ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 5-05 + 510.5 + 511.5

МОЁ СОТРУДНИЧЕСТВО С ДЖУЛИЕЙ РОБИНСОН[1]

Ю. В. Матиясевич

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
Росссия, 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, д. 27;
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

История решения десятой проблемы Гильберта, основополагающий вклад в которое внесла американский математик Джулия Робинсон.

Ключевые слова: десятая проблема Гильберта, диофантовы уравнения, алгоритмические проблемы, Джулия Робинсон.

Имя Джулии Робинсон (Julia Bowman Robinson) неотделимо от десятой проблемы Гильберта. Это одна из 23 проблем, которые Давид Гильберт (David Hilbert) сформулировал в 1900 году. Раздел его знаменитого доклада [2], посвящённый десятой проблеме, столь краток, что может быть процитирован здесь полностью:

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung.

> Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoefficienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchen sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist*[2].

В современной терминологии, среди 23 проблем Гильберта десятая является единственной *массовой проблемой*, т. е. проблемой, состоящей из счётного количества индивидуальных проблем, каждая из которых требует определённого ответа: ДА или НЕТ. Суть массовой проблемы состоит в требовании найти единый метод, который позволял бы дать такой ответ для каждой индивидуальной проблемы. За время, прошедшее от Диофанта до наших дней, специалисты по теории чисел нашли решения огромного количества диофантовых уравнений, а также установили отсутствие решений у многих других уравнений. К сожалению, для разных классов уравнений, а порой и

[1] Это авторский перевод с английского оригинала [1] с расширенным списком литературы; все подстрочные примечания сделаны при переводе.

[2] **10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения.** Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет.*

для отдельных уравнений приходилось изобретать всё новые и новые специфические методы. В десятой проблеме Гильберт просил найти *универсальный метод* для распознавания наличия или отсутствия решений у произвольного диофантова уравнения.

Массовая проблема может быть решена как в положительном, так и в отрицательном смысле. В первом случае требуется найти соответствующий алгоритм, во втором — доказать, что это невозможно сделать. Общее математическое понятие алгоритма было выработано в трудах Алонзо Чёрча (Alonzo Church), Курта Фридриха Гёделя (Kurt Friedrich Gödel), Алана Мэтисона Тьюринга (Alan Mathison Turing), Эмиля Леона Поста (Emil Leon Post) и других логиков только через три десятилетия после постановки проблем Гильберта, однако уже в своём докладе [2] Гильберт предвидел возможность отрицательных решений некоторых проблем.

Я должен начать историю моего сотрудничества с Джулией Робинсон с рассказа о том, как я оказался вовлечённым в работу над десятой проблемой Гильберта. Впервые я услышал про неё в конце 1965 года, будучи второкурсником на математико-механическом факультете ленинградского университета. К тому времени я уже получил свои первые результаты по каноническим системам Поста, и я спросил своего научного руководителя, Сергея Юрьевича Маслова [3], чем мне заниматься дальше. Он ответил: «Попробуй доказать алгоритмическую неразрешимость диофантовых уравнений. Это так называемая десятая проблема Гильберта, но это не имеет значения.» — «Да, но я ещё не знаком ни с одним доказательством неразрешимости ни одной массовой проблемы.» — «Это также не важно. Сейчас неразрешимость обычно устанавливают сведѐнием какой-либо проблемы, неразрешимость которой уже известна, к той проблеме, неразрешимость которой надо доказать, а техникой сведѐния ты вполне владеешь.» — «Хорошо, но что мне почитать для начала?» — «Ну да, по десятой проблеме есть несколько работ американских математиков, но читать это не стòит.» — «Почему же?» — «До сих пор американцы не достигли цели, так что, скорее всего, их подход не адекватен.»

Сергей Юрьевич был не единственным, кто недооценивал роль ранее сделанных работ по десятой проблеме Гильберта. Одной из них была статья Мартина Дэвида Дейвиса (Martin David Davis), Хилери Вайтхолла Патнема (Hilary Whitehall Putnam) и Джулии Робинсон [4], и рецезент этой работы в *Mathematical Reviews* написал:

> These results are superficially related to Hilbert's tenth problem on (ordinary, i. e., non-exponential) Diophantine equations. The proof of the authors'results, though very elegant, does not use recondite facts in the theory of numbers nor in the theory of r. e. [recursively enumerable] sets, and so it is likely that the present result is not closely connected with Hilbert's tenth problem. Also it is not altogether plausible that all (ordinal) Diophantine problems are uniformly reducible to those in a fixed number of variables of fixed degree, which would be the case if all r. e. sets were Diophantine[3].

[3] Эти результаты поверхностно связаны с десятой проблемой Гильберта об (обычных,

Скептицизм этого рецензента был вызван тем, что авторы [4] рассматривали не обычные диофантовы уравнения (то есть уравнения вида

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \tag{1}$$

где P — многочлен с целыми коэффициентами), а более широкий класс так называемых *экспоненциально диофантовых уравнений*. Такие уравнения имеют вид

$$E_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = E_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \tag{2}$$

где E_1 и E_2 — выражения, построенные из x_1, x_2,..., x_m и конкретных натуральных чисел с помощью сложения, умножения и возведения в степень. (В отличие от формулировки проблемы, данной Гильбертом, мы считаем, что допустимыми значениями переменных являются натуральные числа, но это несущественное техническое отклонение.)

Наряду с одиночными уравнениями можно рассматривать *параметрические семейства* уравнений, как диофантовых, так и экспоненциально диофантовых. Каждое такое семейство

$$Q(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0 \tag{3}$$

определяет отношение между *параметрами* $a_1, \ldots, a_n$, которое выполняется тогда и только тогда, когда уравнение имеет решение в остальных переменных, называемых *неизвестными*. Отношения, которые могут быть заданы таким способом, называют *диофантовыми* или *экспоненциально диофантовыми* в соответствии с типом использованного уравнения. Аналогично, множество $\mathfrak{M}$, состоящее из n-членных наборов натуральных чисел, называется (экспоненциально) диофантовым, если таковым является отношение «принадлежать множеству $\mathfrak{M}$». Также функция называется (экспоненциально) диофантовой, если (экспоненциально) диофантовым является её график.

