ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 519.176 + 929

К ИСТОРИИ ДВУХ ЗНАМЕНИТЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ В ТЕОРИИ ГРАФОВ

В. П. Одинец

Коми государственный педагогический институт
Россия, 167982, г. Сыктывкар, Коммунистическая ул., 25;
e-mail: W.P.Odyniec@mail.ru

Представлена история двух жадных алгоритмов теории графов (алгоритмов Краскала и Прима), имеющих важные применения в экономике и компьютерных науках. Приведены также краткие биографии главных лиц, связанных с этой историей.

Ключевые слова: минимальное остовное дерево, оценка сложности, алгоритм Краскала, алгоритм Борувки, алгоритм Прима – Ярника.

В процессе преподавания различных математических дисциплин мне нередко[1] задавали вопрос: «Какую пользу принесёт изучение вашего предмета»? Так вот, есть одна дисциплина, где ответ на этот вопрос можно легко проиллюстрировать материальной пользой, измеряемой десятками миллиардов рублей. Речь идет о строительстве всевозможных сетей: телефонных, электрических, оптоволоконных, канализационных, сетей дорог и т. д.

Математическая модель этих сетей задается в рамках теории графов[2]. При этом слушателям достаточно пояснить буквально несколько интуитивно наглядных определений[3]. Дискретную математику сейчас трудно представить без оптимизационных алгоритмов Краскала и Прима на графах. Но так стало только с началом 60-х гг. XX века. Любопытно, что история этих алгоритмов началась до появления первого учебника по теории графов, а именно, книги Д. Кёнига «Теория конечных и бесконечных графов», изданной в Лейпциге в 1936 году, в которой не было каких-либо оптимизационных алгоритмов.

Итак, конечным неориентированным графом G будем называть пару (X, U), где X — конечный набор точек на плоскости или в трёхмерном пространстве, а U — конечный набор линий конечной длины, соединяющих какие-то (возможно, все) пары точек из X. Графы, в которых есть линии, имеющие концом одну точку (так называемые *петли*), мы рассматривать не будем. Обычно точки из X называют *вершинами* (или *узлами*) графа, а линии — *ветками* (или *ребрами*) графа. При этом две вершины, соединённые веткой, называют инцидентными этой ветке, а ветку — инцидентной этим вершинам.

Если в графе $G = (X, U)$ любые две различные вершины из X соединяет не более чем одна ветка, то такой граф называется *графом Бержа*.

[1] В США это было обязательно. В России это также становится правилом в последнее время.

[2] Весьма часто значительные разделы теории графов включаются либо в дискретную математику, либо в информатику.

[3] Точные определения см., например, в [1], или [2], или [3].

Пусть $G = (X, U)$ — граф. Пару $G_1 = (X_1, U_1)$, где $X_1 \subseteq X$, $U_1 \subseteq U$, саму являющуюся графом, называют *подграфом* в G. Граф G называют *связным*, если из любой его вершины можно по его веткам попасть в любую другую его вершину. Если в подграфе графа Бержа число вершин равно n, т. е. $X_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$, а число веток на единицу меньше, т. е. $U_1 = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, то такой подграф называется *деревом*. Можно доказать, что дерево — всегда связный подграф. Более того, он не содержит ни одного простого цикла, т. е. такого связного подграфа с четным числом веток, каждая вершина которого инцидентна ровно двум веткам. Дерево $G_1 = (X_1, U_1)$ в графе $G = (X, U)$, у которого $X_1 = X$, назовем *остовным деревом*.

