
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ.
ПЕРСОНАЛИИ

УДК 511, 517.13

**АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД И ТЕОРИЯ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ЛЕКЦИЯХ
А. Н. КОЛМОГорова**

В. М. Тихомиров

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Россия, 119899, г. Москва, Ленинские горы 1;
e-mail: vmtikh@gmail.com*

Излагается теория действительных чисел, представленная А. Н. Колмогоровым в курсе «Анализ III», читавшемся им осенью 1954 г. на мехмате МГУ. В связи с этим обсуждается архитектура математики, базирующаяся на аксиоматическом методе.

Ключевые слова: аксиоматический метод, действительное число, поле, порядок, полнота.

Мехматский курс «Анализ III»

Осенью 1954 года третьему курсу мехмата, на котором учился автор этих строк, А. Н. Колмогоров начал читать курс «Анализ III». Это был первый синтетический (т. е. вбиравший в себя многие разделы математики) курс в истории мехмата МГУ. Программа курса была разработана А. Н. Колмогоровым в сороковые и пятидесятые годы прошлого века. В лекциях по «Анализу III» объединялись начала теории множеств, теория действительных чисел, начала общей топологии и теории функций, функциональный анализ, теория меры, теория интеграла, теория интегральных уравнений, вариационное исчисление и кое-что ещё.

Это был очень насыщенный курс. Первые лекции были посвящены элементарнейшим сведениям из теории множеств, а в заключительной обзорной лекции первого семестра — «Теория меры и динамические системы», — прочитанной в декабре 1954 года, рассказывалось о понятии динамической системы, об эргодичности, о теореме Пуанкаре–Каратеодори о возвращении, затем о динамических системах классической механики и завершалось всё рассказом о результате, полученном лектором лишь полгода тому назад и доложенном в августе того же 1954 года на Международном конгрессе математиков в Амстердаме. Этот результат положил начало КАМ-теории (теории Колмогорова–Арнольда–Мозера), в которой в частном случае была решена проблема устойчивости планетной системы — проблема, стоявшая со времён Кеплера и Ньютона.

Но мы здесь коснёмся лишь одной из исходных точек этого курса. После краткого введения, в котором напоминались начальные определения и факты теории множеств, Андрей Николаевич в течение трёх лекций рассказал аксиоматическое построение действительных чисел. Эти три лекции курса «Анализ III» были прекрасным введением в «архитектуру математики».

Аксиоматический метод

Для математиков поколения Колмогорова аксиоматический метод входил в число выдающихся интеллектуальных достижений математического мира. На нём основывалась идея построения здания, в котором возможно «с полной строгостью» разместить всю математику. В конце XIX в. Г. Кантор заложил основы теории множеств, которая по его замыслу должна была располагаться в основании всей математики. Приверженцами идеи построения всей математики на базе теории множеств аксиоматическим методом были Д. Гильберт, Г. Вейль и другие выдающиеся математики начала XX века. Эту идею разделял и А. Н. Колмогоров. Для подтверждения этого приведу слова из его статьи «Математика» во втором издании Большой Советской Энциклопедии: «Теоретико-множественная концепция доставила не только основной в настоящее время «стандарт математической строгости», но и позволила в значительной мере разобраться в разнобразии возможных математических теорий и их систематизировать»[1].

Когда Андрей Николаевич в середине шестидесятых годов начал осуществлять реформу школьного математического образования, он задумал прочитать цикл лекций для учителей, посвящённый новым идеям в преподавании математики. Лекции состоялись в 1968–69 гг. Первая лекция называлась: «Современные взгляды на природу математики». В самом её начале концепция современной математики характеризуется следующими двумя тезисами:

«А. В основе всей математики лежит чистая теория множеств.

Б. Специальные разделы структур занимаются структурами, принадлежащими к тем или иным специальным родам структур. Каждый род структур определяется соответствующей системой аксиом, выраженной на языке теории множеств»[2].

