

В ПЕРЕРЫВЕ МЕЖДУ ЛЕКЦИЯМИ

УДК 514.11 + 514.122.3

О ДВУХ СЕМЕЙСТВАХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ,
ПОРОЖДАЮЩИХ ТРИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ¹

Ю. В. Павлюченко

Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6;
e-mail: pav Yuri@yandex.ru

Треугольник, в котором медиана, высота и биссектриса, проведенные из разных вершин, пересекаются в одной точке P , называется p -треугольником. Рассматриваются два семейства таких треугольников. Вершины треугольников первого семейства расположены на конхоиде Никомеда, а множество точек P , обладающих указанным свойством — на циссоиде Диоклеса. Точки P второго семейства p -треугольников расположены на петле строфоиды. Приводимые построения могут быть использованы в математическом кружке или на олимпиаде.

Ключевые слова: p -треугольник, конхоида, циссоида, строфоида.

В богатейшем наследии математиков прошлого наряду с крупными, фигурально выражаясь, «драгоценными камнями» — такими, как, скажем, дифференциальное и интегральное исчисление — сохранились и россыпи ярких маленьких «жемчужин». Мы имеем в виду, в частности, *замечательные кривые*. В свое время одни из них строились, чтобы подтвердить или опровергнуть те или иные нарождавшиеся новые фундаментальные принципы; другие же, по-видимому, появились на свет Божий как «небрежный плод забав и легких вдохновений» в минуты отдыха от более важных дел. Как бы то ни было, несомненно, в их открытии не последнюю роль играла «радость созерцания формы», которая, по словам Феликса Клейна, характеризует истинного геометра. На памяти автора время, когда хрестоматийный набор этих кривых — *овал Кассини, лемниската Бернулли, конхоида Никомеда, циссоида Диоклеса, строфоида и лист Декарта* — был одним из элементов «начального образования» профессиональных математиков. С тех пор как зародилось искусство этой своеобразной геометрической икебаны, число её составляющих заметно возросло: в атласе кривых Е. В. Шикина и М. М. Франк-Каменецкого [1], в справочниках [2], [3] представлены десятки замечательных «экспонатов». В XIX – XX вв. многочисленными авторами рассматривались разные подходы к получению замечательных кривых *порознь*. В рамках этой тематики в данной статье предлагается конструкция, в которой три из них появляются *одновременно*. Приводимые здесь построения

¹ Эта статья перекидывает ещё один мостик от объекта изучения «школьной» геометрии — треугольника — к материалу, относящемуся к высшей математике — классическим алгебраическим кривым, идущим из античности. Последние уже давно «не влезают» в стандартные курсы, но с ними полезно ознакомиться хотя бы вне лекций — например, на занятиях математического кружка. Сказанное объясняет помещение статьи в данную рубрику (прим. ред.).

могут быть использованы на практических занятиях по аналитической геометрии и математическому анализу, а также в математическом кружке или на олимпиаде. Это могло бы доставить учащимся радость созерцания формы, не предусмотренную нынешними программами, подчас бездумно стирающими значительные фрагменты истории математики.

В школьной математике самой популярной фигурой, несомненно, является треугольник, «исхоженный вдоль и поперёк» на протяжении всех лет занятий геометрией. Внимание уделяется как исследованию одного отдельно взятого треугольника, так и классификации треугольников по тем или иным понятным каждому учащемуся признакам. Так, выделяются классы равносторонних, равнобедренных, прямоугольных треугольников. Что касается треугольника как такового, то, в частности, доказывается, что три высоты, три биссектрисы, три медианы пересекаются, соответственно, в одной точке. Однажды в учебнике для 7 класса, написанном одним из моих кафедральных коллег, я встретил такую «нестандартную», по терминологии автора, задачу: *в треугольнике проведено по одной медиане, биссектрисе и высоте. Сколько при этом появится новых треугольников? Рассмотрите все возможные варианты.* Следуя этой рекомендации, в беседе с автором я слегка удивил его простодушным вопросом: *возможно ли, если треугольник не равносторонний, что три указанные прямые, проведенные из разных вершин, пересекаются в одной точке?* Удовлетвори он мое мимолетное любопытство, и не было бы ни этих заметок, ни приведших к ним изысканий. Поскольку он не ответил на мой вопрос ни сразу, ни впоследствии, пришлось взяться за дело самому, и вот что из этого получилось.

