ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 510.635

О ЗАКОНЕ «0 ИЛИ 1», ОТКРЫТОМ Ю. В. ГЛЕБСКИМ, И СВЯЗАННЫХ С НИМ РЕЗУЛЬТАТАХ, ПОЛУЧЕННЫХ НА КАФЕДРЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И АЛГЕБРЫ ННГУ

М. И. Лиогонький♠, В. А. Таланов♥

♠*Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет*
Россия, 603950 , г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65;
e-mail: liogmark@mail.ru
♥*НИУ Высшая школа экономики – Нижний Новгород*
Россия, 603155, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12;
e-mail: vtalanov@hse.ru

В 1966 г. заведующий кафедрой математической логики и алгебры ННГУ им. Н. И. Лобачевского Юрий Васильевич Глебский доказал ставший уже классическим результат, именуемый как «закон 0 или 1» для формул узкого исчисления предикатов. Авторы делятся воспоминаниями об общении с Ю. В. Глебским в этот период, а также упоминают ряд своих результатов в развитие указанного закона.

Ключевые слова: логика предикатов, доля выполнимости, закон «0 или 1».

В данной заметке авторы вспоминают об общении с незабываемым Юрием Васильевичем Глебским в период, когда он занялся (и увлёк за собой авторов) исследованием количественных характеристик логических формул узкого исчисления предикатов (УИП). Уже в самом названии отражён тот факт, что самым фундаментальным результатом и отправной точкой дальнейших исследований является ставший уже классическим открытый Глебским закон «0 или 1» в УИП. Авторы также упоминают некоторые результаты, полученные ими в развитие этого направления исследований. Сложилось так, что сначала более активно занимался этой проблематикой первый из авторов, и с ней была связана тема его кандидатской диссертации, а затем интересные результаты получил второй автор. Поэтому и изложение ведётся поочередно — сначала первым, а затем вторым.

Ю. В. Глебский

1. Воспоминания М. Лиогонького

Весной 1964 я и ещё трое студентов были первыми выпускниками открытого 1 декабря 1963 года факультета ВМК Горьковского (ныне Нижегородского) университета. Всех нас оставили работать в качестве ассистентов на этом факультете. С Юрием Васильевичем Глебским в моей жизни связано много. Я писал под его руководством диплом, в котором рассматривались некоторые задачи теории расписаний. Став ассистентом на кафедре математической логики и алгебры, вёл за ним практические занятии по курсу «Высшая алгебра». При этом надо отметить, что Юрий Васильевич разработал новый, современный курс алгебры, отличный от традиционно читавшегося на мехмате. В 1966 году я поступил в аспирантуру при факультете ВМК и под руководством Ю. В. Глебского в 1970 году защитил диссертацию «Асимптотическое поведение количественных характеристик логических формул». Тема диссертации наметилась ещё до моего поступления в аспирантуру, но, несмотря на наше тесное сотрудничество, мне трудно сказать, какие задачи побудили Ю. В. Глебского заняться исследованием поведения количественных характеристик логических формул УИП. По-видимому, это было связано с попыткой найти универсальный метод для определения количества графов, обладающих теми или иными свойствами, путём установления зависимости этого количества от синтаксического строения формул УИП, с помощью которых свойства, выделяющие эти графы, могут быть записаны. Однако такие попытки уже в простейших случаях (например, для транзитивных графов с n вершинами) наталкивались на серьёзные комбинаторные трудности. При этом в тех случаях, когда всё же удавалось такие зависимости найти, бросался в глаза тот факт, что доля числа графов, удовлетворяющих выраженному формулой свойству, или стремится к 0, или стремится к 1, причем это стремление происходит достаточно быстро.

Так или иначе, но осенью 1965 года Ю. В. Глебский сформулировал гипоте́зу (он любил произносить это слово с ударением на третьем слоге) о том, что для любой формулы УИП без свободных индивидных переменных доля её выполнимости на конечных моделях, под которой понимается отношение числа n-моделей (моделей, в которых каждая индивидная переменная принимает одно из целых значений от 1 до n), на которых формула истинна, к числу всех n-моделей, при $n \to \infty$ стремится либо к 0, либо к 1. Это было довольно смелое утверждение, которое, возможно, подкреплялось тем фактом, что для ряда частных ситуаций (например, для замкнутых формул, которые имеют в предварённой нормальной форме лишь один квантор) справедливость гипотезы легко устанавливалась. А может быть, оно подкреплялось словом «узкое» в названии «узкое исчисление предикатов», которое будто подчеркивает, что на таком языке можно выделить лишь те свойства, которыми почти все конечные модели или обладают, или не обладают.

