

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 37(091)

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
В НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
Д. А. ГРАВЕ В ПЕТЕРБУРГЕ****И. В. Игнатушина**

*Оренбургский государственный педагогический университет
Россия, 460000, г. Оренбург, пр. Гагарина, 1;
e-mail: streleec@yandex.ru*

Описаны результаты Д. А. Граве по дифференциальной геометрии, полученные им в конце XIX в. Особое внимание уделено его докторской диссертации «Об основных задачах математической теории построения географических карт», в которой был решен целый ряд важных задач. Кроме того, даётся краткая характеристика его деятельности по преподаванию дифференциально-геометрического материала в высших учебных заведениях Петербурга.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, Дмитрий Александрович Граве.

В 2013 г. исполняется 150 лет со дня рождения одного из выдающихся отечественных математиков, почетного члена АН СССР, академика АН УССР, основоположника первой крупной алгебраической школы в России — Дмитрия Александровича Граве (1863–1939). «Алгебраической» стороне деятельности Д. А. Граве посвящена публикуемая в этом номере журнала статья В. А. Тестова [1]. Однако не малый интерес представляют его работы по дифференциальной геометрии, о которых и пойдёт речь ниже.

Дмитрий Александрович принадлежал к младшему поколению Петербургской математической школы XIX в. Его учителями на физико-математическом факультете Петербургского университета были видные ученые-математики того времени: П. Л. Чебышев, А. Н. Коркин, А. А. Марков, К. А. Поссе, И. Л. Пташицкий, Ю. В. Сохоцкий [2]. Д. А. Граве включился в научную деятельность с самого начала своей студенческой жизни. Он много времени проводил в библиотеке, изучая труды классиков, организовал студенческое научное общество, которое издавало свой журнал «Записки физико-математического общества С.-Петербургского университета». В нем Дмитрий Александрович опубликовал результаты своих первых научных изысканий.

Большое влияние на формирование научных интересов Граве оказал профессор А. Н. Коркин. Еженедельно на его квартире собирались университетская молодежь и профессура Петербурга. На этих вечерах любил бывать и Граве. Позже в своих автобиографических записках он писал: «Сидя на диване, Коркин вел интересную беседу, так как был умный и образованный человек. Особенно были интересны его разговоры о математике. Я должен признать, что обе мои диссертации вытекали из этих разговоров, хотя в докторской диссертации большую роль сыграли Чебышев и Марков» [3, с. 223].

По окончании университета в 1885 г. Граве представил выпускную работу (кандидатскую диссертацию), посвященную одному из вопросов дифференциальной геометрии, а именно, наименьшим поверхностям, т. е. поверхностям, в каждой точке которых средняя кривизна равна нулю. Вся работа состояла из трех глав. В первой главе с помощью вариационного исчисления выведены условия, которым должна удовлетворять наименьшая поверхность. Во второй рассмотрены теоремы о кривизне таких поверхностей. В третьей изложено интегрирование дифференциальных уравнений наименьших поверхностей [4].



Д. А. Граве

В 1889 г. Д. А. Граве защитил магистерскую диссертацию [5] по теории интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка и был оставлен при Петербургском университете для приготовления к профессорскому званию. В том же году он был зачислен приват-доцентом университета и, кроме того, получил должность преподавателя математики в Институте инженеров путей сообщения. С 1891 г. его приглашают читать лекции на Бестужевских высших женских курсах, а с 1893 г. — в Военно-топографическое училище. По воспоминаниям его современников, Д. А. Граве «с замечательным искусством умел излагать самые отвле-

ченные и трудные вопросы с редкою простотою и ясностью» [4, с. 322].

Сохранилось литографированное издание 1893 г. лекций по дифференциальному исчислению [6], которые Д. А. Граве читал в Институте инженеров путей сообщения. В последнем разделе собран материал по приложению дифференциального исчисления к геометрии. В первой части этого раздела изложены вопросы дифференциальной геометрии на плоскости, во второй освещаются вопросы дифференциальной геометрии в пространстве. Содержание этих лекций показывает, что вопросы дифференциальной геометрии уже стали неотъемлемой составляющей курса высшей математики технического вуза.

Следует отметить, что в Петербургском университете Граве читал специальный курс по теории поверхностей и вел практические занятия по этому курсу. Его лекции на правах вольнослушателя посещал профессор Морской академии, будущий академик, Алексей Николаевич Крылов (1863–1945). В письме от 2 декабря 1930 г. он писал: «Глубокоуважаемый Дмитрий Александрович! ... С благодарностью вспоминаю, что на днях исполняется ровно 40 лет с тех пор, как я имел удовольствие слушать в С.-Петербургском университете Ваши лекции по дифференциальной геометрии» [7, с. 33].

В 1896 г. Граве защитил докторскую диссертацию «Об основных задачах математической теории построения географических карт» [8], в которой

решил целый ряд важных задач дифференциальной геометрии. Тематически она продолжала исследования Эйлера, Лагранжа, Чебышева, Коркина, Маркова и Дарбу по картографии.