I. Основное определение

Определение. *Треугольник, в котором биссектриса, медиана и высота, проведенные из разных вершин, пересекаются в одной точке, называется p -треугольником (от латинского *perfectum* — совершенное).*

Правильный треугольник заведомо является p -треугольником. Покажем, как можно построить неправильные p -треугольники. Направив основание и боковую сторону искомого треугольника по сторонам любого острого угла O , отметим произвольно на боковой стороне точку A — вторую вершину треугольника. Через середину отрезка OA и точку P пересечения высоты AA_1 и биссектрисы угла O проведем прямую. Она пересечет основание в некоторой точке B , которая, по построению, оказывается третьей вершиной искомого p -треугольника OAB (рис. 1).

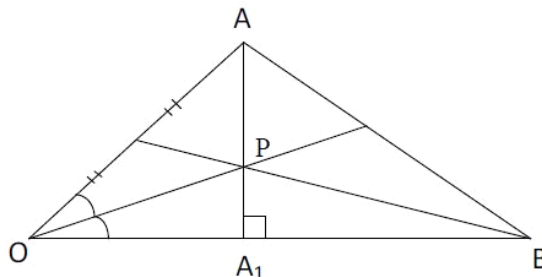


Рис. 1

Для дальнейшего сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема. В произвольном треугольнике OAB проведены биссектриса OO_1 , медиана BB_1 , через их общую точку — отрезок AA_1 и параллельно ему — прямая через вершину B . Пусть эта прямая встречает продолжение стороны OA в точке C (рис. 2). Тогда $|AC| = |OB|$.

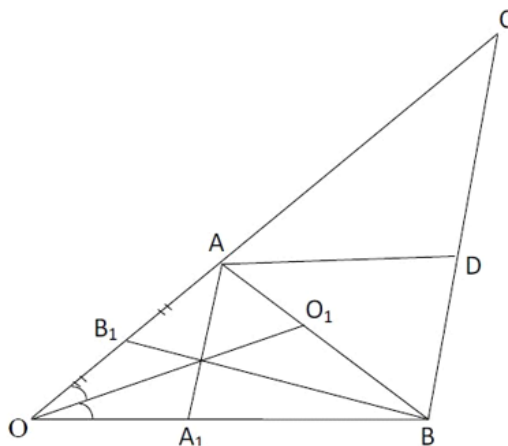


Рис. 2

Доказательство. Теорема Джованни Чевы (1678) о трех отрезках, проведенных из разных вершин треугольника и пересекающихся в одной точке, устанавливает следующее соотношение:

$$\frac{|OA_1|}{|A_1B|} \cdot \frac{|BO_1|}{|O_1A|} \cdot \frac{|AB_1|}{|B_1O|} = 1.$$

Так как по условию $|AB_1| = |B_1O|$, а по свойству биссектрисы

$$\frac{|BO_1|}{|O_1A|} = \frac{|OB|}{|OA|},$$

то получаем:

$$\frac{|A_1B|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OA|}.$$

Проведем AD параллельно OB . Из подобия треугольников OAA_1 и ACD имеем

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|OA_1|}{|OA|}.$$

Поскольку $|AD| = |A_1B|$, то, сравнивая последние два соотношения, получаем требуемое равенство: $|AC| = |OB|$.

Доказанная теорема даёт ещё один способ построения p -треугольников. В произвольном остром угле O на этот раз фиксируем основание OB и восставим к нему перпендикуляр в точке B . От точки C пересечения этого перпендикуляра со второй стороной угла откладываем отрезок, равный основанию. Полученная точка A является третьей вершиной искомого p -треугольника (рис. 3).

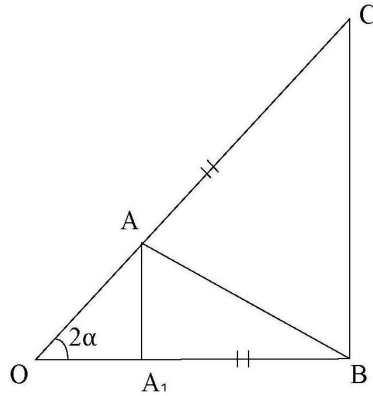


Рис. 3

Полагая $|OB| = a$, $\angle BOA = 2\alpha$, получаем необходимое и достаточное аналитическое условие p -треугольности:

$$|A_1B| = a \cos 2\alpha \text{ и, соответственно, } |OA_1| = a(1 - \cos 2\alpha).$$

II. Первое семейство p -треугольников; конхоида и циссоида

Рассмотрим однопараметрическое семейство $\Delta_1(\varphi)$, $0 < \varphi < \pi/4$, всех p -треугольников $OA(\varphi)B$ с общим основанием OB , $|OB| = 1$, и углом при основании, равном 2φ : $\angle A(\varphi)OB = 2\varphi$.

