам в существующих пособиях по функциональному анализу, составленных для прикладных специальностей, можно объяснить несколькими обстоятельствами. Во-первых, сама идеология функционального анализа настроена на взлет абстрагирующей мысли. Во-вторых, учебные траектории этой дисциплины складывались в то время, когда компьютерные технологии были ещё далеки от ведущей роли в образовании, а стало быть, их подключение к учебному процессу ещё не воспринималось как нечто естественное и необременительное. В-третьих, численные методы по традиции укомплектованы в отдельный курс вычислительной математики. Но как отметил А. Д. Мышкис [6], в техническом вузе «небезопасно выделение всех вычислительных вопросов в отдельный раздел курса математики: такое выделение может существенно понизить идею алгоритмичности в остальных разделах курса, которые оказываются как бы противопоставленными вычислениям и тем самым обескровленными в прикладном отношении». Добавим к этому непреходящему аргументу еще и другой, обусловленный сегодняшним положением технического образования: для современного студента, у которого знания последней сессии не доживают до начала следующего семестра, нет смысла разрывать обоснование метода и его первое пробное испытание. Приближение курса функционального анализа к вычислительной математике служит непрерывности и связности профессиональной подготовки прикладника. Возможно, это даже единственный способ для обустройства функционального анализа в техническом вузе.

Сближение с вычислительной математикой должно быть таким, чтобы полностью довести теоретический факт до числа: проследить проекцию абстрактных идей на плоскость численных методов и дать возможность сразу апробировать методы в вычислительной практике. Конечно, мера этого сближения должна быть разумной, чтобы функциональный анализ не потерял свою идентичность, не подменялся курсом вычислительной математики.

Для решения описанных проблем проведено научно-методическое исследование и разработан комплекс из двух учебных пособий: конспект лекций [7] и сборник задач [8] по функциональному анализу для технических вузов. Сформулируем основные концепции, положенные в основание этой разработки:

- адаптация учебного материала к уровню подготовки и аналитических способностей студентов;
- культивирование прикладной составляющей дисциплины, которая осуществляется сочетанием функционального анализа и вычислительной математики;
- модернизация курса под использование электронных вычислительных средств (прикладных математических пакетов).

Далее в данной статье описано, каким образом эти концепции реализованы в учебных пособиях [7], [8] и в организации учебного процесса.

2. Адаптация теоретического курса

Конспект лекций [7] содержит краткие теоретические сведения об основных модулях функционального анализа: теории сжимающих операторов, теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве и теории линейных операторов. Причем из рассмотрения исключены некоторые сложные конструкции с сугубо академическим значением, не обладающие скорым и наглядным приложением в вычислительной практике.

Например, исключены почти все элементы топологии, понятие сепарабельного пространства, понятия компактного множества, компактного оператора и все смежные с ними теоремы, понятия сопряженного пространства и оператора, понятия непрерывного и остаточного спектра линейного оператора, теорема Банаха об обратном операторе, теорема о пополнении метрического пространства (оставлена на уровне упоминания), теоремы о продолжении оператора, функционала и другие.

Понятие ограниченности линейного оператора, ключевое для большинства учебников по функциональному анализу, заменено на эквивалентное ему понятие непрерывности. Причина замены заключается к том, что традиционное определение ограниченного линейного оператора не соответствует принятому в курсе математического анализа определению ограниченной функции, тогда как универсальное понятие непрерывности для оператора в метрических пространствах согласуется с непрерывностью функции из курса математического анализа. Непрерывность оператора определена как способность сохранять сходимость последовательности, поскольку это определение самое простое и востребовано приближенными методами.

Курс обходится беглым абрисом интеграла Лебега, включенным ради описания пространств Лебега, и строится без опоры на теорию меры, поскольку данные разделы зачастую исключены из бакалаврского курса математического анализа, читаемого для прикладных специальностей, и никак не помещаются в урезанный курс функционального анализа.

Изложение ориентировано на две базовые задачи, стоящие на пересечении фундаментальной и прикладной математики: аппроксимацию функций и решение операторных уравнений. При рассмотрении аппроксимации функций посредством ортогональных систем затронуты вопросы точности и качества приближения. При решении операторных уравнений выделены на первый план вопросы сходимости приближенных методов и контроля точности приближенного решения. Проблема единственности решения также не упущена из поля зрения. А вот проблема существования, нелегкая для восприятия прикладника, отведена на второй план и в некоторых местах умалчивается.

В каждом модуле конспекта лекций сюжетная линия проходит путь от введения основных понятий к доказательству ключевых теорем, имеющих прямой выход к широко известным численным методам. Эти «выходы», как правило, описаны в последних параграфах модулей. Для их составления была проанализирована база из нескольких десятков существующих учебников как по функциональному анализу, так и по различным областям вычислительной математики.