Естественно, что гипотеза оказалась привлекательной, и к исследованию в данном направлении, наряду со мной, активно подключились Д. И. Коган (так же, как и я, сотрудник кафедры математической логики и алгебры) и В. А. Таланов (аспирант этой кафедры). В начале 1966 года на одном из научных семинаров кафедры я изложил разработанный мной алгоритм для нахождения числа n-моделей, обращающих в истину заданную замкнутую формулу УИП, содержащую лишь одноместные предикаты. Из получающихся в результате его применения соотношений непосредственно вытекал факт стремления при $n \to \infty$ доли её выполнимости на конечных моделях к 0 или 1, причем отчётливо просматривался практически экспоненциальный характер этого стремления.

В случаях, когда формула содержит многоместные предикаты и предварённая нормальная форма содержит более одного квантора, основные трудности при нахождении числа моделей, обращающих в истину замкнутую формулу УИП, связаны с возможностью совпадений значений различных индивидных переменных. Применение различных комбинаторных методов (чаще всего метода включения и исключения) приводило к формулам, из которых трудно просматривалась динамика поведения доли выполнимости при $n \to \infty$.

Однако ряд результатов, подтверждающих выдвинутую гипотезу (одноместные предикаты и обнаруженные В. А. Талановым некоторые нетривиальные ситуации), а также, видимо, уже сложившаяся схема доказательства, сформировали у Глебского настолько полную уверенность в её справедливости в общем случае, что весной 1966 года он направил на предстоящий летом Международный математический конгресс тезисы «Количественные оценки выполнимости предикатных формул» [1], в которых выдвинутая им гипотеза была сформулирована в виде теоремы. Но ещё к лету ни один из нас не знал о существовании доказательства этой теоремы.

Встретившись с Юрием Васильевичем по возвращении из отпуска, я рассказал ему о впечатлениях от длительного похода (со сплавом на плотах) по Восточным Саянам. Юрий Васильевич с интересом выслушал (он и сам с большой охотой несколько раз ходил с нами в походы), а потом, улыбаясь своей мягкой улыбкой, сказал, что доказал справедливость гипотезы и протянул мне тоненькую школьную тетрадь, в которой красивым почерком излагалось красивое доказательство теперь уже теоремы о том, что доля выполнимости $\mathrm{г}_n(A)$ любой замкнутой формулы A узкого исчисления предикатов без пропозициональных переменных стремится к 0 или к 1 при $n \to \infty$. Причём это стремление таково, что для любого $k > 0$ если $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{г}_n(A) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \mathrm{г}_n(A) = 0$, а если $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{г}_n(A) = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\bigl(1 - \mathrm{г}_n(A)\bigr) = 0$.

Доказать выдвинутую гипотезу Глебскому удалось благодаря рассмотрению так называемых исключающих кванторов общности и существования. Эти кванторы отличаются от обычных тем, что если, например, формула A наряду с индивидной переменной x содержит свободные индивидные переменные $y_1, y_2, \ldots, y_k$, то после навешивания исключающих кванторов общности или существования по переменной x (обозначаются как $(x/y_1, y_2, \ldots, y_k)$ или $(\exists\, x/y_1, y_2, \ldots, y_k)$ соответственно) эта переменная при интерпретации может принимать лишь те значения, которые отличны от значений, которые присвоены свободным индивидным переменным $y_1, y_2, \ldots y_k$. Показав, что доля выполнимости всякой формулы, содержащей один исключающий квантор и не содержащей пропозициональные переменные, стремится либо к 0, либо к 1 с указанной выше скоростью, Юрий Васильевич тем самым получил, с одной стороны, возможность оценивать асимптотическое поведение доли выполнимости формул с одним обычным квантором, а с другой стороны — возможность применять метод математической индукции для исследования асимптотического поведения доли выполнимости формул при навешивании новых кванторов.

Таким образом, можно утверждать, что эта теорема, анонсированная в тезисах математического конгресса, доказана в 1966 году.

Через T_σ обозначим совокупность формул УИП, которые содержат предикатные символы из сигнатуры σ, не содержат свободных индивидных переменных, и для которых доля выполнимости стремится к единице. Теорему Глебского можно сформулировать так: T_σ есть полная непротиворечивая разрешимая теория. Её можно понимать как теорию почти всех конечных моделей сигнатуры σ.

