

В ПЕРЕРЫВЕ МЕЖДУ ЛЕКЦИЯМИ

УДК 51

МАТЕМАТИКА У ГУМАНИТАРИЕВ

Н. Н. Петров

*Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28*

В 2011 году вышло третье издание учебного пособия «Книга для чтения по высшей математике», подготовленное Ниной Леонидовной Белой и автором настоящей статьи на основе лекций, которые мы читали студентам-первокурсникам юридического факультета Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов и факультета международных отношений Санкт-Петербургского государственного университета.

Помимо стандартных сведений об основах высшей математики, «Книга для чтения...» содержит немало необязательного материала, призванного оживить нашу любимую науку для тех, кто считает её «мёртвым грузом».

Через всё учебное пособие проходит следующий шуточный рефрен: «Для того чтобы в головах наших слушателей надолго сохранились «островки» математического знания, все средства хороши. Например...» И далее следует или «лирическое отступление», или какая-нибудь забавная история, или даже стихотворное произведение из студенческого математического фольклора. На наш взгляд, такое «оформление» оправданно. Вот что пишет по этому поводу известный учёный Л. Янг в своих «Лекциях по вариационному исчислению и теории оптимального управления»: «Наши лекции не состоят из небольших кусков малопонятного текста, сопровождаемых вереницей поучительных примеров... Вместо этого мы постараемся дать всему подходящую мотивировку, прививая читателю определённый стиль мышления. А чтобы не слишком утомлять читателя, мы будем перемежать серьёзный текст более лёгким материалом и даже забавными историями».

Думаю, такая установка правильна в ещё большей степени, если речь идёт о курсах по высшей математике для гуманитариев. Что же касается лекций, то, на наш взгляд, лектор просто обязан делать нечто подобное. Иначе они превращаются в скучное и утомительное времяпровождение. Ситуация усугубляется ещё и тем, что наши слушатели, мягко говоря, математику недолюбливают. Одни считают, что успешно заниматься математикой могут только избранные, и в какой-то момент сами, а иногда и с «помощью» учителя приходят к выводу, что они к их числу не принадлежат. Чаще всего они оправдывают своё неприятие математики тем, что она якобы не нужна им вовсе. Другие полагают, что математика, в конечном счёте, всегда сводится к вычислениям («нематематики считают, что математики считают»), что, как правило, гуманитариев не вдохновляет.

На лекциях мы задаём вопросы, провоцируем, «мягко» стыдим и, конечно, шутим. Должен сказать, что смеёмся мы довольно часто. Правда, на лекциях мы смеёмся все, в то время как на экзаменах и зачётах смеются в основном экзаменаторы. За много лет «смешных» ответов накопилось довольно

много, и некоторые из них, на наш взгляд, «очень смешные», приводятся далее. Кроме «очень смешных» ответов я приведу примеры «очень смешных» диалогов, которые дают представление о том контингенте, с которым мы имеем дело.

Начну с провокаций. На первой лекции, говоря о счётных способностях большинства математиков, я вспоминаю старую шутку: «Все математики делятся на три категории: тех, кто умеет считать до трёх, и всех остальных». Как правило, в ответ — единичные смешки (тех, кто понял, что это шутка). Но однажды один молодой человек спросил, нет ли в моём утверждении противоречия. Не успел я ответить, как другой молодой человек высказал свою точку зрения: «Никакого противоречия нет, просто тот, кто такое утверждение высказал, относится ко «всем остальным», то есть, не умеет считать до трёх». Так на ровном месте завязалась полезная дискуссия.

На той же лекции подробно обсуждалась следующая ситуация. Представьте себе, что вы находитесь в школе *первого сентября* в *первом классе* на *первом уроке*. Учительница, познакомившись с учениками, сразу переходит к делу.

— Сегодня у нас будет урок математики, — объявляет она, — и я хочу посмотреть, как вы умеете решать простые задачи.

Она достает мешок с красными и синими пуговицами и высыпает их на стол.

