

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ.
ПЕРСОНАЛИИ

УДК 519.2

НАЧАЛО ТЕОРИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА

Я. Г. Синай

*Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау РАН,
Принстонский университет (США)
e-mail: sinai@math.princeton.edu*

От редакции. 20 мая 2014 года наследный принц Норвегии Хакон-Магнус вручил академику РАН Я. Г. Синаю Премию Абеля 2014-го года «за фундаментальный вклад в изучение динамических систем, эргодическую теорию и математическую физику». Инициатива учреждения премии в честь норвежского математика Нильса Хенрика Абеля была выдвинута другим норвежским математиком, Софусом Ли, ещё в конце XIX века, однако премия была учреждена правительством Норвегии только в начале XXI века. Она присуждается ежегодно начиная с 2003 года. Предыдущими лауреатами Премии Абеля являются Жан-Пьер Серр (Франция, 2003), Майкл Атья (Англия) и Изадор Зингер (США, 2004), Питер Лакс (США, 2005), Ленарт Карлесон (Швеция, 2006), Сриниваса Варадхан (США, 2007), Джон Томсон (США) и Жак Титс (Франция, 2008), Михаил Громов (Франция, 2009), Джон Тейт (США, 2010), Джон Милнор (США, 2011), Эндре Семереди (Венгрия – США, 2012), Пьер Делинь (Бельгия, 2013). Премия Абеля неофициально считается равнозначной Нобелевской премии.

Редколлегия журнала искренне поздравляет Якова Григорьевича Синая с высокой наградой и благодарит его за предоставленную эксклюзивную возможность опубликовать текст презентации Абелевской лекции, прочитанной им 21 мая 2014 года в университете Осло.



Наследный принц Норвегии Хакон-Магнус (справа)
вручает Я. Г. Синаю Абелевскую премию

Детерминированный хаос

- Слова «детерминированный хаос» были предложены физиками Б. В. Чириковым (Россия), Д. Фордом (США) и Г. М. Заславским (Россия). Их мотивацией было объяснение появления случайного поведения у неслучайных объектов. Иногда подобную ситуацию описывают словами «случайность неслучайного».

- Термин «неслучайный» обычно относят к решениям систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1)$$

в случае непрерывного времени или к итерациям преобразования

$$y_i = g_i(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2)$$

в случае дискретного времени. Все эволюционные процессы описываются системами типа (1) или (2).

- Теория детерминированного хаоса описывает статистические свойства решений систем (1) или (2). Простейшим статистическим свойством является существование временных средних некоторой функции h вдоль траекторий:

$$\bar{h} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(x(t)) dt, \quad (3)$$

$$\bar{h} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(x(t)). \quad (4)$$

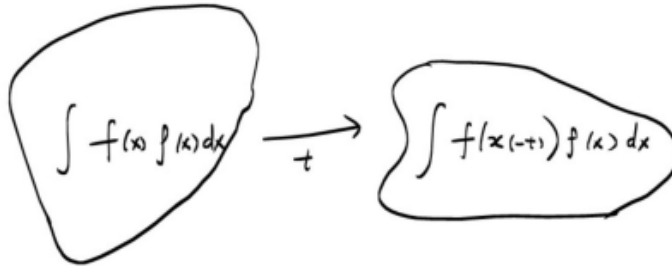
Например, если кто-либо измеряет температуру в заданном месте в течение заданного промежутка времени, то это измерение даёт одну последовательность температур — в противоположность усреднению в теории вероятностей, где обычно имеют дело с большими ансамблями траекторий.

- Первым шагом в теории детерминированного хаоса является нахождение инвариантной меры, которая определяет статистические свойства траекторий потока (1) или каскада (2). В простейшем случае она задаётся непрерывной плотностью $\rho(x)$, которая связана с нашей динамикой условием, состоящим в том, что

$$\int f(x(t)) \rho(x) dx$$

не зависит от t для любой непрерывной функции f .