На математическом конгрессе в Москве Ю. В. Глебский познакомился с известным математиком Х. Гайфманом, который рассказал ему о своем способе определения количественных оценок логических формул, опубликованном в [2].

Согласно этому способу, при навешивании каждого квантора по индивидной переменной, принимающей значения от 1 до n, на формулу с уже известной количественной оценкой, для нахождения количественной оценки получаемой формулы нужно осуществить, грубо говоря, предельный переход при $n \to \infty$. При этом замкнутые формулы без пропозициональных переменных также получают оценку либо 0, либо 1. (Различие двух подходов к определению количественных характеристик формул УИП подобно различию в определениях многомерных несобственных интегралов: подходу Глебского отвечает определение несобственности по главному направлению, а подходу Гайфмана — по каждой переменной в отдельности. Но подход Глебского с точки зрения интерпретации получаемой оценки представляется более прозрачным.)

Таким образом, совокупность замкнутых формул сигнатуры σ без пропозициональных переменных, имеющих в смысле Гайфмана количественные оценки, равные 1, также образует полную разрешимую теорию T^1_σ. Естественно встал вопрос о том, как соотносятся теории T_σ и T^1_σ. Мне удалось доказать, что T_σ совпадает с T^1_σ. Для доказательства этого совпадения, а также для доказательства ряда последующих результатов, оказался полезным тот факт, что в работе Гайфмана построена рекурсивная система аксиом Ψ, из которой выводимы все формулы теории T^1_σ. Для её описания назовем полной диаграммой $S(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l)$ конъюнкцию атомарных формул сигнатуры σ, полностью описывающую некоторую конкретную модель сигнатуры σ, построенную на индивидных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_l$. Будем также говорить, что полная диаграмма $S_2(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l, y)$ расширяет полную диаграмму $S_1(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l)$, если формула $S_2(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l, y) \supset S_1(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l)$ является теоремой в УИП.

Рекурсивная система аксиом Ψ состоит из предложений двух видов:

1) Предложения вида
$(\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_l)\, S(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l)$, где $l > 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — произвольный список индивидных переменных, а $S(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l)$ — произвольная полная диаграмма;
2) Предложения вида
$(x_1)(x_2/x_1)\ldots(x_1/x_1, x_2, \ldots, x_{l-1})(\exists\, y/x_1, x_2, \ldots, x_l)[S_1(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l) \supset \supset S_2(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l, y)]$, где $S_2(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l, y)$ — произвольная полная диаграмма, расширяющая полную диаграмму $S_1(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l)$.

Нетрудно видеть, что моделью Ω системы аксиом Ψ является такая бесконечная модель сигнатуры σ, которая содержит в себе в качестве подмодели любую конечную модель сигнатуры σ, и всякая конечная модель сигнатуры σ может быть продолжена внутри Ω до любого своего конечного расширения.

(Отметим, что в работе [2] допущена неточность: у Х. Гайфмана предложения вида 2) записаны как

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_l)(\exists\, y/x_1, x_2, \ldots, x_l)[S_1(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l) \supset S_2(\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_l, y)],$$

т. е. в них используются не исключающие, а обычные кванторы общности. Однако можно построить пример, показывающий, что в таком случае система аксиом оказывается противоречивой.)

Совпадение теорий T_σ и T_σ^1 оказалось немедленным следствием того, что доля выполнимости всех аксиом системы Ψ стремится к 1, и что класс формул, для которых доля выполнимости стремится к 1, замкнут относительно правила вывода.

В литературе датой открытия закона «0 или 1» считается 1969 год, когда вышла статья [3], где наряду с другими аспектами изучения количественных характеристик логических формул (например, Д. И. Коганом была показана элементарность по Кальмару объёма выполнимости формул УИП) впервые в напечатанном виде приводится его доказательство.

В первом отклике на статью [3] в реферативном журнале Ю. Ш. Гуревич (который в дальнейшем сделал очень много для популяризации и развития закона «0 или 1» — подробнее об этом см. в конце статьи), отмечая интерес изложенного в ней материала, высказал сожаление о том, что не существует алгоритма, который для произвольной формулы определял бы, какой именно предел имеет её доля выполнимости. Познакомившись с Ю. Ш. Гуревичем на конференции по математической логике в Тракае в 1969 году, я рассказал ему, что из доказательства теоремы ответ на этот вопрос можно найти исходя из синтаксического строения формулы.