— Дети, как узнать, каких пуговиц больше, красных или синих? — спрашивает она.

Умная Маша немедленно поднимает руку.

— Очень просто. Нужно пересчитать все красные пуговицы и все синие, и тогда будет ясно, каких пуговиц больше.

Но тут слово берет мальчик Петя и говорит примерно следующее:

— Так решать эту задачу нельзя. Ведь мы ещё не умеем считать. Точнее, мы этого ещё *не проходили*.

Петя, конечно, совершенно прав. Он рассуждал, как настоящий математик. Месяц спустя он на вопрос: «Сколько будет $7 + 4$?» отвечал: «Не знаю. До 11 мы ещё не считали».

Ставился вопрос: «Можно ли решить задачу о пуговицах, не умея считать?» И, как правило, коллективное обсуждение приводило к правильному ответу.

Ещё один пример. При обсуждении вопроса о необходимости изучения математики на юридическом факультете один молодой человек вступил со мной в полемику: «Объясните, пожалуйста, зачем мне, будущему юристу, скажем, геометрия?» Мой ответ оказался для многих неожиданным: «Геометрия как наука ближе к юриспруденции, чем, скажем, социология, политология или история». Чтобы сохранить интригу, подробное объяснение я дал на следующей лекции. Как известно, и геометрия, и право построены на аксиоматической основе, и некоторые юристы сделали попытку написать нечто вроде «Начал Евклида».

Однажды я говорил о пользе мнемонических правил и в качестве примера привёл следующее предложение, позволяющее без труда запомнить порядок цветов в спектре: «Каждый огородник желает знать, где сажать фасоль». Одна девушка немедленно отреагировала: «Нас учили не так. Во-первых,

речь шла не об огороднике, а об охотнике. Во-вторых, он интересовался не фасолью, а фазаном». Я был удовлетворён, поскольку всякую реакцию на мои слова (и, вообще, любую обратную связь) считаю полезной.

Несколько забавных историй было связано с понятием факториала. Несмотря на мои многочисленные предупреждения некоторые всё же думают, что это восклицательный знак. Разумеется, ничего смешного в этом нет. В нашей книге приводится следующее предупреждение:

«Использование восклицательного знака лишь в редких случаях приводит к недоразумению; так, например, из названия статьи, озаглавленной «Да здравствует 7!», в которой приводятся пословицы и поговорки, использующие число семь, неясно, о чем пойдет речь: о семерке или о 7!.» На первый взгляд, после семерки должен стоять восклицательный знак. Но предложение «Да здравствует...» не всегда заканчивается восклицательным знаком. Например, в тех случаях, когда оно произносится с иронией. Вот два примера.

— Господин N избран президентом страны M.

— И что же? Да здравствует господин N?

И ещё.

— Господин N избран президентом страны M.

— Что ж. (Упавшим голосом.) Да здравствует господин N.

Таким образом, если предложение «Да здравствует 7!» произносится «упавшим» голосом, то в конце его должна стоять точка, но в заголовке точка не ставится.

7 ноября во время празднования 71-й годовщины Октября, когда все мы претворяли в жизнь решения 27-го съезда КПСС, мной была написана статья, в конце которой выражалась уверенность, что мы переживаем знаменательный период нашей истории, поскольку $71 \cdot 27 = 1917$. К сожалению, у этой шутки недолгая жизнь.

Годом раньше мною была составлена «юбилейная» задача про факториал, посвящённая 70-й годовщине Октября: найти последние 70 цифр числа $1987^{1917!}$. Ответ: 69 нулей и единица, символизирующая перестройку. Эта задача была составлена для городской студенческой математической олимпиады и, конечно, была трудновата для наших слушателей. Но она многих заинтересовала. Один молодой человек подошёл ко мне и сказал, что пробовал решить эту задачу, но у него ничего не получилось. Тем не менее, он хотел бы знать её решение. Разумеется, я его просьбу удовлетворил.