Первый модуль посвящен метрическим пространствам и сжимающим операторам. Он завершается обзором ситуаций, в которых возможно применение принципа сжимающих операторов и метода простых итераций для приближенного решения уравнений разного типа.

Второй модуль представляет теорию рядов Фурье в гильбертовом пространстве. Значительное внимание уделено разнообразию ортогональных систем: тригонометрических, полиномиальных, систем ступенчатых функций. Модуль завершается описанием связи ряда Фурье с задачей аппроксимации и пояснением таких существенных особенностей, как характер сходимости ряда Фурье, специфика тригонометрической и полиномиальной аппроксимаций, различия между рядами Фурье и Тейлора.

Третий модуль посвящен теории линейных операторов и захватывает смежные вопросы оптимизации функционала. Изложение завершается описанием вариационного и проекционного подхода к приближенному решению линейных операторных уравнений. Подробно разобраны метод наименьших квадратов и метод Галёркина. Кроме того, в третьем модуле есть и другие выходы к вычислительной математике, представленные в разных параграфах: поиск решения уравнения в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора, решение интегрального уравнения методом замены ядра на вырожденное, приближенная минимизация функционала методом Ритца.

Кроме строго дедуктивного стиля изложения, используются рациональные обоснования (с помощью аналогии, выборочной проверки) и прочие доводы в пользу правдоподобия выводов, в том числе основанные на неформальном смысле математических конструкций. Большинство параграфов снабжены предисловием, указывающим на «грубый» смысл предложенных конструкций, на связь с их предтечами из математического анализа, геометрии или линейной алгебры, на некоторые из ярких приложений в естествознании и технологиях.

Таким образом, курс не претендует на полноту и замкнутость в изложении теории, но делает акцент на алгоритмическую составляющую функционального анализа. Изложение теоретических конструкций упрощено до элементарного при попытке сохранить классическое качество данной дисциплины и не упустить идеологию происходящего. Абстрактная энергия функционального анализа существенно укрощена по сравнению с академическим курсом, но удержана как раз в таком объеме, чтобы давать питание для приложений: обоснование и мотивировку.

Радикальные сокращения, упрощения, нововведения и отступления от академического стиля изложения, допущенные в конспекте лекций, делают его уязвимым для критики со стороны опытных математиков. Главный аргумент защиты состоит в том, что «в преподавании нужно стремиться к пониманию, соответствующему уровню учеников — а не преподавателя или рецензента» [6]. Все модификации прошли тщательный отбор, упрощение курса происходило в несколько этапов, и зафиксированный в конце концов силуэт еще долгое время будет нуждаться в мудрых замечаниях и в отладке.

3. Модернизация практического курса

Для преобразования практической части курса согласно принятым концепциям разработана новая база заданий по функциональному анализу. Сборник задач [8] включает 58 заданий, 20 вариантов условия в каждом, все задания снабжены образцами решения либо указаниями к решению и ссылками на определенные места в конспекте лекций [7], содержащие теоретическую справку. Варианты условия в каждом задании не всегда однотипны и не всегда жестко привязаны к образцу решения — остается место для творческой мысли учащихся. Большинство задач являются результатом авторской разработки: составлены новые варианты условий на классические сюжеты и новые сценарии задач. Преобладают задания вычислительного характера, что соответствует прикладной ориентации курса. Ресурсы абстракции, по природе присущие функциональному анализу, использованы для взгляда сверху на вычислительные задачи с разнообразным конкретным содержанием. В этом заключается отличие данного сборника от большинства существующих задачников, где практикуется уход от конкретного содержания к абстрактным схемам и от вычислений к упражнениям на доказательство.

Все задачи можно разделить на два типа. К первому типу относится большое количество задач, которые можно выполнить без привлечения электронных средств вычисления. Фундамент практического курса выстроен на простейших одношаговых задачах, решение которых сводится к грамотному использованию определения или формулы. Например, проверка принадлежности элемента какому-либо пространству, вычисление нормы, метрики, скалярного произведения для конкретных функций, применение неравенств треугольника, Коши – Буняковского, Гельдера, проверка линейности пространства или оператора и т. д. Эта группа «детских» задач составлена специально, чтобы компенсировать существующее пренебрежение к примитивной разминке со стороны академического функционального анализа. На эти задания опирается надстройка из более состоятельных аналитических упражнений, примерно соответствующих типичным представителям классических сборников. Например, исследование сходимости конкретной последовательности в данном пространстве, вычисление размерности линейного подпространства, проверка полноты системы, построение обратного оператора, поиск собственных чисел и функций оператора, исследование непрерывности и непрерывной обратимости оператора, оптимизация простейших функционалов. При разработке таких заданий наибольшую пользу принес лабораторный практикум [4].