Общий замысел аксиоматического метода восходит к «Началам» Евклида. Однако ещё Лейбниц заметил неполноту евклидовой системы аксиом при чтении доказательства первой же теоремы «Начал». Столетия ушли на попытки вывести из других аксиом Евклида его аксиому о параллельности. Удовлетворительная аксиоматика геометрии была построена лишь в самом конце XIX века: в 1899 году вышла книга Гильберта «Основания геометрии», в которой впервые на примере евклидовой плоской геометрии было соединено всё, что составляет сущность аксиоматического подхода: были обсуждены проблемы полноты системы аксиом, её непротиворечивости и построена модель аксиоматики. Это произвело очень большое впечатление на современников.

В тридцатые годы прошлого века группа французских математиков под псевдонимом «Николя Бурбаки» (позже в неё вошли несколько иностранцев) начала реализацию проекта построения всей математики на основе теории множеств и аксиоматического метода. В результате постепенно было написано и издан многотомный трактат «Начала математики» (в русском переводе — «Элементы математики»). В пятидесятые годы прошлого века, после одного из визитов во Францию, Колмогоров привёз несколько томов этого сочинения и рассказывал об этом трактате на заседании Московского математического

общества.

В трактате «Очерки по истории математики» [3] предпринята попытка обозреть всю историю математики с единой позиции, в которой главенствующую роль играет аксиоматический метод. Коллективу математиков, объединившихся под именем Бурбаки, казалась осуществимой поставленная цель построения Единого Храма Математики, и заключительная часть «Очерков» имеет название «Архитектура математики», где Бурбаки пытается наметить архитектурные контуры всего здания.

... Прошло совсем немного лет, и стало очевидным, что Вавилонскую башню Математики группе Бурбаки построить не удастся. А сама идея такого построения многими выдающимися представителями поколения учеников Колмогорова была подвергнута осмеянию.

Но тем не менее, ознакомление с этой неосуществимой идеей, которой были, однако, захвачены великие представители нашей науки, мне представляется заслуживающим внимания. В трактате «Очерки по истории математики» есть параграф «Действительные числа»¹. И я предлагаю краткий конспект цикла из трёх лекций А. Н. Колмогорова из его курса «Анализ III», который был озаглавлен

Теория действительных чисел

В самом начале первой лекции, посвящённой обозначенному нами предмету, было дано аксиоматическое определение множества действительных чисел. Было сказано, что эта совокупность (сейчас её обозначают $\mathbb{R}$) является *полным упорядоченным полем*.

Это краткое определение на лекции подробно комментировалось: пусть множество R — полное упорядоченное поле. Термин *поле* означает, что R оснащено двумя операциями — сложением (которое обозначается обычно знаком $+$) и умножением (умножение обозначается знаком $\cdot$ или никак не обозначается). По сложению R — абелева группа с нейтральным элементом нуль (0), по умножению множество R без нуля тоже является абелевой группой с нейтральным элементом единица (1), операции сложения и умножения связаны между собой законом дистрибутивности: $a(b + c) = ab + ac$. При этом предполагается, что нуль не совпадает с единицей (т. е. поле содержит более одного элемента).

Слова «упорядоченное поле» (точнее, *линейно упорядоченное поле*) означают, что среди элементов множества R имеется полное упорядочение, т. е. любые два элемента a и b связаны одним из соотношений: $a < b$, $a > b$ или $a = b$ (причём одновременное выполнение $a < b$ и $a > b$ влечёт $a = b$). При этом если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$, и ещё упорядоченность связывается с операциями двумя аксиомами: из $a < b$ следует, что 1) $\forall c \in R : a + c < b + c$ и 2) $\forall c > 0 : ac < bc$.

¹ Первые четыре тома Н. Бурбаки имели такие названия: 1. Теория множеств. 2. Алгебра. 3. Общая топология. 4. Функции действительного переменного. Это уже само по себе указывает место действительных чисел в строении всей математики.

Далее доказывалась

Лемма. В упорядоченном поле $0 < 1$.

(Действительно, если допустить, что $1 < 0$, то, прибавив к обеим частям по -1 , получим, что $-1 > 0$, но тогда $1 = (-1)(-1) > 0$ — противоречие.)