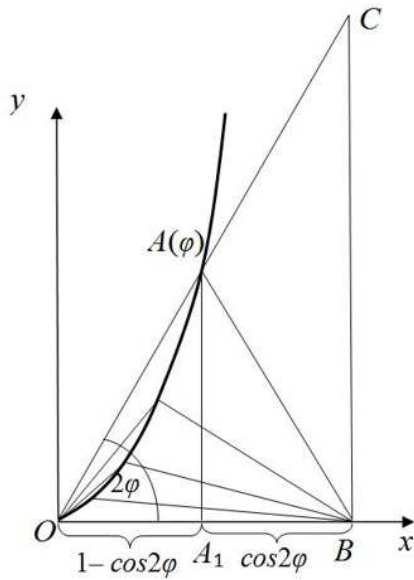


Рис. 4

Назовём A -линией кривую, образованную вершинами $A(\varphi)$ этих треугольников. Через их общую вершину B перпендикулярно основанию OB проведем прямую и продолжим сторону $A(\varphi)O$ до пересечения с этой прямой в точке C . Постоянство длины отрезка AC независимо от φ , вытекающее из теоремы п. I, служит определяющим свойством конхоиды Никомеда. Таким образом, A -линия есть верхняя дуга её левой ветви (рис. 4).

Если принять точку O за полюс, а луч в направлении OB за полярную ось, то эта конхоида задается следующим полярным уравнением:

$$\rho = \frac{1 - \cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}.$$

В индуцированной декартовой системе координат уравнение конхоиды имеет вид $x^2 + y^2 = \frac{x^2}{(1 - x)^2}$.

Назовем P -линией кривую, образованную точками $P(\varphi)$ пересечения высот, медиан и биссектрис треугольников семейства $\Delta_1(\varphi)$. Сделаем дополнительное построение. Проведем окружность единичного радиуса с центром в точке B и через правый конец E её горизонтального диаметра проведем к ней касательную. Продолжим отрезок $P(\varphi)O$ до пересечения с окружностью в точке F и далее с касательной в точке G . Несложный подсчёт показывает, что $|FG| = (1 - \cos 2\varphi) / \cos \varphi = |P(\varphi)O|$. Равенство длин этих отрезков служит определяющим свойством *циссоиды Диоклеса*. Таким образом, P -линия есть конечный фрагмент циссоиды (рис. 5). (Заметим, что бесконечную ветвь присовокупили лишь в XVIII веке!)

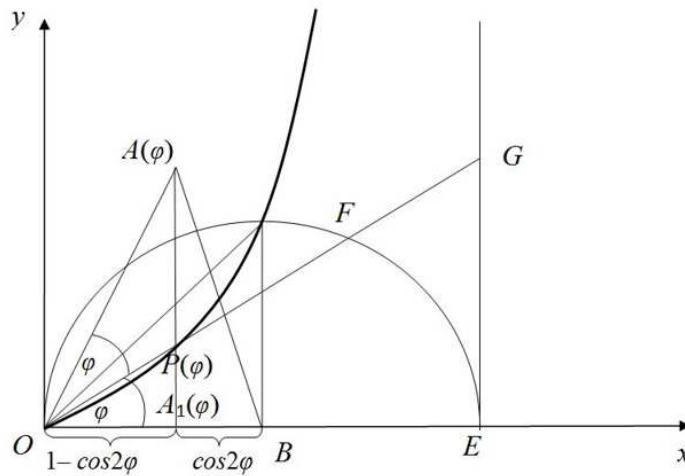


Рис. 5

В полярных координатах циссоида задается следующим уравнением:

$$\rho = \frac{1 - \cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

Переходя к декартовой системе, получаем уравнение

$$y^2 = \frac{x^3}{2 - x}.$$

Приведем другие свойства семейства $\Delta_1(\varphi)$ p -треугольников $OA(\varphi)B$.