Ко второму типу относятся достаточно объёмные задания, заведомо рассчитанные на численную реализацию с помощью прикладных математических пакетов. Блок таких заданий завершает каждый из изучаемых модулей. Методическая разработка в этом направлении начиналась с исследования численных методов, органично вытекающих из теории функционального анализа. Затем последовал поиск типовых расчетов с использованием этих методов, которые можно было бы приспособить к языку и целеполаганию адаптированного курса «Функциональный анализ». Однако в конце концов пришлось самостоятельно вывести гибридную породу задач, которые предполагают как алгоритмизацию численного метода, так и обоснование его эффективной работы средствами функционального анализа. Получился ряд новых солидных задач, актуальность которых была отмечена еще тридцать лет назад в книге [5]. Далее приводим обзор заданий этого типа, которые вошли в предлагаемый сборник.

В первом модуле, посвященном теории сжимающих операторов, имеется широкая подборка уравнений, для которых следует применить принцип сжимающих операторов и в одном из математических пакетов найти приближенное решение методом простых итераций. Особое внимание уделяется грамотному использованию априорной и апостериорной оценок числа итераций. Представлено несколько типов уравнений.

1. Дано числовое уравнение, т. е. уравнение с одной вещественной неизвестной. Преобразовать уравнение к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов. Методом простых итераций найти приближенное решение с точностью 10^{-5}, используя априорную и апостериорную оценки числа итераций.
$$2x - \cos(x) + \sin(x) + \operatorname{arctg}(x) = 2.$$
2. Дана система линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Преобразовать систему к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов. Методом простых итераций найти приближенные решения с точностью 10^{-2} и с точностью 10^{-4}, используя априорную и апостериорную оценки числа итераций. Найти точное решение системы и сравнить с приближенными.
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 + \ \ x_4 = -70 \\ 3x_1 - \ \ x_2 \qquad\quad + 5x_4 = -2 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 + 9x_4 = \ \ 59 \\ 12x_1 + 5x_2 + 6x_3 + \ \ x_4 = -276 \end{cases}$$
3. Дано нелинейное уравнение в пространстве непрерывных функций $C[a;b]$. Используя принцип сжимающих операторов, доказать, что данное уравнение имеет единственное решение $x(t) \in C[a;b]$. Методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с точностью $\varepsilon = 0.01$, используя априорную оценку числа итераций. В качестве ответа предъявить график приближенного решения.
$$x(t) + t^2 = \frac{7}{4}\sqrt{1 + |x(t)|}, \quad [a;b] = [-3;3].$$
4. В пространстве $C[0;1]$ дано интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, содержащее числовой параметр $\lambda > 0$. Определить, при каких значениях параметра λ к этому уравнению применим принцип сжимающих операторов. Взять любое подходящее значение λ и методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с указанной точностью ε используя априорную оценку числа итераций. Найти точное решение уравнения и сравнить с приближенным.
$$x(t) = \lambda \int\limits_0^1 (t - s^2)\, x(s)\, ds + t^3 + 1, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$
5. Дана задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка. Найти точное решение задачи Коши. Преобразовать задачу Коши

к интегральному уравнению Вольтерры и методом простых итераций найти несколько первых приближений к точному решению. Проиллюстрировать графически сходимость приближенных решений к точному.

$$x' = x\cos t + \sin 2t, \quad x(0) = -1.$$

Второй модуль, посвященный теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве, завершается задачами на аппроксимацию функции частичной суммой ряда Фурье по тригонометрической системе или по одной из полиномиальных систем с реализацией в одном из математических пакетов. Особое внимание уделено графической иллюстрации происходящего. Представлены такие виды заданий.

6. Провести процесс ортогонализации конечной системы $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ в гильбертовом пространстве $L^{2,\xi}(a,b)$, где скалярное произведение оснащено весом $\xi = \xi(t)$.

$$L^{2,\xi}(-1;1), \quad \xi(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}.$$

7. Дана функция $x = x(t)$ в гильбертовом пространстве $L^2(-1;1)$ со стандартным скалярным произведением. Для функции x в этом пространстве требуется найти многочлен наилучшего приближения первой степени и многочлен наилучшего приближения второй степени. Построить графики функции x и полученных многочленов.

$$x(t) = \begin{cases} t, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

8. Вычислить несколько первых коэффициентов Фурье для функции $x = x(t)$ по указанной системе многочленов. Подтвердить графически сходимость ряда Фурье к функции x.

$$x(t) = -\frac{4t}{1+t^4} \text{ — многочлен Эрмита.}$$

9. Аппроксимировать функцию $x = x(t)$ в пространстве $L^2(-1;1)$ двумя способами: при помощи ортогональной тригонометрической системы и при помощи ортогональных многочленов Лежандра. Число n — заданный порядок аппроксимации. Построить графики функции x и полученных аппроксимаций. Сравнить точность аппроксимаций в метрике пространства $L^2(-1;1)$.