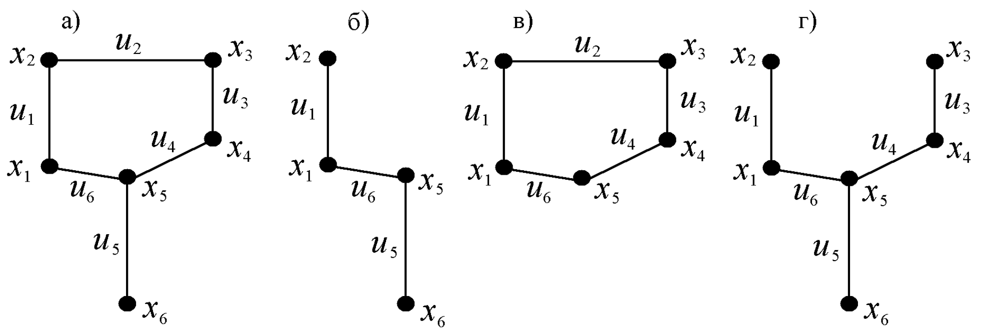


Рис. 1. Граф и одно из его остовных деревьев:
а) граф $G = (X, U)$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$;
б) дерево; в) цикл; г) остовное дерево. б), в), г) — подграфы графа G

А теперь перенесёмся в 1925 год. В новообразованной (в 1918 г.) стране Чехословакии требовалось построить электрическую сеть, связывающую 40 населённых пунктов, с наименьшими затратами на строительство (и эксплуатацию[4]). Алгоритм решения[5] дал Отакар Борувка[6] (1899–1995) в статье [4]

[4] Затраты на эксплуатацию, включая устранение повреждений, иногда могут превышать затраты на строительство. Думается, решение В. В. Путина о переносе строительства нефтепровода подальше от Байкала обусловлено не столько любовью к природе, сколько трезвым расчетом, что прорыв нефтепровода вблизи Байкала и его очищение от загрязнений могут во много раз превысить затраты на строительство.

[5] Алгоритм решения был показан в [4] на четырех картинках. К этому алгоритму мы вернёмся после рассмотрения алгоритма Прима – Ярника.

[6] О. Борувка родился в маленьком городке Ухерске Остров в Моравии, в тогдашней Австро-Венгрии. Учился до 1916 г. в гимназии, а затем — в военной школе около Вены. После окончания 1-й Мировой войны вернулся в гимназию и сдал выпускные экзамены. С 1918 по 1922 г. учился в Техническом университете в Брно. Одновременно (с 1920 г.) становится ассистентом в открытом там же в 1920 г. государственном университете им. Т. Масарика. В 1923 г. Борувка защищает диссертацию под руководством одного из творцов топологии, на тот момент ещё экстраординарного профессора, Эдуарда Чеха (Eduard Čech, 1893–1960). В 1926 г. Борувка публикует две работы [3, 4], решающие некоторую проблему оптимизации. К этой тематике он больше не возвращается. Поездка в 1926–27 гг. в Париж, где он сотрудничает с Эли Картаном (Élie Joseph Cartan, 1869–1951), привела к смещению интересов Борувки в сторону дифференциальной геометрии и теории групп.

1926 года, а доказательство справедливости этого алгоритма приведено в работе [5] того же года. При этом Борувка «забывает» о графе $G = (X, U)$, соответствующем электрической сети, и работает с некоторой $n \times n$-матрицей (затрат) F_X, где n — число вершин графа G. Именно, для каждых двух вершин x_p, $x_q \subseteq X$ он вводит число r_{pq} — стоимость затрат на строительство линии, их соединяющей. «Стоимостью» (в современной терминологии *весом*) подграфа G_1 Борувка называет сумму стоимостей (*весов*) его веток. При этом предполагается

Отакар Борувка

(1) $r_{\alpha\alpha} = 0$ для любого $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$;

(2) $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$ для любых $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}$.

Таким образом, матрица F_X симметричная с числом положительных элементов, не превосходящим $n(n-1)$, а следовательно, число ребер в графе G не превосходит $n(n-1)/2$.

Кроме того, Борувка предположил, что

(3) Любые два разных не симметричных относительно главной диагонали элемента матрицы F_X, не лежащие на главной диагонали, не равны между собой.

Поскольку электрическая сеть, а значит, и граф, ей отвечающий, должны быть связными, то Борувка вводит критерий связности на языке последовательности стоимостей затрат:

(4) для любых $p_1, p_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ существует натуральное q и последовательность $c_1 = p_1, c_2, \ldots, c_{q-1}, c_q = p_2$ которым отвечает последовательность

(+) $r_{c_1c_2}, r_{c_2c_3}, \ldots, r_{c_{q-1}\,c_q}$,

в которой $r_{c_kc_{k+1}} > 0$ для всех $k \subseteq \{1, \ldots, q-1\}$.