Поскольку поверхность земного сфероида не разворачивается на плоскость, то изобразить её на плоскости без искажения невозможно. Существуют два основных вида проекций: конформные и эквивалентные. При конформных проекциях сохраняется подобие в бесконечно малых частях или, другими словами, сохраняется угол между любыми двумя линиями поверхности при их изображении на карте. Масштаб при таком отображении остается постоянным по всем направлениям, при переходе от одной точки к другой.

Эквивалентные проекции таковы, что все площади фигур на карте пропорциональны площадям соответствующих фигур на земной поверхности. Масштаб на карте при такой проекции меняется в каждой точке в зависимости от азимута. На карте, выполненной в эквивалентной проекции, не может быть подобия в бесконечно малых частях. Поэтому при изображении большой части земной поверхности, когда уже ощутима кривизна Земли, приходится выбирать между указанными видами проекций.

Лагранж в работе «О построении географических карт» (1779 г.) [9] рассмотрел общую теорию конформных проекций любой поверхности вращения на плоскость. Особое внимание он уделил случаю, когда поверхность вращения есть сфера и все её меридианы и параллели переходят в окружности или прямые на плоскости. Еще раньше Эйлер в мемуаре «Об изображении поверхности шара на плоскости» (1777 г.) [10] решил схожую задачу в отношении одного частного случая эквивалентных проекций, когда изображения меридианов и параллелей пересекаются под прямыми углами.

В общем виде вопрос об отыскании эквивалентных проекций сферы на плоскость, при которых изображения меридианов и параллелей являются прямыми или окружностями, был поставлен А. Н. Коркиным.

В своей работе Граве дал полное решение задачи Коркина, доказав, что имеется ровно 11 типов таких проекций, из которых наиболее выгодными являются, по его мнению, те, при которых изображения меридианов и параллелей взаимно ортогональны.

Другим ценным результатом диссертации Граве было доказательство следующей теоремы Чебышева: «Наивыгоднейшая проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину, легко определяемую по принятой нормальной величине масштаба» [11, с. 242]. Это утверждение Чебышев высказал на заседании Петербургской Академии наук 18 января 1853 г., и долгое время оно оставалось без доказательства.

Первое доказательство этой теоремы Граве нашел в 1894 г. и доложил его на конгрессе французской ассоциации содействия прогрессу наук. В диссертации он представил его полнее. В 1911 г. Граве опубликовал на французском языке работу «Обобщение доказательства одной теоремы Чебышева» [12], в которой распространил свои рассуждения на произвольные поверхности, имеющие гауссову кривизну постоянного знака. Рассмотрим это доказательство подробнее.

Если линейный элемент заданной поверхности в изотермических координатах имеет вид $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$, то коэффициенты первой квадратичной формы

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

принимают значения

$$F = 0, \quad E = G = \lambda^2. \quad (1)$$

Поскольку всякая конформная проекция поверхности (u, v) на плоскость (x, y) записывается в виде $x + iy = f(u + iv)$, то масштаб этого отображения определяется формулой $m = \frac{|f'(u + iv)|}{\lambda}$.

Введя обозначение $H = \ln |f'(u + iv)| = \frac{1}{2} \ln f'(u + iv) + \frac{1}{2} \ln f'(u - iv)$, получим $\ln m = H - \ln \lambda$. Функция H , будучи действительной частью аналитической функции $\ln f'(u + iv)$, является гармонической функцией, поэтому она не принимает экстремальных значений во внутренних точках областей.

Схожим свойством обладает и функция $H - \ln \lambda$. В самом деле, если положим, что гауссова кривизна K положительна и функция $H - \ln \lambda$ достигает своего максимума во внутренней точке некоторой области, то выполняются неравенства

$$\frac{\partial^2(H - \ln \lambda)}{\partial u^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2(H - \ln \lambda)}{\partial v^2} \leq 0,$$

складывая которые, после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial v^2} \geq 0. \quad (2)$$

Гаусс в 1816 г. доказал, что для кривизны K имеет место равенство

$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)K = & E \left(\frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 \right) + \\ & + F \left(\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} + 4 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} \right) + \\ & + G \left(\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right) - 2(EG - F^2) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая соотношения (1) и (2), получим

$$\frac{1}{\lambda^2} K = - \left(\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial v^2} \right) \leq 0,$$

следовательно, $K \leq 0$, что противоречит предположению. Аналогично доказывается, что и в случае отрицательной гауссовой кривизны функция $H - \ln \lambda$ не достигает своего минимума во внутренней точке некоторой области.