В связи с представлением экспоненты в виде степенного ряда вспоминаю забавный эпизод на одном из экзаменов, свидетельствующий о безграничной фантазии наших слушателей. Спрашиваю:

— Что за значок стоит у вас рядом с n ?

— Это не значок, это i — мнимая единица.

— А почему она вверх ногами?

— Потому что в знаменателе.

У моих слушателей неплохая реакция. На зачёте одна девушка, рассказывая о теории вероятностей, назвала её основателями Ферма и Пифагора. Ошиблась, возможно, просто оговорилась.

— Как же так, — говорю, — ведь Пифагор жил задолго до нашей эры. Как же он мог переписываться с Ферма?

— Ах! — воскликнула девушка, многозначительно посматривая на меня, — На букву «П» столько выдающихся математиков, что немудрено и ошибиться.

Прекрасная реакция! Вполне заслуживающая зачёта, который и был немедленно поставлен. В данном случае я использовал один из вариантов «системы Станиславского». Говорят, Константин Сергеевич принял в театральный институт Сергея Владимировича Образцова, нашего замечательного кукольника, за одно предложение из трёх слов.

Молодой С. В. Образцов после нескольких провалов на актёрский факультет с таким убитым видом стоял в коридоре, что проходивший мимо К. С. Станиславский остановился и стал его успокаивать.

— Не огорчайтесь, — сказал он, — вы ведь ещё так молоды. Сколько вам годков?

И немедленно получил ответ: «Двадцать один лет».

Для актёра хорошая реакция — исключительно важное качество. Но так ли уж важна хорошая реакция для математика? Сомнительно. Упомянувшийся выше Л. Янг так высказался по этому поводу: «С каждым годом остаётся всё меньше оснований рассматривать математику как некий барьер, построенный из экзаменационных задач, решения которых должны быть написаны быстро... Отбирать математиков на основе таких экзаменов не более разумно, чем отыскивать поэтов на конкурсах правописания».

Ещё один пример. Излагая теорию графов, я как-то спросил: «Как бы вы назвали граф без циклов?» (Перед этим было дано определение дерева.) Нашёл молодой человек, который дал правильный ответ — «лес». А вот студенты математико-механического факультета, которым я читаю курс «Задачи на графах», часто затрудняются с ответом, и в таких случаях я над ними «мягко издеваюсь».

Однажды на экзамене я спросил одного молодого человека, принадлежит ли точка с координатами (25,29) множеству, которое определяется уравнением

$$x^3 - y^3 + 64 = 0.$$

Мы задаём вопросы подобного рода, в частности, для того, чтобы выяснить, умеют ли наши слушатели умножать многозначные числа без калькулятора. К сожалению, умеют это делать далеко не все. Молодой человек долго задумался, и я уже собирался «выйти из себя». Но неожиданно он дал правильный ответ: «Не принадлежит, это противоречило бы теореме Ферма» ($64 = 4^3$). Таковы «блеск и нищета» нашего математического образования.

Мой диалог со студентом, опустившим в определении простого числа слово «только», закончился довольно неожиданно. В казалось бы безнадежной ситуации он, обиженный моей придирчивостью, нашёл, как говорят шахматисты, неплохой практический шанс. «Вы знаете, — сказал он, — есть такой лозунг «Россия — для русских», но ведь каждому... (тут он долго подыскивал подходящее существительное, но так его и не нашёл) ясно, что слово «только» подразумевается». Так банальный экзаменационный вопрос о простых числах плавно перерос в национальный.

С простыми числами связана ещё одна забавная история. Однажды на экзамене я попросил одного молодого человека сформулировать теорему Евклида.

— Какую именно? — переспрашивает студент, выигрывая время и давая понять, что он знает не одну теорему Евклида.

— Я имею в виду теорему Евклида о бесконечности множества простых чисел.

— А-а, понятно, — произносит молодой человек, но через несколько секунд признаётся:

— Не помню.