$$x(t) = \sqrt{|t|}, \quad n = 5.$$

10. Аппроксимировать функцию $x = x(t)$ на промежутке $[-1;1]$ двумя способами: при помощи ортогональных многочленов Чебышёва I рода и при помощи многочлена Тейлора с центром в нуле. Число n – заданный порядок аппроксимаций. Построить графики функции x и полученных аппроксимаций. Ответить на следующие вопросы, обосновав ответы численно: а) какой способ дает лучшую аппроксимацию вблизи нуля; б) какой способ дает лучшую равномерную аппроксимацию на промежутке $[-1;1]$?

$$x(t) = (2t+1)e^{-t^2}, \quad n = 4.$$

11. Даны числа c_k — коэффициенты разложения некоторой элементарной функции $x = x(t)$ в ряд Фурье по указанной системе многочленов. Восстановить функцию x: построить график частичной суммы ряда Фурье достаточно высокого порядка; по виду графика сделать предположение о том, что представляет из себя функция x (какова её формула). Обосновать предположение численно.

$$c_{2k+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p}\,(2k+1)^2}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ — многочлены Чебышёва I рода.}$$

Третий модуль нацелен на практическое освоение теории линейных операторов и оптимизации функционалов. Особое внимание уделено переходу от частной формулировки задачи к постановке в абстрактной операторной форме и наоборот, а также грамотной оценке точности приближенного результата и графической интерпретации. В этом модуле имеются следующие типы расчетных заданий с реализацией в математических пакетах.

12. Найти решение уравнения $A[x] - \lambda x = y$ в виде ряда Фурье по собственным функциям симметричного дифференциального оператора A, действующего в одном из весовых пространств $L^{2,\xi}(a;b)$. Проиллюстрировать решение графически.

$$A[x] = (t^2-1)x'' + tx', \quad \lambda = 5, \qquad y = 20t^3 + e'(6 - y - t^2) - 5.$$

13. Имеется симметричный интегральный оператор Фредгольма $A : L^2(a;b) \to$ $\to L^2(a;b)$ с ядром $K(t,s)$. Построить систему собственных чисел и собственных функций оператора A. Найти решение уравнения $A[x]-\lambda x = y$ в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора A. Проиллюстрировать решение графически.

$$K(t,s) = \begin{cases} \cos t\,\sin s, & 0 \le s \le t \\ \cos s\,\sin t, & t < s \le \pi \end{cases}, \quad \lambda = \frac{2}{\pi}, \quad y = |\sin 2t|.$$

14. Имеется интегральный оператор Фредгольма $A : C[0;1] \to C[0;1]$ с ядром $K(t,s)$. Доказать, что оператор $I - A$ непрерывно обратим, где I — тождественный оператор. Найти приближенное решение уравнения $x - A[x] = y$ с точностью ε, используя сочетание метода замены ядра на вырожденное и метода простых итераций. Проиллюстрировать решение графически.

$$K(t,s) = \frac{t^4}{4}\sqrt{4 + t^2 + s^2}\,, \quad y = 5t(t-1)^2, \quad \varepsilon = 10^{-2}.$$

15. Имеется нелинейный функционал $F : L^2(a;b) \to R$, принимающий единственное экстремальное значение на своей области определения D_F. При помощи уравнения Эйлера–Лагранжа найти экстремум функционала F и установить его тип (максимум или минимум). Методом Ритца провести приближенную оптимизацию функционала F. Проиллюстрировать графически сходимость приближений, полученных методом Ритца, к точному решению экстремальной задачи.

$$Fx = \int_{-1}^{1} \Big((x' - 4\sin 2\pi s)^2 - x\Big) ds,$$

D_F — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям $x(-1) = 2$, $x(1) = -1$.

16. Дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка с однородными граничными условиями (задача Дирихле). Обосновать единственность его решения и возможность применения методов Галёркина и наименьших квадратов. Найти приближенное решение с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$, используя указанный метод с координатной системой e_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Проиллюстрировать решение графически.

$$\begin{cases} -\cos t \cdot x'' + \sin t \cdot x' + 0.5e^t \cdot x = 15\cos 2\pi t + 16\sin t, \\ x(0) = x(1) = 0; \end{cases}$$

$$\text{метод Галёркина, } e_k = t^k(t-1).$$

17. Дано линейное интегральное уравнение Фредгольма. Обосновать единственность его решения и возможность применения методов Галёркина и наименьших квадратов. Найти приближенное решение с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, используя указанный метод с координатной системой $e_k = t^k$, $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Проиллюстрировать решение графически.