Далее, пусть на заданном контуре функция $H - \ln \lambda$ равна нулю, тогда при $K > 0$ она принимает отрицательные значения внутри контура. Требуется доказать, что амплитуда функции $H - \ln \lambda$, т.е. разность между её наибольшим и наименьшим значениями, меньше, чем у любой другой функции

вида $H_1 - \ln \lambda$. Обозначим наибольшее значение функции $H_1 - \ln \lambda$ через A , тогда функция $H_2 - \ln \lambda = H_1 - \ln \lambda - A$ имеет ту же амплитуду и принимает внутри и на контуре только неположительные значения. Остается доказать, что минимум функции $H_2 - \ln \lambda$ меньше, чем у функции $H - \ln \lambda$. Это следует из того, что разность $H - \ln \lambda - (H_2 - \ln \lambda) = H - H_2$, являясь гармонической функцией и принимая на контуре исключительно положительные значения, не может принимать отрицательных значений внутри контура.

В диссертации Граве решил и целый ряд частных задач картографии. Например, он сравнил отклонение масштаба в проекциях Гаусса и Чебышева и показал преимущество второй. Для этого он рассмотрел четырехугольник, ограниченный дугам параллелей 40° и 70° северной широты, и двумя меридианами, отстоящими друг от друга на 40° . Площадь такого четырёхугольника превышает площадь европейской части России. Граве вычислил отклонение масштаба вдоль среднего меридиана через каждые 5° . Оказалось, что в проекции Чебышева «отклонение от нуля логарифма масштаба почти в два с половиной раза меньше, чем для Ламбертовой проекции, которая под именем Гауссовой введена при изображении Российской империи» [8, с. 3].

Научные результаты этой диссертационной работы были высоко оценены А. Н. Коркиным, который на её защите, обращаясь к Граве, сказал: «Вы являетесь достойным учеником Эйлера. В вашей диссертации совсем нет воды и каждая глава её имеет вполне конкретное содержание» [2, с. 225].

В конце 90-х годов XIX в. Граве переходит в Харьковский университет, одновременно становится профессором Технологического института в Харькове, а в конце 1901 г. избирается по конкурсу профессором кафедры чистой математики Киевского университета [12]. Здесь в течение почти сорока лет продолжалась его дальнейшая научно-педагогическая деятельность. Научные исследования Д. А. Граве этого периода относятся преимущественно к алгебре и теории чисел [13]. В Киевском университете он организовал научный семинар, где особое внимание уделялось теории групп. Среди его учеников были О. Ю. Шмидт, Б. Н. Делоне, Н. Г. Чеботарев, которые стали основателями новых алгебраических школ в Москве, Ленинграде и Казани.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тестов В. А. Д. А. Граве — основоположник российской алгебраической школы (к 150-летию со дня рождения) // Математика в высшем образовании. 2013. № 11. С. 129–138.
2. Добровольский В. А. Дмитрий Александрович Граве. — М., 1968.
3. Автобиографические записки Д. А. Граве (Публикация А. Н. Боголюбова) // Историко-математические исследования. — М., 1993. Вып. XXXIV. С. 219–246.
4. Добровольский В. А. Научно-педагогическая деятельность Д. А. Граве (к столетию со дня рождения) // Историко-математические исследования. — М., 1963. Вып. XV. С. 319–360.
5. Граве Д. А. Об интегрировании частных дифференциальных уравнений первого порядка (магистерская диссертация). — СПб., 1889.
6. Граве Д. А. Курс дифференциального исчисления. Лекции, читанные преподавателем высшей математики в Институте инженеров путей сообщения Императора Александра I приват-доцентом Императорского С.-Петербургского Университета Д. А. Граве. — СПб., 1893.

7. Урбанский В. М. Дмитрий Граве и время. — Киев, 1998.
8. Граве Д. А. Об основных задачах математической теории построения географических карт. — СПб., 1896.
9. Lagrange J. L. Sur la construction des cartes geographiques // Nouveaux Mem. de l'Acad. Royale des Sciences de Berlin, 1779. — Berlin, 1781.
10. Эйлер Л. Об изображении поверхности шара на плоскости // Л. Эйлер. Избранные картографические статьи. — М., 1959. С. 21–50.
11. Чебышев П. Л. Сочинения. Т. 1. — СПб., 1899.
12. Grave D. A. Demonstration d'un theoreme de Tchebychef generalise // Journal fur reine und angewandte Mathematik. Berlin, 1911. Bd. 140. S. 247–251.
13. Боголюбов А. Н., Урбанский В. М. Дмитрий Александрович Граве и его время // Историко-математические исследования. — М., 1993. Вып. XXXIV. С. 209–218.

Поступила 23.06.2013

DIFFERENTIAL GEOMETRY IN SCIENTIFIC AND PEDAGOGICAL ACTIVITY OF D. A. GRAVE IN ST. PETERSBURG

I. V. Ignatushina

The results obtained by D. A. Grave in the area of differential geometry at the end of XIX century are described. Particular attention is paid to his doctoral dissertation, «On the fundamental problems of the mathematical theory of the construction of maps», which was resolved a number of important problems. Additionally, a brief description of his teaching activities for teaching differential geometry of the material in the higher educational institutions of St. Petersburg given is.

Keywords: differential geometry, Dmitry Aleksandrovich Grave.

Поступила 23 июня 2013 г.