Таким образом, в 1965 году я не узнал даже имени Джулии Робинсон. Вместо того, чтобы начать с изучения её пионерских работ, Маслов предложил мне попробовать доказать неразрешимость так называемых *уравнений в словах* (по другой терминологии *уравнений в свободной полугруппе*), поскольку эти уравнения могут быть сведены к диофантовым. Теперь мы знаем, что этот подход был обречён на неудачу, так как в 1977 году Геннадий Семёнович Маканин нашел разрешающую процедуру для уравнений в словах.

Я начал работу по десятой проблеме Гильберта с того, что показал, что к диофантовым уравнениям сводится более широкий класс уравнений в словах, в котором можно накладывать дополнительные ограничения на длины слов. В 1968 году вышли в свет три мои короткие заметки на эту тему. Мне не удалось доказать алгоритмическую неразрешимость таких расширенных

т. е. не экспоненциально) диофантовых уравнениях. Доказательства результатов этих авторов, хотя и очень элегантные, не используют трудных для понимания фактов ни из теории чисел, ни из теории рекурсивно перечислимых множеств, так что, скорее всего, данный результат не имеет тесной связи с 10-й проблемой Гильберта. Также в целом неправдоподобно, чтобы все (обычные) диофантовы проблемы можно было единым методом свести к случаю фиксированного количества неизвестных и фиксированной степени.

уравнений в словах (это до сих пор остаётся открытым вопросом[4]), так что я приступил к чтению «работ американских математиков» по десятой проблеме Гильбета. (Сергей Иванович Адян инициировал и отредактировал перевод на русский язык наиболее важных таких работ; все переводы вошли в один выпуск журнала *Математика* [5].)

После упомянутой выше работы Дейвиса, Патнема и Робинсон для отрицательного решения десятой проблемы Гильберта оставалость установить диофантовость возведения в степень, то есть найти конкретное диофантово уравнение

$$A(a, b, c, x_1, \ldots, x_m) = 0, \tag{4}$$

которое при данных значениях параметров a, b и c имело бы решение в неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ в том и только том случае, когда $a = b^c$. С помощью такого уравнения любое экспоненциально диофантово уравнение может легко быть преобразовано в эквивалентное диофантово уравнение с дополнительными неизвестными.

Как это бывает, именно эту проблему Джулия Робинсон уже исследовала в начале 1950-х годов. Согласно «Автобиографии Джулии Робинсон» [6], её интерес был вызван её учителем, Альфредом Тарским (Alfred Tarski), который предположил, что даже множество всех степеней числа 2 *не* является диофантовым. Джулия Робинсон, напротив, нашла в [7] достаточное условие для существования диофантова представления (4) для возведения в степень; а именно, чтобы построить такое A, достаточно иметь уравнение

$$B(a, b, x_1, \ldots, x_m) = 0, \tag{5}$$

которое определяет некоторое отношение $J(a, b)$, обладающее следующими двумя свойствами:

- для любых a и b из $J(a, b)$ следует, что $a < b^b$;
- для любого k существуют a и b, удовлетворяющие $J(a, b)$ и такие, что $a > b^k$.

Джулия Робинсон назвала отношения, обладающие этими двумя свойствами, *отношениями экспоненциального роста*; сейчас такие отношения носят также имя *предикатов Джулии Робинсон*.

Моим первым впечатлением от понятия отношения экспоненциального роста было «что за неестественное понятие», однако я вскоре понял его важную роль для десятой проблемы Гильберта.

Я решил организовать семинар по десятой проблеме Гильберта. На первом заседании, где я сделал обзор известных результатов, присутствовали пять логиков и пять специалистов по теории чисел, но потом количество участников стало экспоненциально убывать[5], и вскоре я остался в одиночестве.

[4] Эти слова остаются справедливыми и в момент публикации перевода — в 2014 году.

[5] Много позже, уже после решения десятой проблемы Гильберта, я спросил одного теоретико-числовика — участника семинара, почему он и его коллеги так быстро меня покинули. Ответ был таков: «Мы не поверили в возможность тех результатов, которые предполагалось получить для решения десятой проблемы Гильберта, более того, мы даже попытались доказать, что множество простых чисел нельзя задать диофантовым уравнением, и полагали, что сделаем это недели за две».

Я тратил почти всё своё свободное время на поиск диофантова отношения экспоненциального роста. Не было ничего плохого в том, что второкурсник пытается решить знаменитую проблему, но это становилось смешным, когда я продолжал свои бесплодные попытки годами. Один профессор[6] стал высмеивать меня. Каждый раз, когда мы встречались, он интересовался: «Вы уже доказали неразрешимость десятой проблемы Гильберта? Ешё нет? Но в таком случае Вы не сможете закончить университет!»

Тем не менее я закончил университет в 1969 году. Моя дипломная работа состояла из двух моих ранних работ по каноническим системам Поста, поскольку с тех пор я не сделал ничего лучше. В том же году я поступил в аспирантуру Ленинградского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (ЛОМИ). Разумеется, десятая проблема Гильберта не могла быть больше предметом моих исследований.

Однажды осенним днем 1969 года один мой коллега[7] сказал мне: «Лети в библиотеку. Там в последнем номере *Proceedings of the American Mathematical Society* опубликована новая работа Джулии Робинсон!» Я, однако, был твёрд в своём решении отложить десятую проблему Гильберта в сторону. Я сказал себе: «Замечательно, что Джулия Робинсон продолжает работать над этой проблемой, но я не могу больше тратить на это впустую моё время». Я не пошёл в библиотеку.

Где-то на Математических Небесах, должно быть, существует Бог или Богиня Математики, который(ая) не допустил(а), чтобы я не прочитал новую работу Джулии Робинсон [9]. Благодаря моим первым публикациям по десятой проблеме Гильберта, я считался специалистом по этой тематике, и работа Джулии Робинсон была прислана мне на рецензирование для *Реферативного журнала Математика*. Таким образом, я был вынужден прочитать эту статью, и 11 декабря я доложил её на логическом семинаре в ЛОМИ.