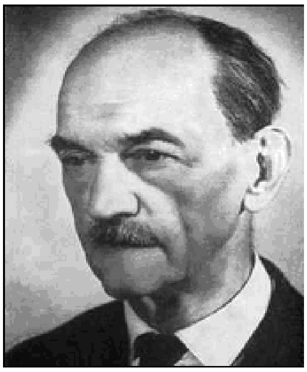
И наоборот, если граф Бержа G таков, что для него верно (4), то этот граф связный.

В 1926 г. Отакар Борувка доказал следующее утверждение.

Пусть дана $n \times n$-матрица F с неотрицательными элементами, удовлетворяющая условиям (1)–(4). *Тогда существует подмножество G_0, состоящее из* $(n-1)$ *элементов матрицы F, лежащих ниже главной диагонали, удовлетворяющее условию* (4), *такое, что для любого другого подмножества G_1 из* $(n-1)$ *элементов матрицы F, лежащих ниже её главной диагонали и удовлетворяющих условию* (4), *сумма всех элементов из G_0 будет строго меньше суммы всех элементов из G_1.*

Возвратившись в 1927 г. в Брно он через год защищает вторую диссертацию (хабилитацию) и, получив стипендию фонда Рокфеллера, проводит 1929–31 гг. во Франции и Германии. Итогом изучения теории групп, а особенно интенсивно группоидов, была его книжка на чешском языке «Введение в теорию групп», первое издание которой вышло только в 1944 г. и имело 80 страниц, а издание 1960 г. — уже 200 страниц. Эта книга была позже переведена на немецкий (1962) и английский (1976) языки. Что касается интереса к дифференциальной геометрии, то Борувка уже с 1934 г. стал заниматься дифференциальными преобразованиями 2-го порядка. Английское издание чешской версии его книги 1953 г. вышло в 1971 г. под названием «Linear differential transformations of the second order». В 1953 г. Отакар Борувка был избран членом-корреспондентом, в 1965 г. — действительным членом Чехословацкой Академии Наук [6].

Через 4 года, в 1930 г., в том же журнале и под тем же названием появилась работа [7] Войтека Ярника[7] (1897–1970), в которой предлагался другой алгоритм (названный после 1957 г. алгоритмом Прима), доказывающий утверждение Борувки. Именно, берем произвольную вершину исходного графа. Пусть это будет вершина x_{i_1}. Находим вершину, ближайшую к ней, т. е. вторую вершину ребра с минимальным весом, инцидентного вершине x_{i_1}. Пусть это будет x_{i_2}. Итак, выделяем ребро $[x_{i_1}, x_{i_2}]$, которое становится начальным «минимальным подграфом». Далее ищем вершину, ближайшую к ребру $[x_{i_1}, x_{i_2}]$. Пусть это будет x_{i_3}, и пусть эта вершина ближайшая к x_{i_1}. Тогда в «минимальный подграф» добавляем ребро $[x_{i_3}, x_{i_1}]$. И так далее, беря каждый раз новую вершину, ближайшую к уже построенному подграфу. В итоге получим остовное дерево, и можно доказать, что это дерево минимальное среди всех остовных деревьев. В силу условия (3) результат алгоритма не зависит от выбора начальной вершины. Разница с алгоритмом Прима лишь в том, что в алгоритме Прима мы выбираем вначале минимальное ребро.



