

МАТЕРИАЛЫ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ»,
ПОСВЯЩЁННОЙ 110-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И. Г. ПЕТРОВСКОГО

УДК 517.9, 372.851

**МЕЖДУНАРОДНЫЕ СТУДЕНЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**

А. С. Шамаев, Т. О. Капустина

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Россия, 119899, г. Москва, Ленинские горы, 1;
e-mail: shamaev@ipmnet.ru, okapustin@mtu-net.ru*

Кафедра дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова представляет опыт проведения международных студенческих олимпиад по дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: курс обыкновенных дифференциальных уравнений, курс дифференциальных уравнений с частными производными, студенческая олимпиада.

Цель настоящей статьи — поделиться опытом сотрудников кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ в проведении студенческих олимпиад по дифференциальным уравнениям. Они проводятся кафедрой с 2003 года и пользуются неизменной популярностью среди студентов.

Каждый год в весеннем семестре проводятся две олимпиады по дифференциальным уравнениям: олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям для студентов 2-го курса и олимпиада по дифференциальным уравнениям с частными производными для студентов 3-го курса. Цели, которые ставят организаторы, состоят прежде всего в привлечении интереса студентов к предмету и в повышении творческой активности студентов, которым представляется возможность проявить себя при решении нестандартных задач.

Вариант олимпиады состоит из большого количества задач (около десяти). Каждая задача, в зависимости от сложности, оценивается определенным количеством баллов (эти баллы указаны в вариантах). Задача студента — набрать максимальное количество баллов. Варианты составляются так, что необходимые для решения методы охватывают все основные понятия курса.

С каждым годом интерес студентов к олимпиадам возрастает. Число участников олимпиад 2012 года удвоилось по сравнению с первыми олимпиадами. Результаты студентов также приятно удивляют организаторов олимпиад. Например, в 2012 году на олимпиадах и по ОДУ, и по УрЧП, вопреки ожиданиям организаторов, нашлись студенты, решившие более двух третей всего задания.

С 2009 года олимпиады приобрели статус международных. В них могут участвовать студенты любого ВУЗа любой страны, изучающие курс обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными.

Олимпиады по ОДУ и УрЧП, наряду с олимпиадами по другим предметам, являются этапом всемехматовской олимпиады. Победители этих олимпиад обычно получают отличные оценки по соответствующему предмету и подарки — научные книги. Кроме этого, победители и призеры приглашаются на отборочный тур для формирования команды МГУ на международную студенческую математическую олимпиаду.

Организаторы олимпиад по дифференциальным уравнениям предполагают и в дальнейшем проводить подобные конкурсы на механико-математическом факультете МГУ считая, что они способствуют улучшению подготовки студентов по данной специальности и развитию самостоятельного творческого мышления студентов мехмата — будущих математиков.

Приведем результаты олимпиад 2012 года. В олимпиаде по ОДУ приняли участие более 80 студентов 2 курса. I премия: Иванов Д., Салиев, Логинов, Омеляненко В., Горбань С.; II премия: Букин Д., Городков Д., Елистратов Н., Боголюбский, Шачнев, Лавров П.

В олимпиаде по УрЧП приняли участие более 100 студентов 3 курса. I премия: Немиро; II премия: Ярославцев И., Брагин В., Царьков О., Рогуленко С., Виноградова О., Троицкая; III премия: Хрульков В., Герасимов К., Васюкова О., Левин.

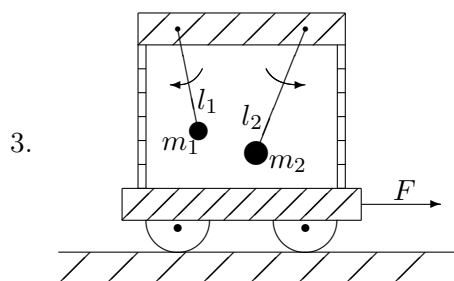
В данной статье мы приводим варианты олимпиад по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными за 2009–2012 годы. Олимпиады по ОДУ и УрЧП 2003–2008 годов приведены в [1]. Некоторые варианты с указаниями к решениям приведены в [2]. Олимпиады по УрЧП с решениями некоторых задач приведены в [3].