1. Пусть точки A'_1 и A''_1 отрезка OB расположены симметрично относительно его середины. Покажем, что в этом случае длины боковых сторон OA' и OA'' соответствующих p -треугольников $OA'B$ и $OA''B$ (т. е. A'_1 и A''_1 — проекции на ось Ox вершин A' и A'' соответственно) взаимно обратны. Имеем:

$$|OA'| = \frac{1 - \cos 2\varphi'}{\cos 2\varphi'}, \quad |OA''| = \frac{1 - \cos 2\varphi''}{\cos 2\varphi''}.$$

Поскольку $|OA'_1| + |OA''_1| = 1$, то соотношение $\cos 2\varphi' + \cos 2\varphi'' = 1$ приводит к нужному результату: $|OA'| \cdot |OA''| = 1$. Это свойство подчеркивает исключительную роль равнобедренного треугольника в семействе $\Delta_1(\varphi)$.

В декартовых координатах эта строфоида задается уравнением

$$y^2 = x^2 \cdot \frac{1-x}{1+x}.$$

Применим его для определения наивысшей точки *P-линии*. Дифференцированием находим точку с нулевой производной. В полярных координатах ей отвечает значение φ , определяемое уравнением

$$\cos^2 2\varphi + \cos 2\varphi - 1 = 0.$$

При этом значении угла φ p -треугольник OA^0B^0 прямоугольный; проекция $A_1^0B^0$ катета A^0B^0 на гипотенузу равна единице; точка A_1^0 делит и гипотенузу OB^0 , и отрезок OB в пропорции *золотого сечения*. Эти четыре свойства эквивалентны.

Ещё одно свойство подчеркивает двойственность семейств $\Delta_1(\varphi)$ и $\Delta_2(\varphi)$. Рассмотрим для семейства $\Delta_2(\varphi)$, как было сделано и для семейства $\Delta_1(\varphi)$ выше, точки A'_1 и A''_1 отрезка OB , расположенные симметрично относительно его середины. Покажем, что и в этом случае длины оснований OB' и OB'' соответствующих p -треугольников $OA'B'$ и $OA''B''$ взаимно обратны. После необходимых вычислений получаем $|B(\varphi)O| = \frac{\cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$, поэтому

$$|OB'| = \frac{\cos 2\varphi'}{1 - \cos 2\varphi'}, \quad |OB''| = \frac{\cos 2\varphi''}{1 - \cos 2\varphi''}.$$

Поскольку $|OA'_1| + |OA''_1| = 1$, то соотношение $\cos 2\varphi' + \cos 2\varphi'' = 1$ приводит к нужному результату: $|OB'| \cdot |OB''| = 1$. Этим свойством равносторонний треугольник разбивает семейство $\Delta_2(\varphi)$ на два множества, между элементами которых устанавливается взаимно-однозначное соответствие так, что вершины B' и B'' соответствующих друг другу p -треугольников образуют инверсию относительно единичной окружности.

Обратим внимание, что в обоих семействах $\Delta_1(\varphi)$ и $\Delta_2(\varphi)$ сочетаются *симметрия* и *золотое сечение* — яркие признаки гармонии и совершенства, и не только в геометрии.

Конхоида Никомеда и циссоида Диоклеса были придуманы в глубокой древности (III–II вв. до н. э.). Они понадобились их создателям для решения делосской задачи удвоения куба (с помощью конхоиды Никомеда решается и задача о трисекции угла). Строфоида была изобретена Жилем Робервалем в 1645 году.

Трудно не удивиться (в который раз!) тому, как разные предпосылки приводят к одним и тем же геометрическим воплощениям. Смысл одного из высказываний Давида Гильберта сводится к тому, что жизненная сила математики заключается в её внутреннем единстве. Представляется, что не в последнюю очередь оно выражается в непрестанно обновляемой гармонии новых идей и неуязвимых классических геометрических образов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шикин Е. В., Франк-Каменецкий М. М. Кривые на плоскости и в пространстве. — М.: ФАЗИС, 1997. 334 с.
2. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (Справочное руководство). — М.: ГИФМЛ, 1960. 296 с.
3. Смогоржевский А. С., Столова Е. С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. — М.: ГИФМЛ, 1961. 263 с.

Поступила 28.04.2013

ABOUT TWO FAMILIES OF THE TRIANGLES GENERATING THREE REMARKABLE CURVES

Yu. V. Pavlyuchenko

A triangle is named p -triangle if median, altitude and bisector of different vertices meet in one point (P -point). Two families of such triangles are examined. The main result is the vertices of all p -triangles of one family are situated on Nicomedian conchoid meanwhile all P -points of these p -triangles are situated on cissoid of Diocles. In the other case the P -points are situated on strofoid. These geometric constructions may be used in various studies, including mathematical contests.

Keywords: p -triangles, conchoid, cissoid, strofoid.