СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 512.5 + 372.851

БУТЕРБРОДЫ И НОСКИ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Г. М. Полотовский♠, И. Д. Ремизов♥

♠*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского*
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп.6;
e-mail: polotovsky@gmail.com
♥*Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова*
Россия, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, 1;
e-mail: ivan.remizov@gmail.com

Приводится несколько примеров применения моделей, построенных из «бытовых» объектов, полезных для разъяснения студентам некоторых абстрактных структур современной математики.

Ключевые слова: бинарное отношение, группа, абстрактное понятие, опорный сигнал.

Профессор: «*Скажите, эти две группы изоморфны или нет?*»
Студентка: «*Первая изоморфна, а вторая — нет*».

Из написанного в последние годы о крайне недостаточном уровне математической подготовки поступающих (и поступивших) в вузы можно уже собрать библиотеку. Отдельную проблему представляют трудности, возникающие у студентов с усвоением весьма абстрактных понятий современной математики, которые появляются и быстро накапливаются в самом начале изучения вузовской математической программы. При этом надо отдавать себе отчёт, что в совершенно безобидной с точки зрения лектора фразе «пусть M — непустое множество элементов любой природы, и $\circ$ — операция на M, удовлетворяющая следующим свойствам. . . » большинство слушателей воспримут «множество» как синоним понятия «много», а термины «непустое» и «операция» не воспримут никак. Далее, если продолжением указанной фразы будет определение понятия «группа», то после этого вполне естественно привести примеры групп[1]. Но зачастую понятие группы вводится в тот момент, когда у студентов нет ещё достаточного набора множеств, состоящих из абстрактных математических объектов, с естественными операциями на этих множествах, т. е. нет ничего, кроме стандартных числовых множеств, множеств векторов на плоскости или в пространстве и множества действительных функций одной переменной (впрочем, и те, и другие, и третьи в школе, как правило, не освоены). Вот и получается, что единственный пример, который может быть разобран в этот момент — это группа целых чисел. Естественно, что у студентов возникнет недоумение: зачем такую хорошо понятную вещь, как сложение в области целых чисел, наряжать в такие абстрактные одежды? Конечно, лектор может долго рассказывать, что понятие

[1] Конечно, в этом месте речь идёт об университетском курсе математики.

группы потом будет неоднократно встречаться в теории матриц, в линейной алгебре, в физике и пр. — это перечисление можно продолжать очень долго, но для слушателей это будет пустая декларация. В результате идея введения групп как подхода для одновременного изучения разнообразных множеств с точки зрения алгебраической структуры, определяемой операциями, студентами воспринята, скорее всего, не будет, и у них не будет поэтому естественной мотивации к усвоению понятия группы.

Пример другого фрагмента, абстрактность которого вызывает большие трудности у студентов и который не менее важен для любого математического курса — бинарные отношения и их свойства. Здесь можно повторить все соображения, приведённые выше.

Ниже излагается подход к разъяснению этих абстрактных понятий с помощью наглядных примеров, построенных из привычных объектов реального мира. Не всегда иллюстрируемый математический аппарат нужен для изучения именно этих объектов, но зато на этих примерах легко усвоить суть самого аппарата.

1. Бутерброды

Бутербродом будем называть вертикальную стопку ломтиков (= слоёв) еды, сложенных друг на друга. Фиксируем множество F типов еды[2], которую можно использовать для составления бутербродов. Договоримся, что все слои находятся в «подмороженном» состоянии, так что далее можно будет намазывать масло на масло, а затем при необходимости допускается разделение эти слоёв и т. п. Также при желании можно уточнить сведения о толщине слоев: одинакова ли она для всех типов еды, или фиксирована для еды одного типа, или что-то иное. Для обозначения типов еды удобно использовать русские буквы: Б — батон, Р — ржаной хлеб, К — колбаса, С — сыр, М — масло, И — икра, П — помидор, Г — горчица и так далее. Если однобуквенных обозначений не хватает, можно применить и двухбуквенные, из которых первая буква заглавная, а вторая — строчная: Кт — котлета, Мн — майонез, Кч — кетчуп, и так далее. Тогда бутерброд «снизу ржаной хлеб, далее масло, потом два слоя колбасы и сверху один слой сыра» получит обозначение в виде слова РМККС, а «формула гамбургера» такова: БКтКчПМнБ.