Олимпиады по обыкновенным дифференциальным уравнениям

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2009 г.

1. Решить задачу $\dot{x} = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2(1+t)}x$, $t > 0$, $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = e$.

2. До какой максимальной амплитуды можно раскачать маятник за время от 0 до 1 из положения равновесия силой $f(t)$, имеющей нулевое среднее по отрезку времени $[0, 1]$?



Можно ли так двигать тележку с двумя математическими маятниками, чтобы остановить оба маятника? Рассмотреть два случая $l_1/m_1 = l_2/m_2$ и $l_1/m_1 \neq l_2/m_2$.

4. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ — произвольная неограниченная последовательность чисел. Может ли она быть последовательностью нулей некоторого решения какого-либо уравнения $\ddot{x} + a(t)x = 0$, где $a(t)$ — гладкая функция?

5. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$, где $\omega(t)$ — гладкая функция. Пусть $x(t)$ — некоторое решение этого уравнения. Определим множество $X = \{\tilde{x} \in \mathbb{R} \mid \exists t : x(t) = \tilde{x}\}$, т.е. множество точек, через которые проходит траектория $x(t)$. Предположим, что мы можем измерить функцию $\omega(t)$ с любой степенью точности $\varepsilon > 0$ (но не абсолютно точно), а начальные условия $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1$ нам известны. Можно ли по этим данным построить множество $X_{\delta(\varepsilon)}$, представляющее собой $\delta(\varepsilon)$ -окрестность множества X , где $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$?

6. Существует ли линейное однородное уравнение 2009-го порядка, некоторая фундаментальная матрица которого удовлетворяет равенству $Y(t, 0) = E$:

а) при всех $t \in \mathbb{Q}$;

б) при всех $t \in \mathbb{Z}$?

7. Можно ли найти общее решение уравнения Риккати $y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$, если известны три его различных частных решения y_1, y_2, y_3 ?

8. (*Вычисление экспоненты методом А. Ф. Филиппова.*) Найдите скалярные функции p и q от двух переменных каждая, удовлетворяющие для любой квадратной матрицы A второго порядка с собственными значениями λ_1, λ_2 равенству

$$e^A = p(\lambda_1, \lambda_2) \cdot E + q(\lambda_1, \lambda_2) \cdot A.$$

9. Докажите, что если какое-либо решение уравнения $\ddot{y} + r(t)y = 0$ ($t \geq 0$) с непрерывным ограниченным коэффициентом r ограничено на полупрямой, то его производная — тоже.

10. Есть предположение, что *переживаемое* человеком время вблизи настоящего момента t воспринимается им не как абсолютное, а как его отношение ко всему времени $x(t)$, *прожитому* этим человеком к настоящему моменту. Исходя из этого предположения, составьте дифференциальное уравнение для функции $x(t)$ и решите его.

11. Рассматривается система дифференциальных уравнений, записанная в полярной системе координат:

$$r' = rf(r^2), \quad \varphi' = 1,$$

где f — гладкая функция. Предполагается, что эта система имеет предельный цикл. Будет ли решение, отвечающее этому предельному циклу:

— устойчиво по Ляпунову?

— асимптотически устойчиво?

12. Доказать, что каждое решение уравнения $y'' + e^x y = 0$ ограничено при $x \rightarrow \infty$.

13. Привести пример уравнения $y' = f(x, y)$ с непрерывной $f(x, y)$ на всей плоскости, такой, что какова бы ни была $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, существовало бы только одно решение в окрестности x_0 , такое, что $y(x_0) = y_0$, и чтобы существовали по крайней мере два решения таких, что $y(0) = 0$.

14. Пусть нулевое решение системы $\dot{x} = Ax$ устойчиво по Ляпунову. Что можно сказать об устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x} = \left(A + \frac{1}{1+t^2} E \right) x?$$

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2010 г.

1. Для уравнения

$$(x^2 + 2x + 1)y'' + (x + 1)y' + y = 0$$

найти первый положительный корень решения, удовлетворяющего условию $y(0) = 0$.