- Простая интерпретация этого свойства показана на рисунке:



- Знаменитая эргодическая теорема утверждает, что существование инвариантной меры влечёт существование почти всюду временных средних $\bar{f}$:

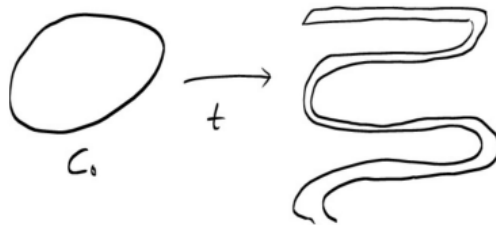
$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt.$$

- Различные инвариантные меры отвечают различным наборам временных средних.
- Физики Л. Больцман и Д. Гиббс перенесли в динамику важные идеи из статистической физики.
- Согласно Больцману, динамика называется эргодической, если для почти всех начальных данных имеет место равенство

$$\bar{f} = \int f(x(t)) \rho(x) dx$$

и $\bar{f}$ не зависит от начальных условий, т. е. временные средние совпадают с пространственными средними. Конечно, эргодичность является статистическим свойством динамики.

- Гиббс ввёл в динамику важное понятие перемешивания. Согласно Гиббсу, при наличии перемешивания любая гладкая область начальных условий за большое время превращается в область сложной формы:



- При больших t практически невозможно различить точки, которые были первоначально в области C_0 , от тех, которые не принадлежали ей.
- Последним статистическим свойством является гауссовость распределения флуктуаций. В простейшем случае, когда $\int f(x) \rho(x) dx = 0$, это означает, что если

$$a \leq \frac{\int_0^T f(x(t)) dt - T\bar{f}}{\sqrt{T}} \leq b,$$

то для любых чисел a и b при $T \rightarrow \infty$ вероятность этих неравенств даётся гауссовским интегралом.

- Это можно сформулировать как универсальность распределения флуктуаций

$$\frac{\int_0^T f(x(t)) dt - T\bar{f}}{\sqrt{T}},$$

которое даётся классическим гауссовым распределением. Эти три свойства могут рассматриваться как наиболее важные статистические свойства динамики.

- Свойства, подобные эргодичности, перемешиванию, центральной предельной теореме, хорошо известны в теории вероятностей, особенно в теории лотерей, карточных и других азартных игр.

- Большим сюрпризом оказалось обнаружение того факта, что такие же свойства могут проявляться в системах (1), (2) без каких-либо признаков случайности. Это важное открытие связано с понятием энтропии. Энтропия является хорошо известным объектом в статистической физике. Она также играет центральную роль в теории информации К. Шеннона.
- Согласно С. Какутани, он и фон Нейман обсуждали возможность использования энтропии в динамике. Но ничего определённого на эту тему не было опубликовано.
- Большой прогресс произошёл, когда в 1958 г. А. Н. Колмогоров ввёл в динамику понятие энтропии. Позвольте мне объяснить это понятие в простейшем случае детерминированной динамики, где оно связано с теорией меры.
- Обозначим пространство нашей динамики через Ω и разложим его на конечное число подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_r$. Любая точка $x \in \Omega$ может быть записана в виде последовательности

$$x = \{\dots, \Omega_{-m}, \dots, \Omega_0, \dots, \Omega_k, \dots\},$$

которая означает, что $x(k) \in \Omega_k$. Тогда энтропия системы за единицу времени даётся выражением

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n, \dots, i_n} P(\Omega_{-n}, \dots, \Omega_n) \log P(\Omega_{-n}, \dots, \Omega_n). \quad (5)$$

Здесь P есть вероятность, задаваемая плотностью ρ . Предел в (5) всегда существует. Энтропия динамики определяется как верхний предел выражения (5) по всем конечным разбиениям пространства Ω .