В стремлении развить данный результат Ю. В. Глебский поставил вопрос об асимптотике поведения так называемой условной доли выполнимости логических формул УИП, т. е. когда рассмотрение ведется только на таком объёме n-моделей, в котором каждая n-модель обращает в истинность некоторую замкнутую формулу F из УИП. Уже в упомянутой выше статье [3] был приведен пример формулы F, предел условной доли выполнимости относительно которой мог отличаться и от 0, и от 1. Занявшись более внимательным исследованием данного вопроса, я смог показать, что в случае с условной долей выполнимости ситуации могут быть самыми разнообразными. С одной стороны, мне удалось сформулировать достаточное условие, когда «закон 0 или 1» сохраняется и для условной доли выполнимости (в частности, такой пример доставляет формула, определяющая свойство эквивалентности бинарного отношения). С другой стороны, мне удалось показать, что найдется такая формула F из УИП, что вопрос, существует ли для произвольной формулы УИП предел её условной доли выполнимости относительно формулы F, неразрешим.

Ещё на одно направление исследования указал Ю. Л. Ершов. В 1968 году, находясь в Новосибирском Академгородке, я имел возможность рассказать ему о законе «0 или 1» и связанных с этим законом результатах. Как мне тогда показалось, сам по себе этот закон не показался Ю. Л. Ершову неожиданным, якобы по причине «очень большого знаменателя». Интересно было бы, сказал он, при исследовании доли выполнимости логических формул ограничиться рассмотрением и в числителе, и в знаменателе лишь неизоморфными n-моделями. Исследование, проведённое мной в этом направлении, показало, что закон «0 или 1» остаётся в силе, причем предел доли выполнимости формулы по всем n-моделям совпадает с пределом доли выполнимости этой формулы по неизоморфным n-моделям. Для доказательства этого факта опять оказалось достаточным показать, что для каждой аксиомы системы Ψ предел её доли выполнимости по неизоморфным n-моделям равен 1. Однако скорость стремления доли выполнимости формул по неизоморфным моделям к соответствующим пределам оказывается уже не столь стремительной.

В дальнейшем Ю. В. Глебский несколько отошёл от исследований в данной области. Некоторыми другими проблемами (например, аддитивными векторными системами) он увлёк и меня вместе с Д. И. Коганом. Но, как было сказано выше, к работе в описываемой области ещё более активно подключился В. А. Таланов.

Прежде, чем передать ему слово, хочу сказать, что благодарен судьбе за то, что мне повезло часть моей жизни общаться с красивым, талантливым от Бога математиком и замечательным человеком, каким был Юрий Васильевич. И ещё хочу вспомнить, что 1-го августа 1977-го года я на один день приехал в город из деревни, где отдыхал с женой и детьми. Часов в 9 вечера я созвонился с Д. И. Коганом и мы в более чем получасовом разговоре обсуждали практически один вопрос: как будем готовиться к празднованию 50-летия Ю. В. Глебского (4-го сентября 1977 года). Буквально через 10 минут после окончания разговора раздался телефонный звонок и Д. И. Коган сказал буквально следующее: «Марк, кошмар, мне сейчас позвонили и сказали, что сегодня днём на Волге, спасая своего сына, утонул Юрий Васильевич!».

2. Воспоминания В. Таланова

Впервые я встретился с Юрием Васильевичем, будучи студентом горьковского университета. Он читал нам лекции по математической логике. Единственным учебным материалом по дисциплине была книга П. С. Новикова

«Элементы математической логики». Я тогда подумал, что мне это интересно. Под руководством Юрия Васильевича защитил диплом о конечных автоматах. Что такое конечный автомат мы знали тогда только по журнальным статьям. Окончив университет и проработав по распределению три года в хорошо известном теперь городе Сарове, я стал аспирантом Ю. В. Глебского. При планировании моей аспирантской работы обсуждались два направления. Первое — это исследование количественных характеристик формул логики предикатов, и второе — построение математических моделей теории расписаний. Второе закончилось защитой диссертации, а первое имело продолжение уже в 70-х годах, когда я преподавал на кафедре математической логики и алгебры факультета ВМК. Юрий Васильевич проявлял большой интерес к моим исследованиям, но большая часть описанных ниже результатов была получена, когда его уже не стало. Последняя моя встреча с Юрием Васильевичем была в июле 1977 года во время отпуска, накануне его гибели. Мы случайно с ним встретились на улице возле дома, и он стал мне рассказывать план исследований по проблеме NP-полноты. Мы договорились встретиться на следующий день для подробного обсуждения, но этому не суждено было случиться.