Войтек Ярник

Вернемся теперь к алгоритму Борувки. Заметим, что Борувка рассматривал *полный граф*, соответствовавший 40 населенным пунктам, т. е. любые две вершины графа соединялись веткой. На практике некоторые пункты нельзя было непосредственно соединить линией электропередачи. В этом случае соответствующая ветка считается условной: ей сопоставляется стоимость, равная $+\infty$. Алгоритм Борувки прекрасно работает и в этом случае. Формально алгоритм в [5] состоял из 26 шагов. Дадим его интерпретацию на языке теории графов. Если следовать алгоритму буквально, то на первом шаге выбирались «висячие вершины», т. е. вершины, инцидентные одному ребру, и вторые вершины этих ребер. Если висячих вершин не было, то, выбрав произвольную вершину, брали инцидентное ей ребро с минимальным весом. У второй вершины этого ребра также искали инцидентное ей ребро с минимальным весом. Теперь наш подграф имеет три вершины. Вне этого подграфа искали ребро с минимальным весом. Если только одна из вершин этого ребра принадлежала нашему подграфу, то «добавляли» это ребро к нашему подграфу.

[7] В. Ярник родился в Праге, учился в Каролинском университете, а по окончании учебы стал работать там же на должности ассистента. В 1923 г. он на один год едет в Гёттинген для совместной работы с Эдмундом Ландау (Edmund Landau, 1877–1938). Возвратившись на свою должность, он в 1927/28 учебном году вновь едет в Гёттингенский университет для работы с Э. Ландау. Вновь возвратившись в Прагу, Ярник становится руководителем кафедры математики Каролинского университета. На этой должности он проработал до выхода на пенсию в 1968 г. Две трети из 90 научных работ Ярника посвящены теории чисел, главным образом, гауссовской «проблеме окружности» и диофантовым уравнениям. В 1933–36 гг. Ярник интенсивно занимался математическим анализом, в основном производной Дини (Ulisse Dini, 1845–1918) и аппроксимативной производной непрерывных функций [8]. Наконец, в 1930 г. вышла единственная работа Ярника, относящаяся к оптимизационным алгоритмам, в которой фактически построен излагаемый ниже алгоритм.

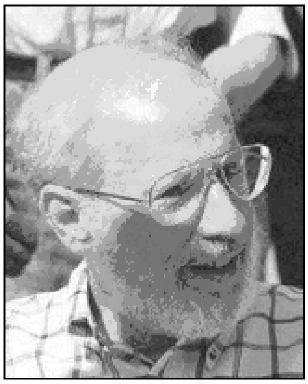
Если же обе вершины этого ребра принадлежали нашему подграфу, то это ребро отбрасывали. Если обе вершины этого нового ребра были отличны от выбранных нами ранее, то около этого ребра строили новый подграф. Далее вновь искали ребро с минимальным весом. Если это ребро соединяло вновь построенные подграфы, то его оставляли. В итоге получали связный подграф с $(n-1)$ ребром (т. е. остовное дерево) с минимальным весом.

Значительно позже было доказано [9], что алгоритм Борувки применим не только к графам Бержа с попарно разными весами, но и к другим конечным связным неориентированным графам. При этом время решения задачи для графа с числом вершин n и числом ребер V оценивалось как

(++) $O(n \log V)$.

В 1956 г. Джозеф Краскал[8] (Joseph Bernard Kruskal, Jr., 1928–2010) получил решение задачи, поставленной Борувкой, для случая конечного связного неориентированного графа с числом вершин n с помощью следующего алгоритма [10].

1. Выбираем произвольное ребро e_1 с минимальным весом.
2. Выбираем последовательно ребра $e_2, \ldots, e_{n-1}$ с минимальным весом среди оставшихся, но так, чтобы новое ребро вместе с выбранными ранее не образовывало цикла.



Джозеф Краскал

Выбранные ребра и образуют минимальное остовное дерево. Это дерево в общем случае может быть не единственным.

Для практического применения оказался более удобен алгоритм, предложенный в 1957 г. Робертом Примом[9] (род. в 1921 г.) [11].