- Энтропия принимает только неотрицательные значения. В системах вероятностного происхождения она всегда положительна. После того, как энтропия появилась в динамике, возникла надежда, что она позволит различать динамические системы вероятностного происхождения от детерминированных систем типа (1) или (2). Однако оказалось, что это не так.
- Первые примеры были найдены среди групп преобразований тора, которые иногда называют преобразованиями кота Арнольда, хотя, насколько мне известно, Арнольд никогда не держал котов, а только собак.
- Несколько позже было обнаружено, что положительность энтропии связана с неустойчивостью динамики. Для того, чтобы это объяснить, возьмём произвольную траекторию $x^{(0)}(t)$, $t > 0$, и рассмотрим её малое возмущение $x^{(1)}(t) = x^{(0)}(t) + \varepsilon z(t)$. С точностью до членов более высокого порядка малости по ε , $z(t)$ удовлетворяет уравнению Якоби

$$\frac{d}{dt} z(t) = f'(x^{(0)}(t)) \cdot z(t). \quad (6)$$

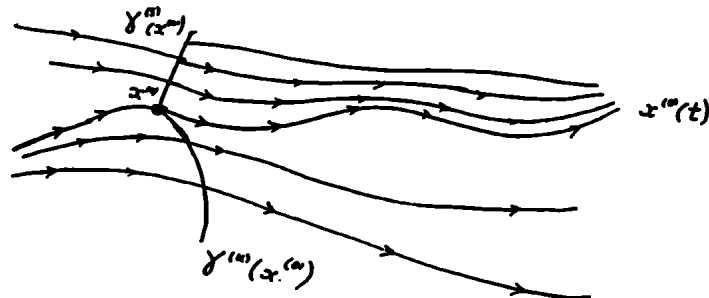
Траектория $x^{(0)}(t)$ называется неустойчивой, если для некоторого $z(0)$ решение $z(t)$ растёт экспоненциально при $t \rightarrow \infty$.

- Важно изучить множество всех решений, удовлетворяющих уравнению (6). Структура этих решений описана в хорошо известной работе российского математика В. И. Оселедца.

- Динамическая система (6) называется гиперболической, если для каждого $x(0)$ любое нетривиальное решение уравнения (6) либо растёт экспоненциально, либо убывает экспоненциально при $t \rightarrow \infty$.
- Обозначим через $v^{(s)}$ и $v^{(u)}$ число экспоненциально убывающих и число экспоненциально возрастающих линейно независимых решений. Обычно числа $v^{(s)}$, $v^{(u)}$ не зависят от начального условия. Большую роль в теории сыграла так называемая теорема Адамара – Перрона.

Теорема Адамара – Перрона

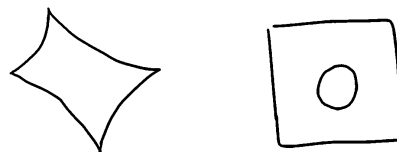
Пусть $v^{(s)} = k$, $v^{(u)} = l$ заданы, $k + l = n$, и положительны. При некоторых дополнительных предположениях для каждого x существуют локальные подмногообразия $\gamma^{(s)}(x)$, $\dim(\gamma^{(s)}(x)) = k$, и $\gamma^{(u)}(x)$, $\dim(\gamma^{(u)}(x)) = l$, такие, что для каждого $y \in \gamma^{(s)}(x)$ выполнена оценка $\text{dist}(x(t), y(t)) \leq \text{const} \cdot e^{-\alpha t}$, $t > 0$ и для каждого $y \in \gamma^{(u)}(x)$ выполнена оценка $\text{dist}(x(t), y(t)) \leq \text{const} \cdot e^{\alpha t}$, $t < 0$. Здесь $\alpha > 0$.



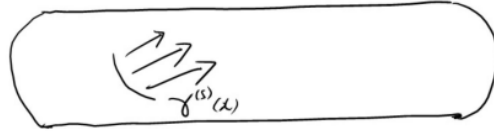
- Теорема Адамара-Перрона имеет многочисленные приложения, обобщения и модификации.

Системы Аносова

- **Определение.** Динамическая система называется системой Аносова, если k, l не зависят от x , $\gamma^{(s)}(x)$, $\gamma^{(u)}(x)$ являются C^2 -гладкими локальными подмногообразиями, и угол между ними всюду равномерно отделён от нуля.
- Основным примером системы Аносова служит так называемый геодезический поток на компактном многообразии отрицательной кривизны. Он играет также важную роль во многих задачах теории представлений и теории чисел.
- Много других примеров можно найти среди бильярдов и систем с упругими столкновениями. Простейшие примеры гиперболических бильярдов представлены на следующем рисунке.