В итоге приходим к обычному упорядочению целых чисел $\dots -2 < -1 < 0 < 1 < 2 \dots$, и возникают дроби.

Далее приводился пример поля, состоящего из двух элементов, и шли замечания лектора: 1) упорядоченное поле не может быть конечным и 2) конечное поле нельзя упорядочить. Затем говорилось о том, что алгебра и порядок позволяют ввести понятие ε -окрестности $U(\hat{x}, \varepsilon)$ точки $\hat{x} \in R$: $U(\hat{x}, \varepsilon) = \{x \in R \mid \hat{x} - \varepsilon < x < \hat{x} + \varepsilon\}$, т. е. оснастить R топологией, и, в частности, определить понятие предела последовательности.

На этом с алгеброй и порядком всё было закончено и лектор перешёл к последней аксиоме — аксиоме полноты. Колмогоров называл её аксиомой непрерывности. Он привёл ряд аксиом непрерывности и доказал их эквивалентность. Эти аксиомы связаны с именами тех выдающихся математиков XIX века, кому математический анализ обязан своей логической стройностью — Дедекинда, Больцано, Вейерштрасса, Кантора и Коши.

Вот эти аксиомы:

А) Аксиома Дедекинда о сечении. Если множество R представлено как объединение двух непустых непересекающихся множеств X и Y , причём каждый элемент из X меньше любого элемента из Y , то существует элемент z такой, что $x \leq z \leq y$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$ (или, что то же: либо в X существует максимальный элемент, либо в Y существует минимальный элемент).

В) Аксиома Больцано о существовании точной верхней (нижней) грани. Любое множество $S \subset R$, ограниченное сверху (снизу), имеет точную верхнюю (нижнюю) грань (т. е. элемент M (m) такой, что $x \leq M \forall x \in S$ ($x \geq m \forall x \in S$) и для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $\bar{\xi}(\varepsilon) \in S$ ($\underline{\xi}(\varepsilon) \in S$) такой, что $\bar{\xi}(\varepsilon) > M - \varepsilon$ ($\underline{\xi}(\varepsilon) < m + \varepsilon$).

С) Аксиома Вейерштрасса о предельной точке. Любая ограниченная последовательность $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ элементов из R имеет предельную точку (т. е. элемент $\xi \in R$, в любой ε -окрестности которого содержится элемент последовательности, отличный от ξ).

Д) Аксиома Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности. Из каждой ограниченной последовательности элементов из R можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Е) Аксиома Больцано о монотонно-возрастающей (монотонно убывающей) последовательности. Ограниченная монотонно возрастающая (убывающая) последовательность элементов из R имеет предел.

В качестве следствия получается аксиома Кантора о вложенных отрезках: последовательность вложенных отрезков $\Delta_n = [a_n, b_n] \subset R$, $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ с длинами, стремящимися к нулю (т. е. $b_n - a_n \rightarrow 0$), имеет единственную общую точку ξ (т. е. $\xi \in \Delta_n \forall n$).

Г) Аксиома Архимеда² и аксиома сходимости фундаментальной последовательности Коши. Для любых положительных элементов α и β из R найдётся натуральное число n , для которого $\alpha n > \beta$ (аксиома Архимеда); фундаментальная последовательность элементов из R сходится (аксиома Коши). (Последовательность $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall m, n \in \mathbb{N}$ если $m, n > N$, то $|x_m - x_n| < \varepsilon$.) При этом делалось замечание о существовании неархимедова линейно упорядоченного полного поля, что объясняло необходимость присоединять к аксиоме Коши аксиому Архимеда.

Равносильность аксиом доказывалась такой цепочкой импликаций:

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow E \Rightarrow A \text{ и отдельно } D \Leftrightarrow F.$$

Далее строилось пополнение пространства дробей, состоящее из классов эквивалентных фундаментальных последовательностей. Здесь появилось ещё одно замечательное имя — Хаусдорф, который в общей ситуации описал процедуру пополнения и доказал его единственность. Андрей Николаевич обозначил это «хаусдорфово» пополнение символом R^* . Далее было показано, что это пополнение удовлетворяет аксиомам поля, линейного порядка и полноты. Элементы R^* были названы действительными числами. В R^* естественно вкладывались натуральный ряд $\mathbb{N}$, а также совокупности целых чисел и дробей $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$.