Что можно делать с бутербродами? Первым делом, их можно сравнивать, причём различными способами. Например, можно ввести следующие отношения эквивалентности: бутерброды f и g называются эквивалентными, если

а) f и g оба содержат масло;

б) каждый из бутербродов f и g имеет два соседних слоя одного типа;

в) f и g содержат одни и те же ингредиенты (количество слоёв каждого типа может отличаться);

г) f и g содержат одни и те же ингредиенты в том же порядке (количество слоёв каждого типа может отличаться);

д) f и g содержат одно и то же суммарное количество слоев еды;

е) f и g имеют одинаковую калорийность;

[2] Типы еды фиксируются только до конца статьи ☺.

ж) f и g имеют одинаковую стоимость в университетском кафе;

з) слои в f можно переставить так, что получится g.

Очевидно, бутерброд РМККС а-эквивалентен бутерброду КМ, б-эквивалентен бутерброду БСИИ, в-эквивалентен бутерброду КРСМ, г-эквивалентен РРМКСС, д-эквивалентен РРРРР, но вряд ли е- и ж-эквивалентен БМИМИ (особенно если икра не кабачковая), зато з-эквивалентен СКРМК.

Также на множестве всех бутербродов естественно вводятся широко применяющееся в микроэкономике отношение предпочтения (рефлексивное + транзитивное + полное[3]) и используемые почти во всех разделах математики отношения порядка (рефлексивные + транзитивные + антисимметричные)[4]. Например, отношение порядка $f \leq g$ («f подчинён g») можно задать одним из следующих условий:

i) g содержит все те ингредиенты, которые входят в f (но помимо них может содержать и другие);

ii) f содержится в g в качестве «сплошного» подбутерброда, т. е. если с g снять нужное число слоев сверху и снизу, то получится f;

iii) f содержится в g в качестве «упорядоченного распределённого» подбутерброда, т. е. с g можно вытащить любое число слоев откуда угодно, не переставляя местами оставшиеся части, так, чтобы получился f;

iv) f содержится в g в качестве неупорядоченного подбутерброда, т. е. из g можно вытащить нужное количество слоев и сложить их так, что получится f;

v) общее количество слоев в f не больше, чем в g;

vi) f не более калорийный, чем g;

vii) f не дороже, чем g.

Нетрудно привести примеры отношений других типов на множестве бутербродов, а ещё лучше — предложить сделать это студентам.

Заметим, что «бутербродную модель» можно одновременно использовать для составления разных по трудности задач по элементарной комбинаторике — раздела, который традиционно предоставляет студентам значительные трудности (впрочем, здесь источник трудностей не столько в абстрактности материала, сколько в недостаточной развитости такого тонкого ингредиента мышления, как здравый смысл). Вот несколько примеров таких задач:

1. Сколько неэквивалентных (в одном из смыслов а)–з)) бутербродов толщиной не более n слоев можно сделать из батона, колбасы и сыра?

2. Сколько среди бутербродов толщиной не более n слоев, состоящих только из батона, колбасы и сыра, существует таких, которые эквивалентны бутерброду БКСС?

3. В корзине лежат все бутерброды, содержащие не более n слоев, эквивалентные бутерброду БКСС. Какова вероятность того, что наугад взятый бутерброд будет содержать масло? масло, намазанное на колбасу?

[3] Бинарное отношение R на множестве M называется полным, или связанным, если для каждых x и y из выполнено хотя бы одно из соотношений xRy или yRx.

[4] Если отношение порядка полно, то такой порядок называется линейным, в противном случае порядок называется частичным.

4. Сколько существует бутербродов толщиной не более n слоёв, сделанных из батона, масла, колбасы и сыра, подчинённых (в одном из смыслов i) – vii)) бутерброду БМКСИ?

5. Сколько бутербродов из задачи 4 содержат масло? икру, намазанную на масло?