- Одним из наиболее популярных бильярдov является так называемый стадион Бунимовича, у которого граница состоит из двух параллельных отрезков и двух полуокружностей.

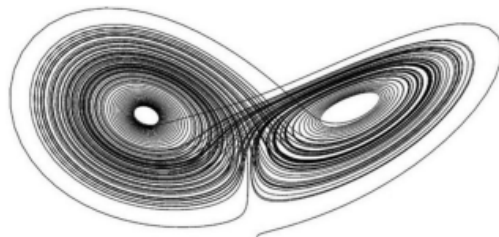


- Теорема Адамара – Перрона влечёт в этом случае свойство, не столь хорошо известное геометрам: для почти каждого x существует выпуклая кривая $\gamma^{(s)}$, для которой полутраектории, выходящие из её точек, сходятся экспоненциально быстро к полутраектории точки x . Это свойство типично в гиперболической геометрии (геометрии Лобачевского). Поэтому бильярд в случае стадиона является гиперболическим. Вы узнаете больше о гиперболических бильярдах в лекции профессора Саца (D. Szasz).
- Следующим примером является знаменитая система Лоренца трёх дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_1 = -\sigma x_1 + \sigma x_2, \\ \frac{d}{dt} x_2 = r x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \frac{d}{dt} x_3 = -b x_3 + x_1 x_2. \end{cases}$$

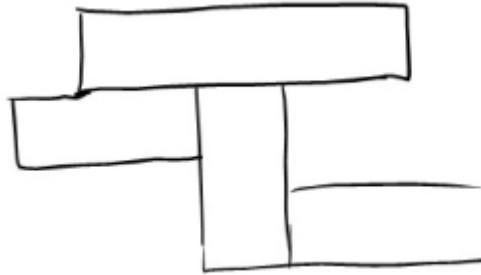
Здесь σ, r, b — числовые параметры.

- Лоренц предложил эту систему в 1962 г. При некоторых значениях параметров Лоренц показал численно присутствие случайности в системе. Приближённая картина динамики представлена на следующем рисунке.



- Работа Лоренца оставалась неизвестной в течение многих лет, в частности, из-за того, что она была опубликована в журнале, не известном математикам или физикам. Позже модель Лоренца стала очень популярной среди физиков.
- Д. Рюэль и Ф. Такенс предложили некоторые общие понятия, связанные с этой моделью, в частности, понятие странного аттрактора. Такие аттракторы были обнаружены во многих реальных ситуациях в физике. Можно сказать, что в тот момент идеи детерминированного хаоса проникли в физику. В частности, люди пытались связать странные аттракторы с турбулентностью. Эти попытки продолжаются до настоящего времени.

- В. Такер дал основанное на компьютерных вычислениях доказательство гиперболичности в системе Лоренца.
- Энтропия является инвариантом динамической системы. Системы с одинаковой энтропией могут быть изоморфными в том смысле, что они могут быть преобразованы одна в другую с помощью замен переменных, удовлетворяющих только некоторым условиям измеримости. Дональд Орнштейн и его коллеги получили замечательные результаты в проблеме изоморфизма динамических систем с положительной энтропией.
- Можно описать более подробно связи между гиперболической динамикой и теорией вероятностей, которые ясно демонстрируют понятие детерминированного хаоса и случайность динамики.
- Существует много способов сделать это. Одним из простейших является подход, основанный на так называемых марковских разбиениях. В случае таких разбиений границы различных элементов разбиения строго примыкают друг к другу.

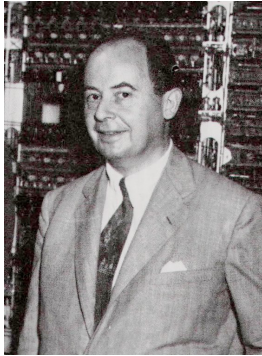


- Марковское разбиение позволяет построить простые представления для целого множества траекторий. В дискретном случае энтропия характеризует рост числа траекторий.
- Теория дает новый подход к проблеме необратимости. Рассмотрим произвольное начальное вероятностное распределение $\lambda(x, 0)$ и пусть $\lambda(x, t)$ — распределение, которое получается из него в момент времени t . Если динамика перемешивающая, то $\lambda(x, t)$ сходится (в слабом смысле) к $\rho(x)$, т. е. при $x \rightarrow \infty$

$$\int \lambda(x, t) \rho(x) dx \rightarrow 1 \quad (7)$$

по крайней мере, для ограниченных функций с компактным носителем.