Десятая проблема Гильберта снова захватила меня. Я сразу увидел, что Джулия Робинсон нашла свежую и замечательную идею. Она была связана со специальной формой *уравнения Пелля*

$$x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1. \tag{6}$$

Решения $\langle \chi_0, \psi_0 \rangle, \langle \chi_1, \psi_1 \rangle, \ldots, \langle \chi_n, \psi_n \rangle, \ldots$ этого уравнения, перечисленные в порядке возрастания, удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \chi_{n+1} &= 2a\chi_n - \chi_{n-1}, \\ \psi_{n+1} &= 2a\psi_n - \psi_{n-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Легко видеть, что для любого m последовательности $\chi_0, \chi_1, \ldots$ и $\psi_0, \psi_1, \ldots$, рассматриваемые по модулю m, являются чисто периодическими, а потому таковы же их линейные комбинации. Далее, легко проверить по

[6] Это был Николай Александрович Шанин, глава ленинградской школы математической логики [8].

[7] Григорий Ефроимович Минц, см. о нём
https://philosophy.stanford.edu/content/articles/view/Obituary_ for_ Grigori_ Mints_ in/

индукции, что периодом последовательности

$$\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots \qquad (\mathrm{mod}\ a-1) \tag{8}$$

является

$$0, 1, 2, \ldots, a-2, \tag{9}$$

а период последовательности

$$\chi_0 - (a-2)\psi_0, \chi_1 - (a-2)\psi_1, \ldots, \chi_n - (a-2)\psi_n, \ldots \qquad (\mathrm{mod}\ 4a-5) \tag{10}$$

начинается с

$$2^0, 2^1, 2^2, \ldots \tag{11}$$

Основная новая идея Джулии Робинсон состояла в том, что эти две последовательности надо синхронизировать, наложив некоторое условие $G(a)$, которое гарантировало бы, что

$$\begin{gathered}\textit{длина периода последовательности } (8) \textit{ кратна длине} \\ \textit{периода последовательности } (10).\end{gathered} \tag{12}$$

Если бы некоторое такое условие оказалось диофантовым и выполнялось бы для бесконечно многих значений a, то легко можно было бы показать, что и отношение $a = 2^c$ также диофантово. Джулия Робинсон не смогла, однако, найти такое диофантово условие G, и даже сегодня у нас нет прямого способа указать такое условие.

Идея синхронизации мне очень понравилась, и я решил воплотить её в слегка другом контексте. Когда в 1966 году я начал работу над десятой проблемой Гильберта, я стал использовать числа Фибоначчи и открыл (для себя) уравнение

$$x^2 - xy - y^2 = \pm 1. \tag{13}$$

Это уравнение играет роль, аналогичную указанной выше роли уравнения Пелля, а именно, числа Фибоначчи ϕ_n, и только они, являются решениями уравнения (13). Арифметические свойства последовательностей ψ_n и ϕ_n очень похожи. В частности, последовательность чисел Фибоначчи с чётными индексами

$$0, 1, 3, 8, 21, \ldots \tag{14}$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\phi_{n+1} = 3\phi_n - \phi_{n-1}, \tag{15}$$

аналогичному (7). Эта последовательность растёт как $[(3+\sqrt{5})/2]^n$ и может быть использована вместо (11) для построения отношения экспоненциального роста. В роли последовательности (10) может выступить последовательность

$$\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots \qquad (\mathrm{mod}\ a-3), \tag{16}$$

поскольку она начинается как (14). Более того, при специальном выборе a период последовательности (16) может быть указан явно, а именно, если

$$a = \phi_{2k} + \phi_{2k+2}, \tag{17}$$

то период последовательности (16) состоит из чисел

$$0, 1, 3, \ldots, \phi_{2k}, -\phi_{2k}, \ldots, -3, 1. \tag{18}$$

Простая структура этого периода выглядела многообещающе.

Я интенсивно думал в этом направлении даже в новогоднюю ночь и внёс свою лепту в истории о рассеянных математиках, уйдя утром 1 января из дома своего дяди в его пиджаке. Утром 3 января мне показалось, что я нашёл многочлен B, требуемый в (5), но к концу того же дня я обнаружил ошибку в своих рассуждениях. На следующее утро мне удалось, однако, её исправить.

Что надо было делать дальше? Будучи студентом, я попал однажды в неприятную ситуацию, когда объявил о решении десятой проблемы Гильберта, в котором потом сам же нашёл ошибку. Я не хотел повторения такого конфуза, а кое-что в моём новом доказательстве выглядело подозрительным. Я полагал, что мне удалось воплотить идею Джулии Робинсон в слегка изменённом варианте. В её конструкции, однако, существенную роль играло одно специальное уравнение, которое гарантировало, что значение одной переменной экспоненциально больше значения другой. В моём же предполагаемом доказательстве подобное уравнение не использовалось вообще, и вот это-то и было странным. Позднее я осознал, что моя конструкция была двойственной к конструкции Джулии Робинсон. В действительности я нашёл некоторое диофантово условие $H(a)$, которое гарантировало, что

$$\begin{gathered}\textit{длина периода последовательности } (16) \textit{ кратна} \\ \textit{длине периода последовательности } (8).\end{gathered} \tag{19}$$

Это условие H, однако, не могло выполнять роль условия G, необходимого Джулии Робинсон, так что в итоге получилась существенно другая конструкция.

Я записал подробное доказательство, не найдя ошибок, и попросил Сергея Юрьевича Маслова и Владимира Александровича Лифшица проверить его, но не говорить об этом никому. Ранее я запланировал провести зимние каникулы со своей невестой в лыжном лагере, и я уехал из Ленинграда, не получив ответа от Маслова и Лифшица. В течение двух недель я катался на лыжах, упрощал доказательство и писал статью [10]. Влияние на неё работы Джулии Робинсон [9] я попытался передать поэтическим глаголом «навеять», который, похоже, не имеет прямого аналога в английском языке, и в последствии переводчик использовал банальное «suggested».

По возвращении в Ленинград я получил подтверждение, что доказательство правильно, и оно перестало быть секретом. Несколько других математиков также проверили моё доказательство, в том числе Дмитрий Константинович Фаддеев и Андрей Андреевич Марков, которые оба были знамениты своими способностями обнаруживать ошибки.

29 января 1970 года в ЛОМИ состоялось моё первое публичное выступление про решение десятой проблемы Гильберта. Среди слушателей был Григорий Самуилович Цейтин, который вскоре после этого поехал на конференцию в Новосибирск. Он взял копию моего текста и спросил разрешения рассказать доказательство в Новосибирске. (По-видимому, именно из-за этого его выступления английский перевод [10] ошибочно указывает в моем адресе Сибирское отделение вместо Ленинградского.)