$$x(t) - \int\limits_0^1 \ln(1+t+s)\, x(s)\, ds = 10t(1-t)^3, \text{ метод наименьших квадратов.}$$

18. Даны коэффициенты p и q симметричного положительно определенного оператора Штурма–Лиувилля $A[x] = -(px')' + qx$. Дана функция x. Для оператора A составить задачу Дирихле на промежутке $(a; b)$, решением которой является функция x. Апробировать на этой задаче метод Галёркина с тремя разными произвольно выбранными координатными системами. Провести сравнительный анализ скорости сходимости. Выводы проиллюстрировать графически и численно.

$$p(t) = 1 + t^2, \quad q(t) = -1, \quad (a; b) = (0; 1), \quad x = e^{3t}(4t - 3t^2 - 1).$$

Все перечисленные задания двусоставны: решение предполагает аналитическую часть и расчеты на компьютере. Объем расчетов таков, что их невозможно проделать вручную. Образцы решения содержат необходимый теоретический анализ и конечные результаты компьютерной реализации, численные и графические. Расчетные программы не приводятся, чтобы не ограничивать свободу выбора среды и средств программирования, да и, кроме того, поставить дополнительное препятствие нетворческому копированию образца решения. Для реализации расчетов достаточно владеть элементарными навыками программирования в одном из математических пакетов (при составлении образцов использован пакет Maple).

Задания такого типа воплощают в себе сочетание функционального анализа и вычислительной математики, поскольку для их решения предлагается, во-первых, принять язык и точку зрения функционального анализа, во-вторых, по возможности пройти теоретический путь к расчетным формулам, а не пользоваться готовыми рецептами. Для примера приведем с некоторыми сокращениями образец решения задачи 15 (см. выше условие), которая относится к наиболее сложным.

Образец решения задачи 15

Данный функционал F действует в гильбертовом пространстве $L^2(-1;1)$.

Поставлена классическая задача оптимизации. Требуется найти единственное экстремальное значение функционала:

$$\min_{x \in D_F} F[x] \quad \text{или} \quad \max_{x \in D_F} F[x]$$

и элемент $\hat{x} \in D_F$, на котором оно достигается. Решение этой задачи опирается на принципы точной и приближенной оптимизации функционала в гильбертовом пространстве, которые предоставляет § 18 конспекта лекций, пункты 18.2–18.3.

А. Найдем экстремум функционала F при помощи уравнения Эйлера – Лагранжа.

Необходимое условие экстремума выражается операторным уравнением Эйлера – Лагранжа:

$$F'[x] = 0,$$

где $F'[x]$ — градиент функционала F. Продемонстрируем наиболее прямой способ его вычисления, который заключается в том, чтобы непосредственно выделить линейную часть приращения функционала (первую вариацию) и преобразовать её к виду скалярного произведения, затем выразить градиент.

Зафиксируем функцию $x \in D_F$, рассмотрим такие приращения $\Delta x \in H$, что $x+\Delta x \in D_F$. Отсюда ясно, что функция Δx должна быть дважды непрерывно дифференцируемой и должна удовлетворять нулевым граничным условиям $\Delta x(-1) = \Delta x(1) = 0$. Составим приращение функционала:

$$F[x+\Delta x]-F[x] = \int_{-1}^{1}\Big(\big((x+\Delta x)'-4\sin 2\pi s\big)^2-(x+\Delta x)\Big)ds - \int_{-1}^{1}\big((x'-4\sin 2\pi s)^2-x\big)ds =$$

$$= \int (\Delta x')^2 ds + 2\int_{-1}^{1}(x] - 4\sin 2\pi s)\Delta x'\, ds - \int_{-1}^{1}\Delta x\, ds.$$

Выделяем в этом приращении компоненту, которая линейна относительно Δx. Получается первая вариация функционала:

$$\delta_x F[\Delta x] = 2\int_{-1}^{1}(x' - 4\sin 2\pi s)\,\Delta x'\, ds - \int_{-1}^{1}\Delta x\, ds.$$

Далее необходимо преобразовать получившееся выражение первой вариации к виду скалярного произведения $F'[x]$ на функцию Δx в пространстве $L^2(-1;1)$. Для этого в первом интеграле используем интегрирование по частям и свойства функции Δx:

$$\begin{aligned}
\delta_x F[\Delta x] &= 2\int_{-1}^{1}(x' - 4\sin 2\pi s)\cdot\Delta x'\, ds - \int_{-1}^{1}\Delta x\, ds = \\
&= \underbrace{2(x' - 4\sin 2\pi s)\cdot\Delta x\Big|_{-1}^{1}}_{=0} - 2\int_{-1}^{1}(x'' - 8\pi\cos 2\pi s)\cdot\Delta x\, ds - \int_{-1}^{1}\Delta x\, ds = \\
&= \int_{-1}^{1}(16\pi\cos 2\pi s - 2x'' - 1)\cdot\Delta x\, ds = (F'[x], \Delta x).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем градиент функционала F:

$$F'[x] = 16\pi\cos 2\pi s - 2x'' - 1.$$

Таким образом, уравнение Эйлера–Лагранжа в данном случае равносильно задаче Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$F'[x] = 0, \quad x \in D_F \Longleftrightarrow \begin{cases} x'' = 8\pi\cos 2\pi s - \dfrac{1}{2} \\ x(-1) = 2, \quad x(1) = -1 \end{cases}.$$