2. Устойчивы ли нулевые решения уравнений

а) $y'' + iy' + y = 0$,

б) $y'' + iy' - y = 0$?

3. Доказать, что все решения уравнения

$$y'' + y^3 = 0$$

— периодические.

4. Доказать, что не существует точки накопления нулей функции $y^{(k)}(x)$, $0 \leq k \leq n - 1$, где $y(x)$ — решение уравнения

$$y^{(n)} + a(x)y = 0,$$

$n \geq 1$, $a(x)$ — непрерывна и имеет не более чем конечное число нулей.

5. Существует ли решение уравнения $y^{IV} + a(x)y = 0$ ($a(x)$ — положительная непрерывная функция), имеющее 2 двукратных нуля, то есть удовлетворяющее для некоторых $x_1 \neq x_2$ условиям $y(x_1) = y'(x_1) = y(x_2) = y'(x_2) = 0$?

6. Исследовать на устойчивость все решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = x\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

7. Докажите, что если какое-либо решение уравнения

$$\ddot{y} + r(t)y = 0, \quad t \geq 0,$$

с непрерывным ограниченным коэффициентом $r(t)$ ограничено на полупрямой, то его производная тоже ограничена.

8. Какое наибольшее количество различных значений может принимать величина

а) $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$,

б) $\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$

на ненулевых решениях системы вида

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2?$$

9. С каждым решением $x(t)$ уравнения $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, не обращающимся в нуль вместе со своей производной, свяжем подвижный луч на фазовой плоскости, начинающийся в точке $(0, 0)$ и проходящий через точку $(x(t), \dot{x}(t))$. Существует ли такая функция $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, что все такие лучи, находящиеся в:

- а) верхней,
- б) правой

полуплоскости, с ростом t всё время поворачиваются против часовой стрелки?

10. Отклонение математического маятника под действием силы f от положения равновесия описывается уравнением $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$. До какого максимального положения в точке $t = 1$ можно отклонить математический маятник из положения равновесия $t = 0$ за время от 0 до 1 силой $f(t)$, имеющей нулевое среднее по отрезку времени $[0, 1]$ ($\int_0^1 f(t) dt = 0$), если $x(0) = \dot{x}(0) = 0$?

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2011 г.

1. У дифференциального уравнения $\dot{x} = ax$, $a > 0$, все решения, кроме $x \equiv 0$, неограничены при $t > 0$. Можно ли добиться существования ограниченного нетривиального решения, добавив к правой части bx^m , где $b > 0$, $m \in \mathbb{N}$, и рассматривая уравнение $\dot{x} = ax + bx^m$ при $t > 0$?

2. Рассматривается уравнение Ньютона $\ddot{x} = -x^3 + x^n$, $n \in \mathbb{N}$. При каких n положение равновесия $x_0 = 0$ устойчиво по Ляпунову?

3. Оцените снизу количество нулей решения уравнения $\ddot{x} + tx = 0$ на отрезке $[-100, 100]$.

4. Рассматривается математический маятник, управляемый малой силой $u(t)$, $|u(t)| < \varepsilon$: $\ddot{x} + \omega^2 x = u$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1$. Можно ли привести маятник в положение покоя за конечное время, то есть верно ли, что для любых $x_0, x_1, \varepsilon > 0$ существует такая $u(t)$, $|u| \leq \varepsilon$, что соответствующее решение $x(t)$ удовлетворяет условиям $x(T) = \dot{x}(T) = 0$ при некотором $T > 0$? Если можно, оцените это время через $\varepsilon, \omega, x_0, x_1$.

5. Легко видеть, что все решения уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ограничены. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая гладкая функция $a(t)$, $|a(t)| < \varepsilon$, что уравнение $\ddot{x} + (\omega^2 + a(t))x = 0$ имеет неограниченные при $t > 0$ решения.

6. Известно, что $x(t, t_0)$ — решение задачи Коши

$$\dot{x} = x - e^{-2t}x^3 + e^t, \quad x|_{t=t_0} = 1,$$

— в случае $t_0 = 0$ имеет вид $x(t, 0) = e^t$. Найдите производную $u(t)$ решения $x(t, t_0)$ по начальному моменту t_0 при $t_0 = 0$ (зная, что она существует).