Среди тех, кто слушал выступление Цейтина в Новосибирске, был Джон Маккарти (John McCarthy). В «Автобиографии» [6] Джулия Робинсон вспоминает, что по возвращении в США Маккарти прислал ей записи, которые он сделал во время выступления Цейтина. Именно так Джулия Робинсон узнала про мой пример диофантова уравнения экспоненциального роста. Позже по моей просьбе она прислала мне копию этих записей[8] Маккарти. Они состояли из нескольких основных уравнений и лемм, и я полагаю, что только такой человек, как Джулия Робинсон, которая провела много времени, размышляя в том же направлении, был в состоянии восстановить из этих записей всё доказательство, что она и сделала.

В действительности Джулия Робинсон сама была близка к завершению доказательства неразрешимости десятой проблемы Гильберта. Нередко задают вопрос, *почему же она это не сделала*. (Эта тема затрагивается и в [6].) Несколько авторов (см. [11] для дальнейших ссылок) показали, что последовательность ψ_n можно использовать вместо последовательности ϕ_n для построения диофантова отношения экспоненциального роста. Мой переход от (12) к (19) перераспределил сложность всей конструкции. Путь от диофантова условия H к диофантову отношению экспоненциального роста не столь прямолинеен, каким был бы путь от условия G, которое искала Джулия Робинсон. С другой стороны, оказалось, что построить H много проще, чем найти G.

В [10] я использовал для этой цели лемму, утверждающую, что

$$\phi_n^2 \mid \phi_m \Rightarrow \phi_n \mid m. \tag{20}$$

Это интересное свойство чисел Фибоначчи нетрудно доказать *после* того, как оно сформулировано, однако похоже, что этот замечательный факт оставался неизвестным до 1969 года. Моё первоначальное доказательство (20) было основано на теореме, которую Николай Николаевич Воробьёв доказал ещё в 1942 году, но опубликовал лишь в третьем расширенном издании своей популярной книжки [12]. (Переводчик моей статьи [10] ввёл читателей в заблуждение, изменив год публикации [12] с 1969 на 1964, год, когда вышло второе издание.) Я прочитал новое издание книжки Воробьёва летом 1969 года, и та его теорема сразу привлекла моё внимание.

В то время я ещё не вывел свойство (20), но, познакомившись со статьёй Джулии Робинсон [9], я сразу понял, что теорема Воробьёва могла бы быть здесь очень полезной. Джулия Робинсон получила третье издание [12] от меня только в 1970 году. Кто может сказать, как развивались бы события, если

[8] Первая страница этих записей воспроизведена в [6].

бы Николай Николаевич включил свою теорему уже в первое издание своей книжки? Быть может, неразрешимость десятой проблемы Гильберта была бы установлена на десять лет раньше!

Диофантово определение отношения экспоненциального роста из [10] имело 14 неизвестных. Позднее я смог уменьшить их количество до 5. В октябре 1970 года Джулия прислала мне письмо с другим определением, также использовавшим только 5 неизвестных. Изучив её конструкцию, я понял, что она использовала другой метод, и, объединив наши идеи, мы можем получить определение всего с тремя неизвестными! Это и стало началом нашей совместной работы.

Она велась исключительно по переписке. В то время электронная почта ещё не существовала, а бумажному письму требовались три недели на пересечение океана. Одно из моих писем пропало при пересылке, и мне пришлось переписывать 11 страниц (копировальные машины уже существовали, но у меня не было доступа к ним). С другой стороны, такое положение дел имело свои преимущества: сегодня я имею удовольствие перечитывать письма, написанные рукой Джулии[9]. Фрагменты этих писем включены ниже в этот текст.

Одно из следствий отрицательного решения десятой проблемы Гильберта (которое казалось неправдоподобным рецензенту Mathematical Reviews) таково: *существует константа N такая, что каждое диофантово уравнение (с любым количеством параметров и сколь угодно большим количеством неизвестных) может быть эффективно преобразовано в другое диофантово уравнение с теми же параметрами, но имеющее лишь N неизвестных, такое, что при фиксированных значениях параметров оба уравнения одновременно имеют или не имеют решений*. В своём выступлении на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 году я сообщил, что в качестве такого N можно взять число 200.

Эта оценка была очень грубой. Джулия и её муж Рафаель (Raphael Mitchel Robinson) заинтересовались получением меньшего значения N, и в упомянутом выше письме Джулия сообщила, что они достигли $N = 35$. Наша новая совместная конструкция диофантова отношения экспоненциального роста с 3 (вместо 5) неизвестными автоматически понизила N до 33. Джулия прокомментировала это так: «I consider it in the range of 'practical' number theory, since Davenport once wrote a paper on cubic forms in 33 variables»[10].

Джулия прислала мне подробное изложение конструкции для $N = 33$, которое стало основой нашей дальнейшей работы. Мы обменивались письмами и идеями и постепенно уменьшали значение N всё больше и больше. В феврале 1971 года я послал очередное улучшение до $N = 26$, и написал, что теперь мы можем записать уравнение, взяв в качестве неизвестных латинские буквы без индексов. Джулия назвала это «breaking the 'alphabetical'

[9] В настоящее время наша переписка хранится в библиотеке университета Калифорнии [13].

[10] Я полагаю, что это находится в рамках «практической» теории чисел, поскольку Давенпорт однажды написал работу про кубические формы от 33 переменных.

barrier»[11]. В августе 1971 года я доложил на IV Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки, проходившем в Бухаресте, наше последнее достижение: *Любое диофантово уравнение может быть сведено к уравнению, имеющему лишь 14 неизвестных* [11].

Во время этого конгресса произошла моя первая встреча с Джулией. После его завершения я имел удовольствие принимать её и Рафаэля в моём родном Ленинграде.

Однажды в письме ко мне Джулия написала: «With just 14 variables we ought to be able to know every variable personally and why it has to be there»[12]. Тем не менее, в марте 1972 года минимальное количество неизвестных неожиданно подпрыгнуло до 15, когда она нашла ошибку в моём подсчёте количества переменных!