Решая задачу Дирихле, находим единственную функцию, которая обеспечивает экстремум функционалу F:

$$\hat{x} = \frac{8 + 3\pi}{4\pi} - \frac{3}{2}\,s - \frac{1}{4}\,s^2 - \frac{2}{\pi}\,\cos 2\pi s.$$

Тип экстремума — минимум, поскольку на любой другой функции значение функционала F получается больше:

$$\min_{x \in D_F} F[x] = F[\hat{x}] \approx 2.06.$$

B. Проведем приближенную оптимизацию функционала F методом Ритца и проиллюстрируем графически результат.

Заметим, что область определения функционала не является линейным подпространством в $L^2(-1;1)$ (из-за ненулевых граничных условий) — это препятствие для реализации классического метода Ритца, но легко преодолимое. Выберем и зафиксируем произвольную функцию $x_0 \in D_F$, например, $x_0(s) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\,s$. Тогда любой элемент $x \in D_F$ можно представить в виде суммы $x = x_0 + \widetilde{x}$, где $\widetilde{x} \in \widetilde{D}_F$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям $x(-1) = x(1) = 0$. Множество $\widetilde{D}_F$ является линейным подпространством в $L^2(-1;1)$.

Далее согласно методу Ритца выберем полную линейно независимую систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L^2(-1;1)$, такую что $e_k \in \widetilde{D}_F$:

$$e_k = (s-1)^k(s+1).$$

Минимизацию функционала F на D_F заменим минимизацией на элементах вида $x_n = x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i$:

$$F[x_n] = \int\limits_{-1}^{1} \left(\left(x_0' + \sum_{i=1}^{n} c_i e_i' - 4\sin 2\pi s \right)^2 - x_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\} ds.$$

Поскольку элементы x_n отличаются друг от друга только набором числовых коэффициентов c_k, то $F[x_n] = F(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — числовая функция n вещественных переменных. Необходимое условие экстремума для функции нескольких переменных — равенство нулю её градиента, т. е. всех частных производных:

$$\frac{\partial F(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.7}$$

Дифференцирование интеграла по параметрам c_k и несложные преобразования приводят к системе n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c_i \cdot \int\limits_{-1}^{1} 2e_i' e_k'\, ds \right) = \int\limits_{-1}^{1} \big((8\sin 2\pi s - 2x_0')\, e_k' + e_k \big) ds, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Проведем численное решение этой системы для разных n. Построим несколько приближений x_n, например, x_1, x_5, x_7. На рисунках 1, 2, 3 изображены график функции $\hat{x}$ и графики приближений x_1, x_5, x_7 (пунктиром).

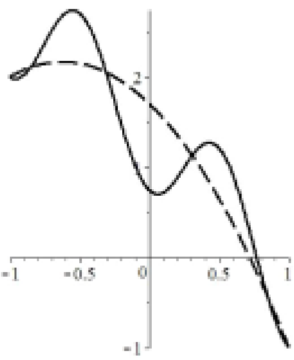

Рис. 1

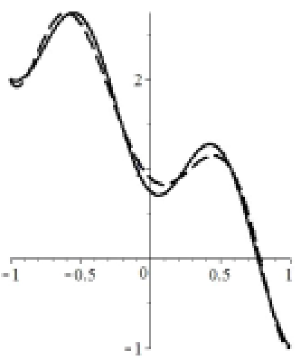

Рис. 2

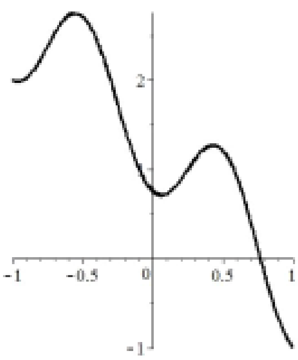

Рис. 3

По графикам можно наблюдать сходимость приближений, полученных методом Ритца, к точному решению экстремальной задачи. Задача решена.

Среди перечисленных задач 1–18, предназначенных для реализации в математических пакетах, многие обладают синтетическим характером: для их решения требуется привлечь инструменты из разных модулей курса или из других разделов математики, изученных ранее (таковы задания 2, 5, 10, 12, 13, 14, 15).