7. Пусть система $\dot{x} = f(x)$ ($f \in C^1(\mathbb{R}^2)$) на плоскости имеет изолированную особую точку $(0, 0)$, причем тем же свойством обладает и её линеаризация $\dot{u} = Au$ в этой точке. Является ли какое-либо из следующих двух утверждений следствием другого:

а) все фазовые кривые исходной системы — циклы, окружающие особую точку;

б) все фазовые кривые линеаризованной системы — циклы, окружающие особую точку?

8. Можно ли систему $\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$, $\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2$ заменой переменных $y_1 = h_{11}(t)x_1 + h_{12}(t)x_2$, $y_2 = h_{21}(t)x_1 + h_{22}(t)x_2$ привести к виду $\dot{y}_1 = 0$, $\dot{y}_2 = 0$?

9. Опишите все возможные типы поведения при $t \rightarrow +0$ решений уравнения $t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.

10. Найдите решение уравнения $\dot{x}(t) = x(\pi)x(t)$.

11. Является ли неограниченным непродолжаемое (максимально продолженное) вправо решение задачи Коши: $\dot{x} = x^2 + 2yz$, $\dot{y} = y^2 + 2xz$, $\dot{z} = z^2 + 2xy$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$?

12. Известно, что некоторая фундаментальная матрица системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R},$$

при всяком $t \in \mathbf{R}$ ортогональна. Верно ли, что при всяком $t \in \mathbf{R}$ матрица $A(t)$ кососимметрична?

13. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y''' + p(x)y = 0$, где $p(x) < 0$. Пусть $y(x)$ — такое его решение, что $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) > 0$ в некоторой точке $x_1 \in \mathbf{R}$. Докажите, что $y(x)$ возрастает при всех $x > x_1$.

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2012 г.

1. Докажите, что для одного (какого именно?) из двух уравнений $y' = \pm y^2 + x^2$ решение с начальным условием $y(0) = 0$ продолжается на всю полуось $x \geq 0$, а для другого — нет.

2. Известно, что если все коэффициенты нормированного (т. е. с единичным старшим коэффициентом) линейного уравнения непрерывны на некотором интервале, то все его решения продолжаются на весь этот интервал. Верно ли аналогичное утверждение для отрезка?

3. Найдите матрицу A системы $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbf{R}^2$, если некоторое её решение $x(\cdot)$ удовлетворяет условиям

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Для изолированной особой точки неизвестной линейной автономной системы на плоскости нарисованы все её n собственных (определяемых собственными векторами) прямых (при $n = 2$ — седло или узел, при $n = 1$ — вырожденный узел, а при $n = 0$ — центр или фокус соответственно), а также вектор фазовой скорости в некоторой не лежащей на них точке плоскости. При каких значениях n по этому рисунку можно однозначно определить, каков тип особой точки и является ли она устойчивой?

5. Докажите, что уравнение

$$y'' - (1 + e^{-x})y = 0$$

имеет два ненулевых решения y_1 и y_2 , удовлетворяющие условиям $\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \rightarrow 1$ и $\frac{y_2'(x)}{y_2(x)} \rightarrow -1$ при $x \rightarrow \infty$.

6. При $n = 1$ для любого векторного поля $f \in C(G)$ в области $G \subset \mathbb{R}^n$ верно следующее:

а) если $f(x_0) \neq 0$

или

б) если $f(x_0) = 0$ и существует производная $f'(x_0)$,

то для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ через точку (t_0, x_0) проходит локально единственная интегральная кривая. Верны ли эти признаки локальной единственности при $n > 1$?

7. При любом ли $n \in \mathbb{N}$ верно, что: если данные n скалярных n раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на общем интервале, не являются линейно зависимыми ни на каком меньшем интервале, то их определитель Вронского хотя бы в одной точке отличен от нуля?

8. Пусть $\frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования в пространстве многочленов от переменной x степени меньше 2012. Найдите все собственные значения оператора $\exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\right)$ и их кратности.