Я хочу дать читателям представление об использовавшейся технике уменьшения количества неизвестных и объяснить характер моей ошибки. Реально мы строили не одно уравнение, а систему уравнений с малым числом неизвестных. (Ясно, что система $A = B = \cdots = D = 0$ может быть свёрнута в одно уравнение $A^2 + B^2 + \cdots + D^2 = 0$.) Некоторые из этих уравнений были уравнениями Пелля

$$\begin{aligned} x_1^2 - d_1 y_1^2 &= 1, \\ x_2^2 - d_2 y_2^2 &= 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Мы можем заменить два таких уравнения одним уравнением

$$\Pi\Big(x \pm \sqrt{1 + d_1 y_1^2} \pm (1 + d_1 y_1^2)\sqrt{1 + d_2 y_2^2}\Big) = 0, \tag{22}$$

в котором произведение берётся по всем четырём возможным выборам знаков $+$ и $-$. При этом в других уравнениях системы мы можем заменить x_1 на $\sqrt{1 + d_1 y_1^2}$, а x_2 — на $\sqrt{1 + d_2 y_2^2}$, и устранить радикалы путём возведения в квадрат. Таким образом, мы уменьшили на 1 общее количество неизвестных, введя x, но устранив x_1 и x_2. Именно в подсчёте количества вводимых и устраняемых переменных я допустил ошибку.

Ситуация для нас была довольно неприятная, поскольку результат был публично объявлен. Я пытался всё же получить его, но, не имея новых идей, был не в состоянии понизить количество неизвестных до 14. К счастью, вскоре я получил новое письмо от Джулии. Она пыталась меня утешить: «I think mistakes in reasoning are much worse than arithmetical ones which are sort of funny»[13]. Что важнее, у неё появились новые идеи и она смогла понизить количество неизвестных снова до 14, спасая положение.

В течение некоторого времени мы обсуждали возможное место для публикации нашей совместной статьи. Я предложил *Известия АН СССР*. Перспектива иметь работу, опубликованную на русском языке, была для Джулии вполне привлекательной. (Её статья [14] была опубликована в СССР, но на

[11] Преодолением «алфавитного» барьера.

[12] Имея всего 14 переменных, мы должны быть в состоянии знать каждую из них в лицо и почему она там находится.

[13] Я полагаю, что ошибки в рассуждениях гораздо хуже арифметических, которые смехотворны.

английском языке.) С другой стороны, она хотела привлечь внимание специалистов по теории чисел к теоретико-числовому по своей сути результату, который был получен логиками, и она предложила *Acta Arithmetica*. В конце концов мы решили, что у нас имеется достаточно много материала для нескольких статей, первая из которых будет на русском языке в *Известиях*, а следующая в каком-нибудь другом издании на английском языке.

Мы нашли, что писать статью, будучи разделёнными половиной мира — это хождение по мукам. Позднее Джулия написала мне: «It seems to me that we had little trouble in collaborating mathematically on 4-week turn-around time but it is hopeless when it comes to writing the results up. Namely, by the time you could answer a question, it was no longer relevant»[14]. Мы решили, что один из нас напишет весь текст, а другой подвергнет его критике. Поскольку первая статья должна была быть на русском языке, я написал начальный вариант (более 60 машинописных страниц) и отправил его Джулии осенью 1972 года. Естественно, что она нашла много опечаток и мелких ошибок, но в целом текст получил её одобрение.

Читателю нет нужды смотреть список литературы в поиске ссылки на эту работу — она никогда не была опубликована! В мае 1973 года я нашёл «ошибку в рассуждениях». Она состояла в использовании неверной импликации

$$a \equiv b \pmod{q} \;\Rightarrow\; \binom{a}{c} \equiv \binom{b}{c} \pmod{q}. \tag{23}$$

Вся конструкция рухнула. Я сообщил об этом Джулии и она ответила:

> I was completely flabbergasted by your letter of May 11. I wanted to crawl under a rock and hide from myself! Somehow I had never questioned that $\binom{a}{c} \equiv \binom{b}{c} \pmod{a-b}$. I usually know enough not to divide by zero. I had even mentioned (asserted) it to Raphael several times and he had not objected. He said he would have said 'no' if I had asked if it were true. I guess I would have myself if I had asked[15]!

Ранее мы уже обсуждали подобную ситуацию, и ещё в 1971 году Джулия написала мне: «Almost all mathematical mistakes come about from not writing out proofs and especially making changes after the proof is written out»[16]. Однако

[14] Похоже, что у нас было мало проблем в математическом сотрудничестве с четырёхнедельным временем оборота [писем], но это становится безнадёжным, когда дело доходит до изложения результатов для печати. А именно, к тому моменту, когда ты можешь ответить на вопрос, он уже перестаёт быть актуальным.

[15] Я была совершенно ошеломлена Вашим письмом от 11-го мая. Мне хотелось залезть под скалу и спрятаться от самой себя! Каким-то образом, я никогда не сомневалась, что $\binom{a}{c} \equiv \binom{b}{c} \pmod{a-b}$. Обычно я знаю достаточно, чтобы не делить на ноль. Я даже показывала (утверждала) это Рафаэлю, и он не возражал. Он говорит, что он сказал бы «нет», если б я его спросила, верно ли это. Я думаю, я сама бы сказала «нет», если бы я задала этот вопрос.

[16] Почти все математические ошибки происходят из-за того, что доказательства не выписаны полностью, и особенно из-за внесения изменений после того, как доказательство записано.

в данном случае всё было не так. Ошибка была допущена на самой ранней стадии и не была обнаружена ни когда один математик (я) написал подробное доказательство, ни когда другой математик (Джулия) тщательно проверил его. К счастью, на этот раз я смог немедленно исправить доказательство. Джулия написала: «I am very glad you sent a way around the mistake at the same time you told me about it»[17]. Однако текст статьи должен был быть переписан полностью.

В 1973 году выдающийся советский математик Андрей Андреевич Марков праздновал своё семидесятилетие. Его коллеги по Вычислительному центру АН СССР решили издать сборник статей в честь юбиляра. Получив приглашение участвовать в этом сборнике, я предложил, чтобы это была совместная работа с Джулией Робинсон, и редакторы согласились. Срок был очень жёсткий, и у нас не было времени на обсуждение рукописи. Я попросил у Джулии согласия на то, что я напишу текст и отправлю его редакторам без её одобрения. Её пожелания могли быть учтены на этапе корректуры. Джулия согласилась.