Поскольку задачи 1–18 тяжелы для тщательной пошаговой проверки, то в большинстве образцов решения присутствуют элементы самоконтроля: с помощью сравнения приближенного решения с точным, с помощью подстановки приближенного решения в уравнение, посредством графической констатации сходимости и т. д. Причем отрабатывается способность различать полноту проверки: есть методы, позволяющие контролировать достоверность решения, а есть действия, приводящие к выводу только лишь о правдоподобии решения.

Некоторые задачи оснащены элементами творческого исследования:

- сравнительный анализ эффективности родственных методов решения (задачи 9, 10, 18);
- анализ зависимости от параметра (задача 4);
- возможность самостоятельного выбора некоторых исходных данных (задачи 4, 18);
- решение путем выдвижения гипотезы и её проверки (задача 11).

Однако эти элементы включены в задачи в деликатных дозах, поскольку главную цель разработки составляет создание широкой базы вычислительных задач, доступных для среднего студента, а не только для продвинутого.

Таким образом, описанные задания второго типа, занимают центральное место в модернизированном практическом курсе функционального анализа [8]. Они достаточно крупные и представляют некий многошаговый вычислительный проект, направленный как на постижение архитектуры расчета, так и на получение практически приемлемого результата.

4. Принципы организации учебного процесса

Рассматриваемый учебный комплекс [7, 8] позволяет и отчасти вынуждает реорганизовать учебный процесс по дисциплине «Функциональный анализ» в соответствии со следующими принципами.

Во-первых, конспект лекций и сборник задач построены таким образом, чтобы сделать предмет максимально доступным для самостоятельного освоения и с первых же занятий активизировать учебную деятельность студентов в условиях жестких ограничений учебного времени. Если не тратить занятия на последовательный и подробный разбор всего материала, а перевести учебный процесс в режим обзорных лекций и консультаций по задачам, то удается оптимизировать расход аудиторных часов. Обзорные лекции целесообразно ограничить небольшим количеством формальных данных и посвятить разностороннему обсуждению ключевых математических идей и сопутствующих внематематических ассоциаций. Курс функционального анализа остро нуждается в таком подходе, поскольку подводит определенный итог накопленному и разрозненному опыту при изучении других разделов математики. В обзорные лекции можно включить, например, такие вопросы: проблема сходства и различия между объектами, которая численно решается с помощью подходящей метрики; какой бывает сходимость и каковы причины её видового разнообразия; линейность как универсальное позитивное качество математических конструкций и нелинейность как источник неприятностей; разложение и аппроксимация функций — в чем отличие и как это делается; общее понятие непрерывности и роль, которую играет непрерывность во всех сценариях приближенных методов; относительная простота и привлекательность конечномерных пространств, приближенные методы, основанные на редукции к конечномерной задаче. Конспект лекций призван подготовить и подтолкнуть читателя к размышлениям об идеологии происходящего в математике. Соответствующие обзорные лекции могут существенно усилить этот эффект.

Во-вторых, предлагаемый сборник задач удобен для использования балльно-рейтинговой системы учета знаний. Как известно, она отличается тем, что обеспечивает определенную вариативность обучения (в предложенных рамках позволяет студенту выбрать задания по вкусу и по силам), мотивирует сильных студентов к решению сложных задач и дает возможность найти свою нишу для слабых, создает естественные условия для дифференцированного зачета по практике, что весьма актуально в ситуации постепенной дискредитации теоретического экзамена. Обширный банк разноуровневых задач с большим количеством вариантов был специально разработан для потенциального распределения баллов: например, от 1 балла за простейшую одношаговую задачу до 10 баллов за многошаговый расчет с реализацией в математическом пакете (такого типа расчеты могут также использоваться для постановки курсовых задач).

В-третьих, при проведении практических занятий на базе данного учебного комплекса происходит перенос акцентов с техники ручного счета на организацию электронного вычислительного процесса. Такой перенос неизбежен в современных условиях (по крайней мере после изучения основ дифференциального и интегрального исчисления), востребован студентами прикладных специальностей, отвечает потребностям их будущей профессии. Новые поколения студентов испытывают несомненную симпатию к вычислительной технике, однако грамотное использование математических пакетов не формируется само собой. Базой, разумеется, является уверенное владение языком (синтаксисом) того или иного математического пакета. Для этого служат отдельные курсы в рамках учебной программы прикладных специальностей и множество самоучителей, размещенных в интернете. Но остаются нетронутыми специфические проблемы, связанные с различиями схоластической (учебной, книжной) и компьютерной математики, которые требуют внимания на начальном этапе эксплуатации математических пакетов.