[8] Д. Краскал родился в Нью-Йорке в семье преуспевающего оптового торговца Джозефа Краскала Старшего. Учился в университетах Чикаго и Принстона. В 1954 г. защитил докторскую диссертацию под руководством Альберта Таккера (Albert William Tucker, 1905–1995) и Роджера Линдона (Roger Conant Lyndon, 1917–1988). Однако, как неоднократно говорил по этому поводу сам Краскал, диссертация не могла бы быть написана, если бы не две его короткие беседы с Полем Эрдёшем (Paul Erdös, 1913–1996). Краскал известен не только своим оптимизационным алгоритмом (1956), но глубокими работами в статистике, компьютерных науках и в психометрии. Его старший брат Уильям Краскал (William Kruskal, 1919–2005) известен работами по непараметрическим методам исследования гипотез. Другой старший брат Мартин Краскал (Martin David Kruskal, 1925–2006) прославился изучением «сюрреальных» чисел, нашедших применение в вычислительных алгоритмах.

[9] Роберт Прим родился в маленьком городке Свитвотер (Sweetwater) штата Техас. В 1941 г. он получил степень бакалавра по электроинженерии в Принстонском университете. В 1941–44 гг. он инженер в компании General Electric. В 1944–48 гг. работает инженером, а затем математиком в Лаборатории Военно-морского флота США. Весь 1949 г. он работает исследователем в Принстонском университете, и там же в том же году защищает докторскую диссертацию под руководством одного из создателей алгебраической топологии Соломона Лефшеца (Solomon Lefschets, 1884–1972), который родился в Москве [12]. Позже Прим переходит в BellLabs компании AT&T. Там он знакомится с Д. Краскалом. Решение задачи нахождения минимального остовного дерева, найденное Краскалом, было простым, но не удовлетворило Прима, так как при прокладке телефонных сетей «перескакивать» с

Алгоритм Прима начинается с выбора произвольной вершины связного конечного неориентированного графа без петель, ребра которого имеют ненулевой вес. Далее выбирается инцидентное выбранной вершине ребро с минимальным весом. Это ребро является началом построения минимального остовного дерева. Последующие шаги сводятся к присоединению к построенному на предыдущем шаге дерева нового ребра, один из концов которого принадлежит уже построенному дереву, а другой не принадлежит, и при этом новое ребро имеет минимальный вес среди всех ребер, не принадлежащих уже построенному дереву.

Роберт Прим

Алгоритм Прима был переоткрыт [13] в том же 1957 г. двумя компьютерными специалистами: Лоберманом и Вейнбергером. В 1959 г. появилась публикация [14] Эдсгера Дейкстры (1930–2002), фактически в других терминах повторившего результат Р. Прима. (Заметим, что публикация Прима [11] была тогда малодоступна в Европе.)

Обратим внимание, что в промежуток между 1930 и 1956 гг., т. е. работами В. Ярника [7] и Д. Краскала [10], появились две работы, в которых ставилась задача, внешне похожая на задачу Борувки.

Первая работа [15] 1938 г. принадлежит Густаву Шоке (1915–2006). В ней ставилась задача построения фактически минимального остовного дерева с прямолинейными ребрами, вершинами которого были бы заданные населенные пункты на декартовой плоскости. Во второй работе [16] 1951 г. пяти вроцлавских математиков — Казимежа Флорека, Юзефа Лукашевича (Józef Łukaszewicz[10], род. в 1927 г.), Хуго Штейнхауза (1887–1972), Юлиана Перкаля (1913–1965), Стефана Зубжицкого (1927–1968) — ставилась та же задача. При этом речь даже не шла о населенных пунктах, а просто о n точках на декартовой плоскости. Интересно, что при этом были явно сформулированы условия (1) и (2) на расстояния между точками. В обеих работах решения опирались на метрические и топологические свойства искомого дерева.

Алгоритм Борувки был, по-видимому, впервые запрограммирован в 1961 г. в неопубликованной работе [17] Жоржа Соллина, приготовленной для сообщения на семинаре К. Бержа. Версия этого сообщения увидела свет в сборнике [18], изданном в 1965 г. К. Бержем и А. Гуил-Хури. Подробная история задачи нахождения минимального остовного дерева приведена в 1985 г. в работе [19] Р. Л. Грахэма и П. Хелла, а уточнение оценок сложности (++) дано в 2000 г. в работе [20] Бернарда Чазелли.