- Сходимость в (7) весьма тонкая. Удобно ввести специальные координаты, в которых первые k координат $x^{(u)}$ изменяются вдоль $\gamma^{(u)}$, а оставшиеся l координат $x^{(s)}$ изменяются вдоль $\gamma^{(s)}$.
- При движении согласно динамике (7), координаты $x^{(u)}$ гладко сходятся к пределам, в то время как вдоль $\gamma^{(s)}$ координаты становятся весьма сложными функциями, которые могут стать случайными.
- Сходимость следует из специальных аргументов, основанных на некоторых стохастических механизмах. Эта картина согласуется с недавней теорией Е. Коэна и Дж. Галлавогги.

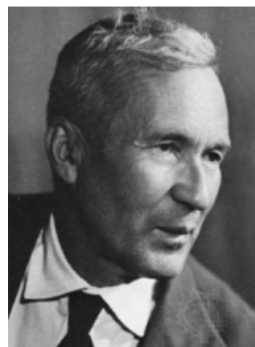
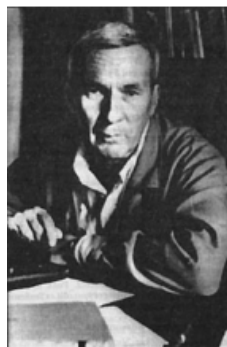


Дж. фон Нейман



Э. Хопф

- Развитие теории детерминированного хаоса состоит из нескольких прорывов. Каждый прорыв открывал новые возможности для новых классов динамических систем с новыми свойствами. Позвольте мне перечислить некоторые из них в более или менее хронологическом порядке.
- Теория динамических систем с чисто точечным спектром (фон Нейман). Временные зависимости в этом случае квазипериодические и относительно простые. С другой стороны, они имеют много приложений, в частности, в гармоническом анализе.
- Эргодическая теория геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны (Э. Хопф). Метод, появившийся в этой работе, позже был использован в общей теории гиперболических динамических систем.
- Энтропия динамических систем, введённая А. Н. Колмогоровым, которая позже стала центром нового развития в динамике (1959).



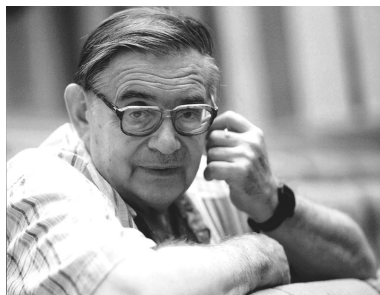
А. Н. Колмогоров

- Теория топологической динамики и топологические динамические системы, включая топологические инварианты (С. Смейл и его школа).



С. Смейл

- Понятие гиперболических систем (Смейл, Аносов), системы Аносова.



Д. В. Аносов



С. Смейл

- Странные аттракторы (Рюэль, Такенс).



Д. Рюэль



Ф. Такенс

- SRB-меры, или физические меры, которые определяют статистические свойства гиперболических систем (Рюэль, Боуэн, Песин, Лоренц и др.).



Д. Рюэль



Р. Боуэн



Я. Б. Песин



Э. Лоренц

- Гиперболические бильярды (Бунимович, Чернов, Сас и др.).



Л. А. Бунимович

- Универсальность при бифуркациях удвоения периода (Фейгенбаум).



М. Фейгенбаум

- Теорема Якобсона и теорема Бенедикса–Карлесона для так называемых отображений Эно.



М. Бенедикс



Л. Карлесон

- Современная теория детерминированного хаоса ориентирована на новые приложения и новые задачи.

Поступила 10.05.2014

Перевод с английского языка — Л. М. Лерман

THE ORIGIN OF THE THEORY OF DETERMINISTIC CHAOS

Ya. G. Sinai

Landau Institute for Theoretical Physics
Russian Academy of Sciences Princeton University, USA