Так появилась наша первая совместная публикация [15], и она была на русском языке. Это был побочный продукт нашего основного исследования по уменьшению количества неизвестных в диофантовых уравнениях. Первая теорема утверждала, что по произвольному параметрическому диофантову уравнению (3) можно эффективно найти многочлены с целыми коэффициентами P_1, D_1, Q_1, …, P_k, D_k, Q_k такие, что диофантово отношение, определяемое (3), может также быть задано формулой

$$\exists x\, \exists y \mathop{\&}_{i=1}^{k} \exists z[P_i(a_1,\ldots,a_n,x,y) < \\ < D_i(a_1,\ldots,a_n,x,y)z \ < \ Q_i(a_1,\ldots,a_n,x,y)]. \quad (24)$$

Хотя k может быть очень большим (но фиксированным) числом, каждое неравенство содержит только 3 неизвестные.

Вторая теорема утверждает, что можно также найти многочлены F и W такие, что то же самое отношение задаётся формулой

$$\exists x \exists y \forall z[z \le F(a_1,\ldots,a_n,x,y) \ \Rightarrow \ W(a_1,\ldots,a_n,x,y,z) \ > \ 0]. \quad (25)$$

В этой формуле всего три квантора, но третий теперь является (ограниченным) квантором общности. Такие представления имеют тесную связь с уравнениями, поскольку основной технический результат в [4] состоял в методе устранения единственного ограниченного квантора общности за счёт введения нескольких дополнительных кванторов существования и разрешения использовать возведение в степень в получающейся чисто экзистенциальной формуле.

Одно из пожеланий Джулии по поводу нашей статьи состояло в том, что она хотела, чтобы её имя было указано полностью. Для этого у неё были веские основания. Я был переводчиком одной из основополагающих работ по

[17] Я очень рада, что Вы сразу же написали, как исправить ошибку.

автоматическому доказательству теорем [16], которую написал Джон Алан Робинсон (John Alan Robinson). Перевод вышел в 1970 году в сборнике важнейших работ по этой тематике, в котором советские читатели увидели имя *Дж. Робинсон* в качестве автора статьи, которую перевёл *Ю. Матиясевич*, а также имя *М. Дэвис*, автора другой фундаментальной работы по автоматическому доказательству теорем. Для многих эти три имени ассоциировались с только что полученным решением десятой проблемы Гильберта, и у немалого количества читателей сложилось неверное представление, будто метод резолюций, основной инструмент из [16], придумала Джулия Робинсон. Ситуация была ещё более запутанной, поскольку Джон Робинсон в своей статье благодарил George Robinson, который в переводе также стал просто Дж. Робинсон[18].

Будучи студентом, я совершил «ошибку второго рода»: я не отождествил J. Robinson, автора теоремы из теории игр, с J. Robinson, автором замечательных исследований по десятой проблеме Гильберта. (Важная статья [18] была единственной публикацией Джулии по теории игр.)

Пожелание Джулии было удовлетворено редакторами, и в результате наша совместная статья [15] стала единственной публикацией на русском языке, где *моё* имя приведено полностью.

Эта короткая заметка была побочным продуктом нашего основного исследования, которое ещё предстояло опубликовать. Так как мы заранее решили, что вторая статья будет на английском языке, Джулия написала новый текст про уменьшение количества неизвестных. К тому времени мы смогли устранить ещё одну неизвестную, так что их у нас стала «чёртова дюжина».

Вторая статья [19] вышла в *Acta Arithmetica*. У нас был особый повод для такого выбора журнала, поскольку это был специальный том, посвящённый памяти выдающегося советского математика Юрия Владимировича Линника, с которым мы оба были лично знакомы[19]. Я был представлен ему вскоре после установления неразрешимости десятой проблемы Гильберта. Кто-то рассказал Линнику об этой новости, начав, однако, с одного следствия: «Матиясевич умеет строить многочлен с целыми коэффициентами такой, что множество принимаемых им натуральных значений при натуральных значениях переменных есть в точности множество всех простых чисел». «Это замечательно, — отреагировал Линник. — Наверно мы скоро узнаем много нового про простые числа». Затем ему объяснили, что основной результат является много более общим: подобный многочлен можно построить для любого эффективно перечислимого множества, то есть множества, элементы которого могут быть перечислены в каком-либо порядке некоторым алгоритмом. «Очень жаль, — сказал Линник. — Скорее всего, мы не узнаем ничего

[18] В момент написания оригинального текста я полагал, что в такое заблуждение впали только советские читатели, имевшие ограниченный доступ к зарубежной литературе. К своему глубокому удивлению я узнал впоследствии, что и в изданной Американским математическим обществом книге [17] авторство метода резолюций приписано Джулии Робинсон.

[19] В [6] Джулия вспоминает: «Linnik told me that I am the second most famous Robinson in the Soviet Union, the first being Robinson Crusoe» (Линник сказал мне, что я являюсь второй по известности в СССР Робинсон, на первом месте — Робинзон Крузо).

нового про простые числа».

Поскольку был определённый интерес к предстоящей публикации с доказательством давно анонсированного результата, многочисленные копии нашей рукописи ходили по рукам. Мы исчерпали свои идеи, но оставался шанс, что кто-то со свежим взглядом сможет улучшить наш результат. «Of course there is the possibility that someone will make a breakthrough and supersede our paper too»[20], написала Джулия, «but we should think of that as being good for mathematics!»[21] Рафаэль, напротив, считал, что 13 неизвестных будут оставаться лучшим результатом в течение не одного десятилетия. В действительности этот рекорд пал ещё до выхода нашей статьи из печати. Требуемой «новой идеей» оказалась, как это часто случается, идея старая, но преданная забвению.

В нашем случае ей оказалась следующая замечательная теорема Эрнста Эдуарда Куммера (Ernst Eduard Kummer): *наибольшей степенью простого числа p, которая делит биномиальный коэффициент $\binom{a+b}{b}$, является p^c, где c — это количество переносов из разряда в разряд, выполняемых при сложении чисел a и b, записанных в позиционной системе счисления с основанием p.* Этот старый результат был неоднократно переоткрыт и передоказан, мне посчастливилось узнать о нём из реферата на работу [20] в *Реферативном журнале Математика*. Теорема Куммера оказалась чрезвычайно мощным инструментом для построения диофантовых уравнений со специальными свойствами. (Джулия однажды назвала её «a gold mine»[22].) Технически сложно описать все применения этой теоремы, но одно из них может быть объяснено здесь.