9. Все собственные значения матрицы $A(t)$, непрерывно зависящей от t , действительны и не превосходят -1 при всех $t \in \mathbb{R}$. Следует ли отсюда, что нулевое решение линейной неавтономной системы $\dot{x} = A(t)x$

а) асимптотически устойчиво?

б) устойчиво?

10. Можно ли так подобрать правую часть уравнения

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad t \in \mathbb{R},$$

чтобы из любой начальной точки $(x(0), \dot{x}(0))$ фазовая траектория приходила бы в точку $(0, 0)$:

а) за бесконечное время;

б) за конечное время?

Олимпиады по уравнениям с частными производными

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2009 г.

1. (2 балла) Найти общее решение уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ в полуплоскости $y > 0$.

2. (2 балла) Имеет ли решение (при произвольной непрерывной функции φ на ∂K , K — единичный квадрат на плоскости $\mathbb{R}^2$) задача Дирихле

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad \text{в } K, \quad u|_{\partial K} = \varphi(x, y), \quad u \in C^2(\bar{K})?$$

3. (3 балла) Пусть $v_n(x, y)$ — последовательность решений задачи Дирихле

$$\Delta v_n = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad v_n|_{\partial\Omega} = \varphi_n(x, y),$$

Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\varphi_n \in C(\partial\Omega)$, $\|v_n\|_{L_2(\partial\Omega)} \rightarrow 0$. Можно ли утверждать, что $\|v_n\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$?

4. (1+1+3 балла) Рассмотрим уравнения

$$u_{tt} = -u_{xx}, \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad u_t = u_{xx}.$$

Какие из этих уравнений имеют двоякопериодические и отличные от const решения, определенные на всей плоскости?

5. (4 балла) Решите в явном виде задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u, \quad u|_{t=0} = 1.$$

6. (4 балла) Докажите, что для решения задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & t > 0, & \quad x \in (0, \pi), \\ u|_{x=0} &= 0, & u|_{x=\pi} &= 0, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), & u_t|_{t=0} &= \psi(x) \end{aligned}$$

выполняется оценка

$$\int_0^\pi (\alpha u^2 + \beta u_x^2 + \gamma u_t^2) dx \leq C \int_0^\pi (\varphi_x^2 + \psi^2) dx,$$

где $C = \max(\alpha + \beta, \gamma)$, α, β, γ — положительные постоянные.

7. (3+3 балла) Пусть $u(x, y)$ — решение задачи

$$u_{xx} + u_{yy} = 1 \quad \text{в } K = [0, 2] \times [0, 2], \quad u|_{\partial K} = 0.$$

а) Укажите такое целое N , что $N < u(1, 1) < N + 1$.

б) Укажите такое вещественное R , что $|u_x^{(2009)}(1, 1)| < R$.

8. (4 балла) Рассматривается решение уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \quad \text{в } t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

такое, что

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \quad u \not\equiv 0.$$

Докажите, что $u(t, x, y)$ меняет знак при сколь угодно больших t .

9. (4 балла) Рассматривается уравнение

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

Может ли $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0$ равномерно на $0 \leq x \leq 1$?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2010 г.

1. Найдите общее решение уравнения $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$.
2. Найдите в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ фундаментальное решение оператора $\mathcal{L} = \frac{d^4}{dx^4} + 16$.
3. Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$, где $u(x, t)$ — решение задачи Коши $\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}, \\ u(x, 0) = \arctg x. \end{cases}$
4. Найдите решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} - u, \\ u(x, y, 0) = \sin^2(x - 2y). \end{cases}$$

5. Может ли нетривиальное решение краевой задачи

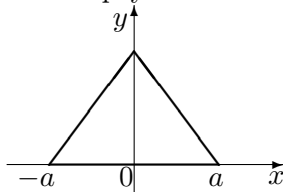
$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

иметь при некотором $x^* \in (0, \pi)$ счетное множество нулей при $t \in (0, +\infty)$?

6. При каких A существует нетривиальное решение в виде многочлена задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = A, \quad \text{где } A = \text{const}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где Ω — равносторонний треугольник на плоскости XOY (см. рис. 1)?