При разработке кафедрального спецкурса по элементам математической кибернетики я решил включить в него задачи о подсчёте доли выполнимости предикатных формул и о «0 или 1»-законе Глебского. Это оказалось удачным решением. Во-первых, это хорошая практика по корректному использованию кванторов в естественном математическом языке, во-вторых — практика по комбинаторике.

Обратив внимание на некоторые известные факты о свойствах графов — такие, как «почти все графы связны», «почти все графы гамильтоновы», «доля планарных графов стремится к нулю с ростом числа вершин» — с огорчением пришлось заметить, что многие из них не выражаются первопорядковыми предикатными формулами. Но для некоторых свойств можно найти асимптотически истинные достаточные условия, выразимые в логике первого порядка. Простейшим таким свойством оказалось невыразимое первопорядковой формулой свойство связности графа. Известно, что наличие в графе путей длины 2, соединяющих любые две его вершины, является достаточным условием его связности. В то же время оно выразимо в логике первого порядка и является асимптотически истинным. Переходя от языка теории графов к языку предикатов и интерпретируя любой двуместный предикат $R(x, y)$ как ориентированный граф, можно ввести в рассмотрение бесконечную формулу, выражающую наличие пути в графе от вершины x к вершине y. Если обозначить эту бесконечную формулу через $R^*(x, y)$ и использовать её в построении формул наравне с другими предикатами, то тем самым расширяется синтаксис первопорядковой логики и получается расширенный язык предикатов, в котором связность графа уже выражается конечной формулой. Мною доказано (1979), что закон «0 или 1» распространяется на этот расширенный язык.

Я рассказал об этом факте на лекции, и здесь мне повезло: один из моих студентов, В. Князев, проявил интерес к этой тематике и начал вместе со мной поиск новых расширений применимости «0 или 1»-закона. Полученные результаты публиковались в наших совместных работах и отражены в его кандидатской диссертации. Приведу некоторые из них. Ряд результатов (1989) относится к логике k-значных предикатов с кванторами MIN, MAX. Не вдаваясь в подробные определения, скажу, что в разработанном формализме нетрудно, например, выразить свойство матрицы иметь седловую точку и, опираясь на доказанные теоремы, непосредственно увидеть, что доля k-значных матриц без седловой точки с ростом размерности экспоненциально стремится к единице.

Другой ряд результатов относится к многосортным языкам предикатов. Ограничусь примером, показывающим, о чём идет речь. Каждой конечной интерпретации двухместного предикатного символа с разносортными аргументами соответствует $(0-1)$-матрица или двудольный граф[1]. Уже формулами первого порядка выразимы необходимые или достаточные условия наличия некоторых содержательных свойств таких структур (например, достаточное условие связности двудольного графа, необходимое условие планарности двудольного графа). Непосредственно из полученных результатов вытекает, например, следующее утверждение: если мощности долей двудольного графа описываются предэкспоненциальными функциями $m_1(n)$ и $m_2(n)$, то с ростом n доля связных (соответственно, планарных) двудольных графов среди всех двудольных графов экспоненциально стремится к единице (соответственно, стремится к нулю).

Ещё одно расширение языка первого порядка оказалось возможным за счет введения для каждого рационального числа r из интервала $(0, 1)$ нового квантора $\exists^r$. Содержательная интерпретация этого квантора состоит в следующем. Формулу $\exists^r x\, A(x, x_1, \ldots)$ следует считать истинной, если в универсуме из n элементов найдется не менее $[r \cdot n]$ элементов a таких, при которых формула $A(a, x_1, \ldots)$ истинна. Среди полученных в этом направлении результатов приведу в качестве примеров следующие два.

Для любого числа $\varepsilon > 0$ доля n-вершинных орграфов, в которых полустепень исхода любой вершины больше $(1/2 - \varepsilon) \cdot n$, экспоненциально стремится к единице при $n \to \infty$.