Как тут не вспомнить старую русскую загадку: кругленькая, красненькая, а внутри вишнёвая косточка! Шутка о вишнёвой косточке принадлежит моему незабвенному учителю Григорию Михайловичу Фихтенгольцу, блестящему ленинградскому педагогу, который щедро пересыпал изложение математического анализа юмористическими отступлениями, накопленными за многие десятилетия. Однажды он назвал «рыцарем вишнёвой косточки» моего сокурсника, который на экзамене неправильно записал основное логарифмическое тождество.

На экзаменах и зачётах ответы наших слушателей, как правило, не отличались математической строгостью, но были наполнены живостью и непринуждённостью. Вот несколько примеров.

Однажды я экзаменовал молодого человека, который должен был вывести формулу для коэффициентов c_n ряда Тейлора. Утверждение о её тривиальности для свободного члена c_0 экзаменующийся высказал в следующей изысканной форме: «Если $n = 0$, базара нет». При этом он понимающе улыбнулся, призывая оценить его шутку. Экзаменатор же, возмущённый таким издевательским отношением к русскому языку, отреагировал адекватно: «Молодой человек, прошу Вас в следующий раз тщательно фильтровать базар».

— Образно выражаясь, — сказал мне на экзамене один студент, который формулировал теорему Шварца о равенстве смешанных производных, — от перестановки мест слагаемых сумма не меняется. Я посоветовал ему в следующий раз при формулировке теоремы образно не выражаться.

Другой случай. Я спрашиваю студента: «Чему равно число рёбер полного графа?». Улыбаясь, он отвечает: «Пересчитаем все рёбра *полного графа*». И выписывает формулу. Что ж, в чувстве юмора ему не откажешь.

А как бы вы отреагировали на такое высказывание одного молодого человека: «Пациент Б является решением уравнения $y' = y$? В своём ли уме этот молодой человек? В своём. Тем более, что экзаменатор одобрительно кивнул. Дело в том, что на лекции была рассказана следующая «страшная» история.

Бывший математик, пациент одной из психиатрических клиник (назовем его пациентом А) постоянно терроризировал своих товарищей по несчастью, угрожая их «продифференцировать». Его боялись, потому что никто толком не знал, что это значит. Однажды в клинику поступил новичок (назовем его пациентом Б), который бесстрашно игнорировал все угрозы пациента А. Лечащий врач, обеспокоенный таким «отклонением от нормы», однажды при обходе спросил пациента Б, почему он не боится пациента А.

— Мне нечего бояться, — ответил пациент Б, — ведь я — e^x , а остальные боятся, потому что они, видимо, многочлены.

Понятно, почему пациенты-многочлены должны бояться пациента А. Ведь после каждого дифференцирования их степень уменьшалась бы на 1, и

после конечного числа дифференцирований они могли обратиться в 0. Что же касается пациента Б, то он мог быть совершенно спокоен.

Пациент Б упоминается также в разделе о частных производных. Пациенту А всё-таки удалось его запугать. Когда пациент Б в очередной раз напомнил, что он — e^x , пациент А злобеще изрёк: «А сегодня я дифференцирую по y ».

Иногда ответы экзаменующихся существенно обогащают экзаменаторов. Молодой человек, который должен был рассказывать о производных высших порядков, начал свой ответ так: «На одном из островов Тихого океана мореплаватели вступили в контакт с туземцами. Главный мореплаватель разговаривал с вождём этого племени, представителем местной интеллигенции».

Я терпеливо ждал. Далее последовало:

«В частности, Главный мореплаватель спросил, как на местном языке произносится «один».

Вождь: — Мыр.

— А «два»?

— Мыр-мыр.

— А «сто»?

— О, это длинная история».

Тут я уже начал понимать смысл этого странного предисловия. Далее речь шла о том, сколько штрихов надо использовать для обозначения производных высших порядков. Видимо, то, что рассказал студент, — известная шутка (хотя кто знает?). Но я её не знал и в дальнейшем с удовольствием принял на вооружение.