Зафиксируем простое число p и некоторое отображение f множества $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ в него же такое, что $f(0) = 0$. Это отображение можно расширить до функции F, определяемой на всех натуральных числах следующим образом:

$$F(\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}) \;=\; \overline{f(a_n) f(a_{n-1}) \ldots f(a_0)}. \tag{26}$$

Здесь $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ — это число, записываемое цифрами a_n, a_{n-1}, …, a_0 в позиционной системе счисления с основанием p. Нетрудно доказать, что F является экспоненциально диофантовой функцией. Действительно, $b = F(a)$ если и только если существуют натуральные числа c_0, …, c_{p-1}, d_0, …, d_{p-1}, k, s, u, w_0, …, w_{p-1}, v_0, …, v_{p-1}, такие что

$$a = \quad 0 * d_0 + \quad 1 * d_1 + \quad \ldots \quad + (p-1) * d_{p-1}, \tag{27}$$

$$b = \quad f(0) * d_0 + \quad f(1) * d_1 + \quad \ldots \quad + f(p-1) * d_{p-1}, \tag{28}$$

$$s = \quad d_0 + \quad d_1 + \quad \ldots \quad + d_{p-1}, \tag{29}$$

$$s = \frac{p^{k+1}}{p-1}, \tag{30}$$

[20] Конечно, имеется вероятность, что кто-то совершит прорыв и наша статья также будет превзойдена.

[21] Но мы должны смотреть на это как на благо для математики.

[22] Золотая жила.

$$u = 2^{s+1}, \tag{31}$$

$$(u+1)^s = w_i u^{d_i+1} + c_i u^{d_i} + v_i, \tag{32}$$

$$v_i < u^{d_i}, \tag{33}$$

$$c_i < u, \tag{34}$$

$$p \nmid c_i. \tag{35}$$

Эта система имеет решение

$$d_i = \sum_{l=1}^{k} \delta_i(a_l) p^l, \tag{36}$$

где δ_i — это дельта-функция: $\delta_i(i) = 1$, в противном случае $\delta_i(j) = 0$. В этом решении

$$w_i = \sum_{k=d_i+1}^{s} \binom{s}{k} u^k, \tag{37}$$

$$c_i = \binom{s}{d_i}, \tag{38}$$

$$v_i = \sum_{k=0}^{d_i-1} \binom{s}{k} u^k, \tag{39}$$

и для данного значения k это решение единственно.

Теорема Куммера служит мостом между теорией чисел и логикой, поскольку позволяет работать с числами как с последовательностями нефиксированной длины, состоящими из символов конечного алфавита. Применение теоремы Куммера для уменьшения количества неизвестных одним скачком понизило его с 13 до 9. Я сделал набросок доказательства и послал его Джулии. Когда мы встретились во второй раз в Лондоне, Онтарио, во время V Международного конгресса по логике, методологии и философии науки, Джулия подтвердила, что доказательство правильно, и я осмелился в своем выступлении [21] доложить этот результат. Мы надеялись, что сможем опубликовать его в приложении к нашей статье в *Acta Arithmetica*, но оказалось, что было уже поздно.

В 1974 году Американское математическое общество организовало симпозиум «Mathematical Developments Arising From Hilbert's Problems» в городе Де-Калб, штат Иллинойс. Я был приглашён выступить про десятую проблему, но моё участие в этой конференции не получило требовавшегося одобрения в моей стране, и докладчиком стала Джулия; она, однако, предложила, чтобы статья в трудах симпозиума была совместной с Мартином Дейвисом и мною.

Вновь у нас была проблема близкого срока подачи рукописи. По этой причине мы сначала обсудили по телефону, о чём будет писать каждый из нас. Конечно, Джулия и Мартин общались друг с другом гораздо больше, чем со мной. Трудную завершающую работу по объединению трёх частей в согласованное изложение [22] проделал Мартин. Я полагаю, что статья получилась

такой, о какой Джулия думала уже давно: нетехническое введение в многочисленные результаты, полученные логиками в связи с десятой проблемой Гильберта.

Работа над совместной статьёй [22] не позволила мне быстро подготовить статью про новую редукцию до 9 неизвестных (очевидно, что теперь была моя очередь писать текст). К сожалению, Джулия твёрдо отказалась быть соавтором. Она написала: «I do not want to be a joint author on the 9 unknowns paper — I have told everyone that it is your improvement and in fact I would feel silly to have my name on it. If I could make some contribution it would be different»[23].

Я совершенно уверен, что без вклада Джулии в [19] и без её воодушевления я бы никогда не довёл N до 9. Я был не склонен публиковать доказательство один, и полное доказательство результата, анонсированного в [21], в течение долгого времени оставалось неопубликованным. В конце концов Джеймс П. Джоунс (James P. Jones) из университета в Калгари провёл полгода в Беркли, там, где жили Джулия и Рафаэль. Джеймс изучил мой набросок доказательства и комментарии Джулии к нему и сделал доказательство общедоступным в [24].

На диване сидят слева направо: Мартин Дейвис, Джулия Робинсон, автор, Джеймс Джоунс. Фотографию сделала по просьбе автора Луиза Гай (Louise Guy) в доме декана математического факультета Патрика Брауна (Patrick Brown), который сидит на переднем плане

Прилагаемая фотография была сделана в Калгари в конце 1982 года во время моего трёхмесячного сотрудничества с Джеймсом в рамках программы научного обмена между Математическим институтом им. В. А. Стеклова и Queen's University в Кингстоне, Онтарио. Джулия в то время была поглощена своими новыми обязанностями в качестве Президента Американского

[23] Я не хочу быть соавтором статьи про 9 неизвестных — я говорила всем, что это Ваше улучшение, и я на самом деле буду чувствовать себя глупо, если моё имя будет там. Если бы я могла внести что-либо, то это было бы другое дело.

математического общества (AMO) и не очень много времени уделяла математическим исследованиям. Она посетила Калгари по дороге на встречу AMO. Мартин специально приехал в Калгари на несколько дней.

Я завершаю эти воспоминания ещё одним отрывком из письма Джулии, с содержанием которого я полностью согласен: «Actually I am very pleased that working together (thousands of miles apart) we are obviously making more progress than either one of us could alone»[24].