Рис. 1. Ω

7. Имеет ли решение краевая задача и единственно ли оно?

$$\text{а) } \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad x < 0, \\ u|_{t=ax} = 0, \quad a > 0, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x < 0, \\ u|_{t=ax} = 0, \quad a > 0. \end{cases}$$

8. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \Delta u = f(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad \text{где } f(x) \in F, F \text{ — множество функций, плотное в } \mathcal{L}_2(\Omega); \\ \text{б) } & \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \end{cases} \quad \text{где } \varphi(x) \in \Phi, \Phi \text{ — множество функций, плотное в } \mathcal{L}_2(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Плотно ли в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ множество решений?

$$\text{9. Пусть } w(y) \text{ — решение задачи } \begin{cases} \Delta w = 0 \text{ в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}_0, \\ w|_{\partial G_0} = 1, \\ w \rightarrow 0 \text{ при } |y| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad \theta(y) \text{ — реше-}$$

$$\text{ние задачи } \begin{cases} \Delta \theta = 0 \text{ в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}_0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \Big|_{\partial G_0} = 1, \\ \theta \rightarrow 0 \text{ при } |y| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad \text{Докажите, что } \int_{\partial G_0} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma \cdot \int_{\partial G_0} \theta d\sigma \geq S^2(\partial G_0).$$

Когда достигается равенство?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2011 г.

1. Решите задачу Коши–Гурса, построив область на плоскости, где это решение определяется однозначно: $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = 2x$, $u(x, 6x) = 49x^2 + x$, $0 < x < 7$, $0 < t < 6$.

2. Можно ли «раскачать» ограниченную струну до сколь угодно большой амплитуды, прилагая к одному из её концов стремящуюся к нулю силу? (Другой конец закреплен.)

3. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция, заданная вне шара $|x| < 1$. Может ли она убывать быстрее любого $|x|^{-m}$ при $|x| \rightarrow \infty$, где m — произвольное положительное число, и не быть тождественно равной нулю?

4. Корректна ли задача Дирихле для уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в круге?

5. Даны уравнения

$$\text{а) } u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad \text{в) } u_{tt} + u_{xx} + u = 0,$$

$$\text{б) } u_{tt} + u_{xx} = 0, \quad \text{г) } u_{tt} + u_{xx} - u = 0$$

на плоскости (x, t) и равносторонний треугольник T на плоскости (x, t) со стороной a . Рассматриваются решения указанных уравнений, равные нулю на границе T . Какое из этих решений может быть отлично от 0 в T ?

6. Постройте последовательность гладких функций, сходящихся к $\delta''(x)$ в $D'(\mathbf{R}^1)$.

7. Рассматривается решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$, $t \geq 0$, $x \geq 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$ и граничному условию $u(0, t) = \mu(t)$. Необходимо вычислить значение решения в точке (x, t) . На каких интервалах необходимо знать значения данных $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$, чтобы можно было вычислить значение решения

а) в точке $(x, t) = (10, 15)$,

б) в точке $(x, t) = (15, 10)$?

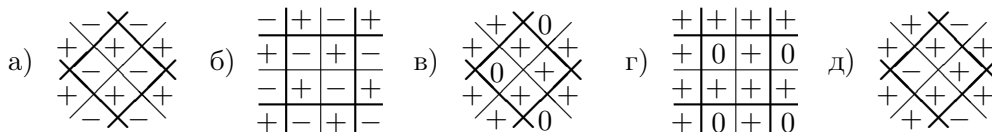
8. Единственно ли решение задачи $u_{xx} + u_{yy} - u_x - 3u_y = f(x, y)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 3]$?

9. Рассматривается ограниченное решение уравнения $u_t = u_{xx}$, $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = \left(1 + \frac{1}{|x| + 1}\right)^x$. Найдите $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

10. Существует ли в $\mathbf{R}^2$ решение задачи $u_{xy} + u = 1$, $u|_{\Gamma} = 2$, $u_y|_{\Gamma} = 0$, $\Gamma = \{(x, y) : y = x^2\}$?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2012 г.