Несколько слов об «элите» первого курса факультета международных отношений. Многие молодые люди, готовясь к карьере дипломата, прекрасно учатся, одеты с иголки, безусловно воспитаны, но, быть может, несколько «американизированы». Они вежливо вас приветствуют, причём некоторые затем спрашивают: «Как дела?» (How are you?). Я отвечаю: «Прекрасно!» (Fine!). Вообще, со мной здоровался практически весь факультет, поскольку все в своё время прошли «через меня». Особенно меня растрогала одна девушка, которая приветствовала меня при довольно необычных обстоятельствах. Она стояла в обнимку со своим другом в состоянии «полного отпада», положив подбородок на плечо молодого человека (картина настолько обычная, что никто не обращал на них внимания). В один момент она открыла глаза, увидела меня и произнесла: «Здравствуйте, Николай Николаевич!» Я, разумеется, с ней вежливо раскланялся.

Студенты-первокурсники юридического факультета тоже не забывают о своей будущей профессии. Вот два примера.

Однажды я экзаменовал довольно сильного студента юридического факультета. Отвечал он, однако, неважно, и дело шло к тройке, которую он получать не хотел. Почувствовав это, студент обратился ко мне с просьбой: «Николай Николаевич, поставьте, пожалуйста, мне двойку». Эта просьба кажется странной только на первый взгляд: двойку можно было пересдать на пятёрку, в то время как тройку нельзя пересдать даже на четвёрку. Видя, что я колеблюсь, студент вызвался написать формулу для $(x^n)'$. Я разрешил. Через несколько секунд он показывает мне равенство: $(x^n)' = x^{n-1}$, и спрашивает:

— Правильно?

— Нет, — отвечаю я.

Студент облегченно вздохнул.

— Николай Николаевич, Вы на лекции *при свидетелях* говорили, что тот, кто не будет знать этой формулы на экзамене, немедленно получит двойку, независимо от того, как он отвечал до этого.

Я, действительно, это говорил. Подобных «угроз» в курсе обычно было немного. Студенты называли их *предупреждениями об ответственности за дачу ложных показаний*. Я понял, что имею дело с молодым человеком, который далеко пойдёт, и немедленно удовлетворил его просьбу.

Иногда на лекции я задаю простые вопросы в надежде получить ответ «хором». Однажды я обратился с таким вопросом к студенту, который самозабвенно болтал со своими соседками и, разумеется, меня не слушал. Молодой человек сразу понял, что мой выбор не был случайным, и на мгновение смутился. Но только на мгновение. Он встал и важно, хорошо поставленным голосом произнёс: «На этот вопрос я буду отвечать только в присутствии своего адвоката». И, не удержавшись, рассмеялся.

В нашем курсе есть трудные разделы («наивная» теория множеств, нечёткие множества). Но я считаю, что образование сильных студентов не должно страдать из-за того, что некоторые их сокурсники плохо подготовлены. В разделе «Нечёткие множества» мы подробно обсуждаем совокупность «высоких мужчин». Мужчин ростом 150 сантиметров и ниже никто не назовёт высокими (их коэффициент Заде равен нулю). Мужчин же ростом выше двух метров большинство назовёт «высокими» (их коэффициент Заде равен единице). Что касается остальных мужчин, то о них отдельный разговор.

Теперь я перехожу к описанию самого сильного потрясения, которое я когда-либо испытывал на экзамене. Я прошу девушку сформулировать теорему Кантора (о несчётности множества точек отрезка $[0,1]$).

— Это там, где отрезок делится на три части?

— Да, да, — обрадовался я.

— Разобьем отрезок $[0,1]$ на три равные части. . . (я понял, что формулировку теоремы Кантора я уже не услышу) . . . и возьмём из них ту, которая не содержит. . .