Для примера перечислим типичные трудности, которые возникают у студентов, когда после продолжительных рукопашных схваток с интегральным исчислением они наконец получают право пользоваться компьютером. Большинство учащихся теряются, если компьютер выдает ответ в виде символьного выражения со специальными функциями, многие их которых студент видит впервые (или вообще не помнит, что бывают «неберущиеся» интегралы). Студенты подозревают сбой программы, поскольку до сих пор ни на одной контрольной работе они такого не встречали. Многих ставит в тупик ситуация, когда разные математические пакеты дают разные (по виду) ответы для одного и того же интеграла. Начинают распространяться слухи, что «такой-то пакет интегрирует неправильно, считай лучше в этом». Кроме того, большинство студентов не догадываются, что во многих случаях компьютер вычисляет определенный интеграл не по формуле Ньютона – Лейбница, а прибегает к численному интегрированию, причем ответ получается приближенным и допущенную погрешность бывает важно контролировать. Наконец, математические пакеты требуют гораздо более ответственного отношения к работе с типами данных (числами, переменными, выражениями, функциями), чем это принято в беглых расчетах на листочке бумаги. В частности, мало кому из студентов удается избежать недоразумений, когда в программе задействованы интегралы с переменным верхним пределом или с параметром, которые участвуют в каких-то операциях в качестве функций.

На самом деле опыт компьютерного интегрирования не отбивает охоту в аналитическом изучении интеграла, а помогает убедиться, что это не пустая трата времени. Иногда вручную вычислить несложный интеграл проще, чем переваривать полученный в математическом пакете ответ, упакованный почему-то не в оптимально компактном виде. К тому же компьютер регулярно капризничает, «не хочет считать» или «врет». Зачастую это связано с тем, что начинающий пользователь не знаком с какими-то подводными камнями в работе математического пакета. Понимание свойств интеграла способствует скорейшему выявлению таких нюансов, да и вообще помогает контролировать корректность выполнения многошаговой программы и находить ошибки в составленном алгоритме.

Вообще говоря, есть такие вычислительные навыки, которые оттачиваются именно на многошаговых компьютерных расчетах, а не при выполнении отдельных элементарных действий вручную. В первую очередь это касается округления числовых величин. При решении учебных задач, подобранных для ручного счета, идея что-то округлить, как правило, приходит не из-за реальной необходимости, а скорее по вдохновению: почему бы не взять $\pi \approx 3{,}14$. А зачастую даже так: $\pi = 3{,}14$. Всё равно окончательный ответ никуда больше не идет, кроме как на проверку преподавателю. В компьютерной программе, где несколько десятков числовых операций с неотобранными данными, без округлений обойтись невозможно. Если же в самом начале присвоить $\pi = 3{,}14$, как это делают по привычке некоторые студенты, то к концу программы накопленная погрешность может быть столь велика, что результат будет очевидно искаженным. Эта примитивная ловушка уже заставляет задуматься об ответственности за каждое из предпринятых округлений. А сколько еще более тонких сетей расставляют математические пакеты, чья эффективность зиждется на приближенных расчетах.

Вряд ли будет ошибкой сказать, что грамотное использование электронных вычислительных средств и квалифицированная интерпретация результатов должны стать одной из основных целей обучения не только функциональному анализу, но вообще математике в техническом вузе. В связи с этим предлагаемый сборник задач [8] дает возможность, с одной стороны, повторить изученные ранее навыки ручного счета, с другой стороны, позволяет всем желающим как можно скорее обращаться к математическим пакетам для реализации технических выкладок и подталкивает к этому, когда учебный процесс в конце каждого модуля подходит к объемным задачам, рассчитанным на использование компьютера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Физматлит, 2007. 488 с.
2. Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: Физматлит, 2005. 296 с.
3. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1988. 400 с.
4. Антоневич А. Б., Ваткина Е. И., Мазель М. Х. и др.; / под ред. Антоневича А. Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения: лабораторный практикум. — Минск: БГУ, 2003. 179 с.
5. Треногин В. А., Писаревский В. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — М: Наука, 1984. 256 с.
6. Мышкис А. Д. О преподавании математики прикладникам // Математика в высшем образовании. 2003. № 1, С. 37–52.
7. Филимоненкова Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу. — СПб.: Лань, 2015. 276 с.
8. Филимоненкова Н. В. Сборник задач по функциональному анализу. — СПб.: Лань, 2015. 240 с.

Поступила 18.08.2015

TEACHING FUNCTIONAL ANALYSIS IN A TECHNICAL UNIVERSITY: METHODOLOGICAL ASPECT

N. V. Filimonenkova

The paper is devoted to the solving of problems in teaching functional analysis to future engineers. It summarizes methodological approaches that form the basis of a new educational complex and gives its characteristics and recommendations for use.

Keywords: functional analysis, computational mathematics, educational complex, applied orientation.