Доля n-вершинных орграфов G таких, что для любого m-элементного подмножества V вершин графа G найдется не менее $b \cdot n$ вершин, каждая из которых следует за всеми вершинами из множества V, при $n \to \infty$ экспоненциально стремится к единице, если $0 < b < 2^{-m}$, и экспоненциально стремится к нулю, если $2^{-m} < b < 1$.

Заключение

Мы привели несколько результатов исследований, начало которым было положено открытием закона «0 или 1» для первопорядковой логики преди-

[1] Заметим, что в теории графов под двудольным графом обычно понимают обыкновенный граф, в котором множество вершин может быть разбито на два подмножества (доли), порождающие подграфы с пустым множеством ребер. Это разбиение, вообще говоря, может быть неоднозначным. Мы здесь распространяем понятие двудольного графа на ориентированные графы и считаем, что доли графа зафиксированы.

катов. Надо сказать, что до 1976 года в математической литературе по поводу этого закона было некоторое научное молчание. В 1976 году, как нам стало известно от Е. И. Гордона (которому, в свою очередь, об этом сообщил Б. А. Трахтенброт в Новосибирске), закон «0 или 1» был переоткрыт Р. Фейджиным [4].

В связи с этим следует подробнее сказать о роли, которую сыграл известный математик и логик Ю. Ш. Гуревич в установлении приоритета Ю. В. Глебского. В 1970 году Ю. Ш. Гуревич был официальным оппонентом при защите М. И. Лиогоньким кандидатской диссертации (его выступление на защите и прочитанная затем лекция произвели на слушателей неизгладимое впечатление) и был полностью осведомлен об имеющихся к тому времени результатах. К моменту опубликования статьи Р. Фейджина [4] Ю. Ш. Гуревич был полным профессором Мичиганского университета. Он приложил немалые усилия, чтоб математическое сообщество узнало о Ю. В. Глебском и о результатах, полученных на кафедре математической логике и алгебры ННГУ. В частности, в своих многочисленных работах, посвященных «zero-one laws» (из которых укажем только [5–7]), он постоянно даёт ссылки на эти результаты. Несомненно, что именно благодаря авторитету Ю. Ш. Гуревича закон «0 или 1» носит название закона Глебского. Авторы выражают глубокую признательность Ю. Ш. Гуревичу за то, что имя глубокого, тонкого математика и прекрасного человека, каким был Ю. В. Глебский, заслуженно вписано в анналы современной математической логики.

В настоящее время «0 или 1»-тематика стала чрезвычайно популярной и развивается в многочисленных направлениях. Знакомство с современным состоянием знаний о законах «0 или 1» выходит за рамки этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глебский Ю. В. Количественные оценки выполнимости предикатных формул. Тезисы кратких научных сообщений Международного конгресса математиков, секция 1. — М., 1966. С. 32.
2. Gaifman H. Concerning measures in first order calculi // Israel Journal of Mathematics. 1964. V. 2. P. 1–18.
3. Глебский Ю. В., Коган Д. И., Лиогонький М. И., Таланов В. А. Объём и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов // Кибернетика. 1969. №2. С. 17–26.
4. Fagin R. Probabilities on finite Models // The Journal of Symbolic Logic. March 1976. Vl. 41, №1. P. 50–58.
5. Blass A., Gurevich Y., Kozen D. A zero-one law for logic with a fixed point operator // Inform. and Control. 1985. V. 67. P. 70–90.
6. Gurevich Yuri. Zero-One Law // Current Trends in Theoretical Computer Science. Eds. G. Rozenberg and A. Salomaa. World Scientic, Series of Computer Science. 1993. V. 40.
7. Blass A., Gurevich Y., Kreinovich V., Longpre L. A Variation on the Zero-One Law // Information Processing Letters. 1998. V. 67. P. 29–30.

Поступила 24.01.2014

ON THE ZERO-ONE LAW DISCOVERED BY YU. V. GLEBSKIY AND THE RELATED RESULTS DISCOVERED AT THE DEPARTMENT OF MATHEMATICAL LOGIC AND ALGEBRA AT UNN

M. I. Liogonkii, V. A. Talanov

In 1966 Yuri Glebskii, the head of the department of mathematical logic and algebra of the Nizhni Novgorod N. I. Lobachevsky University, proved a result that has already become a classic and is referred to as the zero-one law for formulas of the restricted predicate calculus. The authors share their memories of interactions with Yu. V. Glebskii during that period, as well as mention some of their own results that extend this law.

Keywords: predicate logic, feasibility share, the zero-one law.