Тут девушка запнулась. Я терпеливо ждал, и, наконец, моё терпение было вознаграждено:

— . . . и возьмём ту из них, которая не содержит мужчин ростом 150 см и ниже.

Я еле удержался на стуле.

Один из моих коллег так прокомментировал этот эпизод: «Если бы Вы упали со стула и что-нибудь себе сломали, то должны были бы винить в этом только себя. Незачем забивать девичьи головки всякой мурой».

Авторы, однако, придерживаются другого мнения. Эта печальная история, как и многие другие, ей подобные, имеет простое объяснение: в диалоге с экзаменатором неподготовленные студенты, не вникая в суть дела, в основном полагаются на свою память. Которая, увы, нередко им изменяет.

Но были случаи и похуже. Однажды ко мне подошёл студент факультета международных отношений с «хорошим» вопросом: «Нурсултан Нурсултанович, когда я мог бы сдать Вам зачёт по высшей математике?». Он, бедняга,

знал только мою фамилию и инициалы (которые были указаны в расписании) и поэтому спросил у старосты группы, как ко мне обратиться. Староста, который оказался большим шутником, удивился: «Как, ты полгода отучился и не знаешь имени-отчества Петрова? Его зовут Нурсултан Нурсултанович». Больше я этого студента не видел. Думаю, у него не было шансов получить зачёт. Говорят, его отчислили из университета по совокупности задолженностей. И правильно сделали.

Были, конечно, и безобидные путаники. Выше уже рассказывалось о девушке, утверждавшей, что Ферма переписывался с Пифагором. Приведу ещё два примера.

На лекции, рассказывая о «правиле Крамера», я упомянул о немецком писателе Э. М. Ремарке. Некоторые считают, что Ремарк — это псевдоним, который получается, если его настоящую фамилию (Крамер) прочесть «задом наперёд». Такое же совпадение наблюдается и в немецком варианте (Kramer — Remark). И что же я услышал на экзамене?

— Эта теорема называется «правилом Крамера», — завершил свой ответ молодой человек, — но Крамер — это псевдоним, его настоящая фамилия — Ремарк.

Тяжелый труд лектора включает в себя не только чтение лекций, консультации и перегрузки в период сессии, но и потрясения, вызванные некоторыми ответами наших слушателей на зачётах и экзаменах. Один из разделов нашей книги, посвящённый неевклидовой геометрии, назван так: «Пятый пункт Евклида и геометрия Лобановского». В конце концов, авторы тоже могут что-то перепутать. Но это название было выбрано под впечатлением от упомянутых выше потрясений. Что касается Евклида, то экзаменуемая утверждала, что у неё так в лекциях написано.

— Покажите.

Девушка принесла свои (или чужие) лекции, которые были в ужасающем состоянии. Слово «постулат» было подвергнуто сокращению, в котором более или менее отчётливо были выписаны только две буквы, первая и последняя.

Оговорки («Лобановский» вместо «Лобачевский») мы слышим довольно часто. Они перекликаются с известным анекдотом о человеке, который собирался поменять фамилию. Но если содержание этого анекдота, скорее всего, вымысел, то для нас упомянутые оговорки — «объективная реальность». Способствует путанице ещё одно обстоятельство. У В. В. Лобановского, выдающегося футболиста и тренера, была своя «геометрия», касающаяся расположения и перемещения игроков в центре поля и кратко изложенная в нашей книге. Был случай, когда один молодой человек вместо геометрии Лобачевского пытался рассказать геометрию Лобановского.

Удивительное дело, наслушавшись за многие годы совершенно невероятных ответов на самые простые вопросы, я ни разу не испытал раздражения. Я благодарен моим друзьям и коллегам, которые настойчиво советовали мне фиксировать подобные «перлы». Настоящая статья появилась исключительно потому, что я последовал их мудрому совету. Я признателен также Григорию Михайловичу Полотовскому и Николаю Христовичу Розову за предложение опубликовать её в столь авторитетном журнале.

Поступила 30.05.2012