места на место, что предполагал в общем случае алгоритм Краскала, было неудобно. В 1957 г. Прим предлагает свой алгоритм [11]. Позже, в 1958–61 гг., Прим возглавит исследовательскую работу математиков в BellLab's а затем он станет вице-президентом Национальной Лаборатории Сандия — основного подрядчика по созданию систем безопасности министерства энергетики США.

[10] Фамилия великого польского логика Яна Лукашевича (1878–1956) в латинице пишется иначе: Lukasiewicz.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыков А. А. Основы теории графов. — М.: Наука, 1987. 381 с.
2. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984. 454 с.
3. Одинец В. П., Шлензак В. А. Избранные главы теории графов. — М.– Ижевск: Изд-во регул. и хаотич. динамики, 2009. 504 с.
4. Borůvka O. Příspèvek k řešeniotázky ekonomické stavby elektrovodných sítí // Elektrotechnický obzor. 1926. Roč. 15, čis. 10. P. 153–154 (in Chech).
5. Borůvka O. O jistém problem minimálním // Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti. 1926. № 3. P. 37–58 (in Chech and German).
6. Durnova H. Otakar Boruvka (1899–1995) and the Minimum Spanning Tree // Mathematik in Wandel (1 vyd. Hildesheim). — Berlin: Franzbecker, 1998. P. 264–274.
7. Jarnik V. O jistém problem minimálním // Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti. 1930. № 6. P. 57–63 (in Chech and German).
8. Novak B., Schwarz St. Vojtech Jarnik (22.12.1897–22.9.1970) // Acta Arithmetica. 1972. № 20. P. 107–115.
9. Fredman M. L., Tarjan R. E. Fibonacci heaps and their uses to improve network optimization algorithms // Proc. 25th Symp. on Foundations of Comp. Sci. — IEEE Comp. Sci. Press, 1984. P. 338–346.
10. Kruskal J. B. On the shortest spanning tree of a graph and the traveling salesman problem // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. V. 7. P. 48–50.
11. Prim R. C. Shortest connection networks and some generalizations // Bell Syst. Tech. J. 1957. № 36. P. 1389–1401.
12. Griffits Ph., Spencer D., Whitehead G. Solomon Lefschetz 1884–1972. A Biographical Memoir. — Washington D. C.: National Academy of Science, 1992. P. 268–313.
13. Loberman H., Weinberger A. Formal procedures for connecting terminals with minimum total wire length // Journal of the ACM. 1957. № 4 (40). P. 428–438.
14. Dijkstra E. W. A note on two problems in connection with graphs // Numerische Mathematik. 1959. № 1. P. 269–271.
15. Choquet G. Étude de certainsréseaux de routes // Comptes-rendus de l'Académie des Sciences. 1938. № 206. A. 310–312.
16. Florek K., Łukaszewicz J., Perkal J., Steinhaus H. and Zubrzycki S. Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini // Colloq. Math. 1951. № 2. P. 282–285.
17. Sollin G. Problème de l'arbre minimum (unpublished manuscript prepared for C. Berge's Paris seminar, February 8, 1961).
18. Sollin G. Problèmes de recherché operationelle // Report C. 41, Meeting of Technical Directors, S.E.G. Paris, 1962 (In Chapter III, Le Trace des Canalizations (the design of pipelines). P. 15–23.
19. Graham R. L., Hell P. On the History of the Minimum Spanning Tree Problem // Ann. Hist. Comput. 1985. № 7. P. 43–57.
20. Chazelle B. A minimum Spanning Tree Algorithm with Inverse-Ackermann Type Complexity // Journal of the ACM. 2000. V. 47. № 6. P. 1028–1047.

Поступила 24.05.2013

ON THE HISTORY OF TWO THE GRAPH THEORY FAMOUS OPTIMAL ALGORITHMS

W. P. Odyniec

The history of two the graph theory greedy algorithms (Kruskal's algorithm and the Prim algorithm), which have the important applications in economics and computer science, is presented. The short biography of the main persons, which are connected with this history, is given too.

Keywords: minimum spanning tree, time complexity, Kruskal's algorithm, Boruvka's algorithm, Prim – Jarnik algorithm.