1. Может ли классическое решение уравнения струны $u_{tt} = u_{xx}$ на $\mathbf{R}^2$ иметь знаки, как изображено на рисунках а)–д)? (Везде плоскость замощена квадратами 2 клетки $\times$ 2 клетки. Оси координат параллельны знакам +.)



2. Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + f(t, x), \quad t \in [0, \infty), \quad x \in [0, \pi], \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Пусть $f \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

а) Верно ли, что $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$?

б) Тот же вопрос для задачи (1), (2) с краевыми условиями

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0.$$

в) Тот же вопрос для задачи (1), (2) с краевыми условиями

$$(u_x - \alpha u)|_{x=0} = (u_x + \alpha u)|_{x=\pi} = 0, \quad \alpha > 0.$$

3. Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} + \alpha u_t = u_{xx}, \quad \alpha > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x).$$

а) Убывает ли амплитуда решения при $t \rightarrow \infty$, если начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ финитны?

б) Справедлива ли экспоненциальная оценка скорости убывания решения при $t \rightarrow \infty$?

4. Может ли решение уравнения теплопроводности с «памятью»

$$u_t = u_{xx} - C \int_0^t u_{xx} e^{-(t-\tau)} d\tau$$

неограниченно возрастать при $t \rightarrow +\infty$?

5. Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения $\Delta u = 0$ в полуполосе $[0, \infty) \times [0, \pi]$, удовлетворяющее условиям $u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0$.

а) Докажите, что если $|u| < M$, то $u(x, y)$ экспоненциально убывает при $x \rightarrow +\infty$.

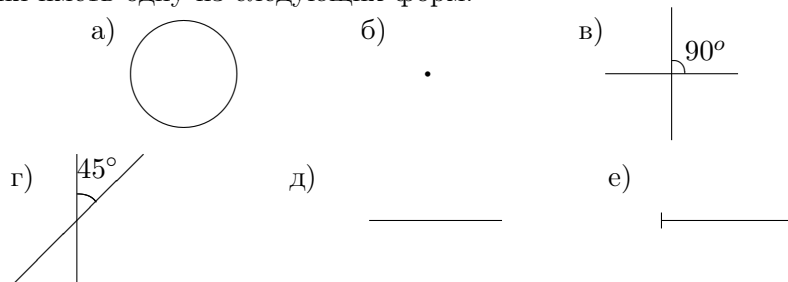
б) Пусть $u(x, y)$ убывает по x быстрее любой экспоненты. Верно ли, что $u(x, y) \equiv 0$?

6. Пусть $\Omega = (0, 1)^n$ — куб в n -мерном пространстве. Докажите, что задача

$$\begin{cases} \Delta u + x_n^{-\frac{1}{2}} u = f, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

имеет не более одного решения.

7. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция на плоскости. Может ли её линия уровня иметь одну из следующих форм:



8. Может ли у неограниченной струны $(-\infty < x < \infty)$ целый отрезок находиться в покое в процессе движения струны начиная с некоторого момента? Одна точка?

Тот же вопрос для ограниченной струны с закрепленными концами.

9. Решить в D' уравнение

$$y''' + 2y'' + y' = \delta(x).$$

10. Пусть $u(x, t)$ — решение в $[0, 1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x(1-x)^2.$$

Найти $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамаев А. С., Капустина Т. О. Педагогическая деятельность кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Олимпиады и письменные экзамены по дифференциальным уравнениям // Математика в высшем образовании. 2008. № 6. С. 11–32.
2. Шамаев А. С. Олимпиады по дифференциальным уравнениям для студентов 2, 3 курсов механико-математического факультета МГУ // Математика в высшем образовании. 2003. № 1. С. 77–83.
3. Сборник задач по уравнениям с частными производными под редакцией А. С. Шамаева. — М.: Бином, 2005.

Поступила 28.01.13

переработанный вариант — 26.05.13

INTERNATIONAL STUDENT'S OLYMPIADS ON DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. S. Shamaev, T. O. Kapustina

Chair of Differential Equations of Department of Mechanics and Mathematics of M. V. Lomonosov Moscow State University presents the experience of international student competitions on differential equations.

Keywords: course of ordinary differential equations, course of partial differential equations, student olympiad.