Введём теперь алгебраические операции на множестве B всех бутербродов. Первым делом заметим, что бутерброды можно складывать «в прямом смысле», т. е. накладывая один на другой: РМК + БИ = РМКБИ. Такое сложение, которое называется конкатенацией, ассоциативно, поэтому множество B становится полугруппой. Можно добавить к B «бутерброд из ничего» и объявить его нейтральным элементом — тогда B станет моноидом.

Очевидно, введённое сложение не коммутативно. Однако можно провести факторизацию B по отношению эквивалентности з), т. е. принять «аксиому дяди Фёдора»: два бутерброда, отличающиеся лишь порядком слоёв, одинаковые. Перенося сложение бутербродов с B на полученное фактор-множество $B/$з, получим абелев моноид. Заметим, что бутерброд можно складывать сам с собой сколько угодно раз, так что этот моноид содержит подмоноид, изоморфный $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Далее, можно добавить определяющие соотношения, иллюстрируя их бытовым смыслом. Например, ИИИ = ИИ можно интерпретировать так: если попросить буфетчицу сделать тройной и более высокой кратности слой икры, то она всё равно положит двойной, думая, что покупатель не заметит разницы. Задание полугрупп образующими из видов еды и определяющими соотношениями бытового характера может быть интересной темой для развития.

Наконец, рассмотрим на B унарные операции. Например, $_Z$ — добавление в бутерброд сверху слоя из ингредиента Z, D_Z — удвоение в бутерброде каждого слоя из ингредиента Z, S_Z — удаление из бутерброда ингредиента Z полностью, $P_{X,Y,Z}$ — прокладка слоя из ингредиента Z между соседними слоями из ингредиентов X и Y при наличии в бутерброде таких слоёв. Некоторые из этих операций коммутируют, а некоторые — нет. Уже из этих простых операций и введённой выше операции сложения можно строить разного рода алгебраические структуры в множестве отображений из B в B.

2. Носки

«Группа надевания носка» — это группа, элементами которой являются следующие четыре манипуляции с носком: «О» — оставьте носок в покое; «Д» — переоденьте носок на другую ногу; «В» — выверните носок и наденьте его на ту же ногу; «$\text{В}_\text{Д}$» — выверните носок и наденьте его на другую ногу.

Операцией «$\circ$» в группе объявляется композиция указанных манипуляций. Таблицу Кэли (рис. 1) для этой операции составить нетрудно, но ещё лучше делать это с помощью вспомогательного рисунка (рис. 2). Дело в том, что этот рисунок (как и в целом вся история с переодеванием носка) неизменно вызывает оживление в аудитории. Тем самым создаётся «опорный сигнал» (в смысле В. Ф. Шаталова, см. [1]), который, как показывает практика, оказывается очень устойчивым.

$\circ$	О	Д	В	$\text{В}_{\text{Д}}$
О	О	Д	В	$\text{В}_{\text{Д}}$
Д	Д	О	$\text{В}_{\text{Д}}$	В
В	В	$\text{В}_{\text{Д}}$	О	Д
$\text{В}_{\text{Д}}$	$\text{В}_{\text{Д}}$	В	Д	О

Рис. 1

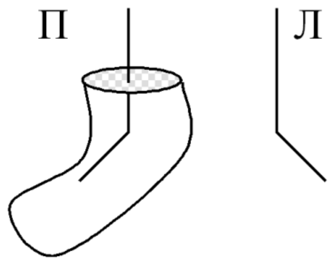

Рис. 2

Таким образом, мы без особых усилий получили модель для четверной группы Клейна. После этого уместно рассмотреть другой пример: группу симметрий прямоугольника. Обозначив элементы этой группы символами «О» — оставить прямоугольник в покое, $\mathrm{R_X}$ и $\mathrm{R_Y}$ — переворачивания на 180° относительно горизонтальной и вертикальной осей прямоугольника соответственно, $\mathrm{R_O}$ — отражение относительно центра прямоугольника, а операцию композиции этих отражений — символом «$*$», составим таблицу Кэли для этой группы (рис. 3). Удобной демонстрационной моделью для объяснения заполнения этой таблицы служила в своё время стандартная перфокарта, поскольку срезанный уголок позволял следить за движением прямоугольника. Теперь изготовить прямоугольник со срезанным уголком придётся самостоятельно.