Оставалось доказать непротиворечивость аксиоматики и единственность построенного объекта *с точностью до изоморфизма*. Первое было осуществлено с помощью *арифметической модели* построенного объекта. Эта модель состоит из чисел вида $n.\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$, где n — целое число, а последовательность $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ двоичная, т.е. α_i либо нуль, либо единица, причём последовательности, оканчивающихся на одни единицы, не допускаются. А если предположить, что существует какое-то ещё полное упорядоченное поле $\tilde{R}$, то в нём есть $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, а значит, ряд $\tilde{\mathbb{N}}$, алгебраически и порядково изоморфный $\mathbb{N}$, то же происходит с совокупностью целых чисел $\tilde{\mathbb{Z}}$ и дробей $\tilde{\mathbb{Q}}$. Вследствие единственности процедуры пополнения оказывалось, что $\tilde{R}$, $\mathbb{R}$ и $\tilde{\mathbb{R}}$ изоморфны.

Таким образом, на данном объекте — действительных числах — была осуществлена программа, которая задумывалась для всех аксиоматически описываемых объектов: оказалось, что система аксиом действительных чисел полна (из-за единственности объекта) и непротиворечива (как принято говорить, *если непротиворечива сама арифметика* из-за построения арифметической модели).

Так были представлены нам фрагмент математического мира и ряд его выдающихся представителей XIX — начала XX века, введены важнейшие базовые математические понятия — алгебраические, порядковые, общетопологические — и установлены важные логические связи между ними.

И при этом для слушателей открылся путь к пониманию дальнейшего: вкладов С. Банаха, соединившего векторные пространства с метрикой (и по-

² Аксиому Архимеда часто называют аксиомой Архимеда — Евдокса.

строившего теорию банаховых (т. е. полных векторных метрических) пространств; фрагмент этой теории был включён в программу курса «Анализ III» и вошёл в учебник Колмогорова–Фомина), И. М. Гельфанда, соединившего банаховость с алгеброй (и построившего теорию банаховых алгебр; автор этой статьи, читая «Анализ III» в 1964/65 гг., включил теорию Гельфанда в свой курс и впоследствии написал главу о теории Гельфанда для учебника Колмогорова–Фомина) и Л. В. Канторовича, оснастившего векторные пространства порядком (такие пространства так и не попали в мехматское математическое образование, а в конце века обнаружилось, что построенные Канторовичем «векторные решётки» суть не что иное, как действительная прямая в некоем расширенном смысле).

Несколько слов в заключение. Книга Банаха по теории линейных операторов [4] произвела на А. Н. Колмогорова большое впечатление. Он отреагировал на неё введением в 1935 г. понятия топологического векторного пространства и дал критерий нормируемости таких пространств (и теория Банаха стала существенной частью курса «Анализ III»). А ещё чуть раньше А. Н. Колмогоров склонил к исследованиям в функциональном анализе двух своих учеников — И. М. Гельфанда и С. М. Никольского, защищавших в 1935 году в один день свои кандидатские диссертации. Чуть позже он с интересом воспринял и первые исследования Канторовича по векторным решёткам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Математика / В кн.: Большая Советская Энциклопедия (БСЭ-2), 1954. Т. 26. С. 454–483.
2. Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия. — М.: Наука, 1988. 288 с.
3. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. — М.: КомКнига, 2006. 296 с.
4. Banach S. Théorie des opérations linéaires. — Warszawa, 1932. 254 p.

Поступила 20.05.2014

AXIOMATIC METHOD AND THEORY OF REAL NUMBERS

V. M. Tikhomirov

This article describes a fragment of the course «Real Analysis III» given by A. N. Kolmogorov in the fall of 1954 and devoted to the theory of real numbers. Bourbaki's «architecture of mathematics» based on axiomatic method is briefly discussed.

Keywords: axiomatic method, real number, field, order, completeness.