Благодарности

Я признателен Рафаэлю Робинсону, Констанции Рид (Constance Bowman Reid) и Мартину Дейвису за их помощь в подготовке этого повествования к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Matijasevich Yuri. My collaboration with Julia Robinson // The Mathematical Intelligencer. 1992. Vol. 14. Issue 4. P. 38–45. Недопечатанный список литературы исправлен в ibid. vol. 15, issue 1, 1993, p. 75. Доступно на `http://logic.pdmi.ras.ru/yumat/personaljournal/collaborationjulia/index.html`.
   Перепечатано на стр. 99–117 в [6].
   Перепечатано с недопечатанным списком литературы в сб.: *Mathematical Conversations. Selections from the Mathematical Intelligencer.* Составители Robin Wilson и Jeremy Gray, Springer, New York, NY, 2001; ISBN 978-0-387-98686-9, 978-1-4613-0195-0(electronic), 978-1-4612-6556-6.
   Исправленый список литературы доступен на
   `http://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/9780387986869-e1.pdf?SGWID=0-0-45-101704-p2014592`
2. Hilbert David. Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker Kongress zu Paris 1900 // Nachrichten von der Konigl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, Band Heft 3, 1900. P. 253–297. Русский перевод в сборнике: Проблемы Гильберта / под ред. П. С. Александрова. — М.: Наука, 1969. С. 141–153.
3. Давыдов Г. В., Матиясевич Ю. В., Минц Г. Е., Оревков В. П., Слисенко А. О., Сочилина А. В., Шанин Н. А. Сергей Юрьевич Маслов (некролог) // УМН. 1984. Т. 39, вып. 2. С. 133–135.
4. Davis Martin, Putnam Hilary, and Robinson Julia. The decision problem for exponential Diophantine equations // Ann. of Math. 1961. Vol. 74, № 3. P. 425–436. Перепечатано в [23]. Русский перевод в сборнике [5].
5. Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 8:5. — М.: Мир, 1964.
6. Reid Constance. The Autobiography of Julia Robinson / in More Mathematical People – Academic Press, 1990. P. 262–280. Перепечатано в: Reid Constance. JULIA. A Life in Mathematics – The Mathematical Association of America, 1996; ISBN 0-88385-520-8.
7. Robinson Julia. Existential definability in arithmetic // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. Vol.72. P. 437–449. Перепечатано в [23]. Русский перевод в сборнике [5].
8. Всемирнов М. А., Гирш Э. А., Григорьев Д. Ю., Давыдов Г. В., Данцин Е. Я., Заславский И. Д., Караваев Э. Ф., Конев Б. Ю., Косовский Н. К., Лифшиц В. А., Маргенштерн М., Матиясевич Ю. В., Минц Г. Е., Оревков В. П., Плюшкявичус Р., Слисенко А. О., Соловьев С. В., Чернов В. П. Николай Александрович Шанин (некролог) // УМН. 2013. Т. 68, вып. 4. С. 173–176.

[24] Я в самом деле очень рада, что работая вместе (разделённые тысячами миль) мы очевидным образом достигаем большего прогресса, чем мог бы достичь каждый из нас по отдельности.

9. Robinson Julia. Unsolvable Diophantine problems // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 22. P. 534–538. Перепечатано в [23].
10. Матиясевич Ю. В. Диофантовость перечислимых множеств // ДАН СССР. 1970. Т.191, №2. С. 279–282. Переведено в Soviet Math. Doklady 11(20) (1970), 354–357; исправление ibid 11 (6) (1970), vi.
11. Matijasevich Yuri. On recursive unsolvabilitv of Hilbert's tenth problem / Proceedings of Fourth International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971. Amsterdam: North-Holland, 1973. P. 89–110.
12. Воробьёв Н. Н. Числа Фибоначчи, 2-е изд. 1964; 3-е изд. — М.: Наука, 1969.
13. Julia Bowman Robinson papers – BANC MSS 99/265 c, The Bancroft Library, University of California, Berkeley; http://www.oac.cdlib.org/search?query=99%2F265&x=0&y=0
14. Robinson Julia. Axioms for number theoretic functions – Избранные вопросы алгебры и логики (сборник, посвящённый памяти А. И. Мальцева). — Новосибирск: Наука, 1973. С. 253–263. Перепечатано в [23].
15. Матиясевич Юрий, Робинсон Джулия. Два универсальных трёхкванторных представления перечислимых множеств / Теория алгорифмов и математическая логика. ВЦ АН СССР, 1974. С. 112–123. Перепечатано в [23]. Перевод доступен на http://arxiv.org/abs/0802.1052.
16. Robinson John A. A machine-oriented logic based on the resolution principle // J. Assoc. Comput. Mach. 1965. Vol. 12. P. 23–41. Переведено в: Кибернетический сборник (новая серия), 1970, №7. С. 194–218.
17. Orevkov V. P. Complexity of proofs and their transformations in axiomatic theories / Translations of Mathematical Monographs, 128. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. vi+153 p.
18. Robinson Julia. An iterative method of solving a game // Ann. of Math. 1951. Vol. 54, № 3. P. 296–301. Перепечатано в [23].
19. Matijasevich Yuri and Robinson Julia. Reduction of an arbitrary Diophantine equation to one in 13 unknowns //Acta Arith. 1975. Vol. 27. P. 521–553. Перепечатано в [23].
20. Singmaster D. Notes on binomial coefficients // J. London Math. Soc. 1974. Vol. 8. P. 545–548.
21. Matijasevich Yuri. Some purely mathematical results inspired by mathematical logic / Proceedinqs of Fifth International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of science, London, Ontario, 1975. Dordrecht: Reidel, 1977. P. 121–127.
22. Davis Martin, Matijasevich Yuri, and Robinson Julia. Hilbert's tenth problem. Diophantine equations: positive aspects of a negative solution // Proc. Symp. Pure Math. 1976. Vol. 28. P. 323–378. Перепечатано в [23].
23. The collected works of Julia Robinson / Solomon Feferman, ed. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. ISBN 0-8218-0575-4. (Collected Works, Vol. 6)
24. Jones James P. Universal diophantine equation // J. Symbolic Logic. 1982. Vol. 47. P. 549–571.

Поступила 11.07.2014

MY COLLABORATION WITH JULIA ROBINSON

Yu. V. Matiyasevich

The story of the solution of Hilbert's tenth problem, a fundamental contribution to which was made by American mathematician Julia Robinson.

Keywords: Hilbert's tenth problem, Diophantine equations, decision problems, Julia Robinson.