Наконец, третий полезный пример — группа действий солдата по строевым командам С = «смирно», П = «направо», Л = «налево» и К = «кругом». Таблица Кэли для композиции «☆» действий по этим командам показана на рис. 4. Ясно, что для наглядности следует покомандовать выбранным студентом.

$*$	О	$\mathrm{R_X}$	$\mathrm{R_Y}$	$\mathrm{R_O}$
О	О	$\mathrm{R_X}$	$\mathrm{R_Y}$	$\mathrm{R_O}$
$\mathrm{R_X}$	$\mathrm{R_X}$	О	$\mathrm{R_O}$	$\mathrm{R_Y}$
$\mathrm{R_Y}$	$\mathrm{R_Y}$	$\mathrm{R_O}$	О	$\mathrm{R_X}$
$\text{В}_{\text{Д}}$	$\mathrm{R_O}$	$\mathrm{R_Y}$	$\mathrm{R_X}$	О

Рис. 3

☆	С	П	Л	К
С	С	П	Л	К
П	П	К	С	Л
Л	Л	С	К	П
К	К	Л	П	С

Рис. 4

Итак, помня известный анекдот: «Студентам нужно всё повторять три раза, Ганс. Запомни, три раза. Три раза», мы рассмотрели три однотипных примера. Но здесь дело не только и не столько в повторении, сколько в том, что сравнивая таблицы легко объяснить, что группа надевания носка изоморфна группе симметрий прямоугольника, но не изоморфна группе действий солдата (циклической группе четвёртого порядка), так что появляется надежда, что уменьшится вероятность повторения ситуации, описанной в эпиграфе (кстати, вполне реальной ситуации, которая произошла много лет назад на экзамене по высшей алгебре у профессора ВМК ННГУ В. Н. Шевченко. В те далёкие времена многие студенты могли оценить юмористичность ответа).

Далее можно рассказать, что с точностью до изоморфизма других групп четвёртого порядка, кроме циклической и четверной группы Клейна, не бывает, изучить структуру подгрупп этих групп и даже предложить студентам задачу исследовательского характера: сколько существует попарно не изоморфных групп порядка n (скажем, для $n \leq 6$)?

3. Обратная функция

В заключение напомним о наглядном приёме для выяснения, имеет ли данная функция $f\colon R \to R$ обратную, и для построения графика обратной функции в случае положительного ответа на этот вопрос. Конечно, это надо объяснять ещё в школе, но практика преподавания в вузе показывает, что это не делается, и понятие обратного отображениях усваивается студентами с трудом.

Пусть на листке бумаги построен график функции $f\colon R \to R$ в системе координат XOY. Посмотрим на этот листок с обратной стороны «на просвет», расположив листок напротив источника света так, чтобы ось Y шла горизонтально вправо, а ось O — вертикально вверх. Тогда легко увидеть, является ли просвечивающая кривая графиком функции в этих просвечивающих осях (просвечивающая ось OY играет теперь роль оси абсцисс), и если является, то она и есть график обратной функции. При желании днём можно даже приложить лист к оконному стеклу и обрисовать график на обратной (чистой) стороне листа. Кстати, такое рассмотрение позволяет наглядно объяснить формулу для производной обратной функции, опираясь только на геометрический смысл производной: произведение производных прямой и обратной функции равно единице, потому что произведение тангенсов острых углов одного прямоугольного треугольника равно единице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаталов В. Ф. Эксперимент продолжается. — М.: Педагогика, 1989. 206 с.

Поступила 18.02.2014

SANDWICHES AND SOCKS IN THE TEACHING OF THE HIGHER ALGEBRA

G. M. Polotovskiy, I. D. Remizov

Some examples of application of the models constructed of «household» objects, useful to an explanation to students of some abstract structures of modern mathematics are given.

Keywords: binary relation, group, abstract concept, basic signal.