

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 519.2

Л. В. КАНТОРОВИЧ: МАТЕМАТИК И ЭКОНОМИСТ
(к 100-летию со дня рождения)**С. С. Кутателадзе**

*Институт математики им. С. Л. Соболева
Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;
e-mail: sskut@math.nsc.ru*

Краткое анализ творческого пути и вклада Л. В. Канторовича в формирование современных воззрений на взаимодействие математики и экономики.

Ключевые слова: линейное программирование, функциональный анализ, прикладная математика, наилучшее использование ресурсов.



Леонид Витальевич Канторович (19.01.1912–7.04.1986) прошел путь, который обогатил и украсил отечественную историю. Его судьба и вклад в науку несут колоссальный импульс просвещения.

Часто обсуждается — кем Канторович был больше, математиком или экономистом? Сам он ответил на этот вопрос на юбилейном собрании в ЦЭМИ в честь своего 70-летия. Леонид Витальевич сказал, что есть два Канторовича — математик и экономист, но они — сиамские близнецы.

Путь Канторовича

Канторович родился в Санкт-Петербурге в семье врача-венеролога 19 января 1912 г. (6 января по старому стилю). Интересно, что во многих справочниках указана другая дата. Сам Канторович всегда с улыбкой отмечал, что он себя помнит с 19.01.1912.

Канторович был вундеркиндом-математиком. Дарование мальчика проявилось очень рано. Уже в 1926 г. в возрасте 14 лет он поступил в Ленинградский университет, где вскоре стал заниматься в кружке, организованном для студентов Г. М. Фихтенгольцем, а затем и в семинаре, посвященном дескриптивной теории функций. Ранние студенческие годы сформировали первую когорту наиболее близких товарищей. В кружке Фихтенгольца занимались также Д. К. Фаддеев, И. П. Натансон, С. Л. Соболев, С. Г. Михлин и др., с которыми Леонид Витальевич был дружен всю жизнь. Старые друзья до конца жизни за глаза называли его «Лёнечка».

Научная работа Канторовича началась под руководством Г. М. Фихтенгольца при переходе на второй курс. Перед Канторовичем были поставлены задачи, относящиеся к наиболее актуальным в конце 1920-х годов разделам теории функций и множеств.

В те годы формировалась московская математическая школа, бесспорным лидером которой был Н. Н. Лузин. Его знаменитый доклад «Современное состояние теории функций действительного переменного» на Всероссийском съезде математиков в Москве 27 апреля – 4 мая 1927 г. во многом определил интересы научной молодежи страны. Нельзя не видеть влияния Лузина на интерес Канторовича к дескриптивной теории множеств, в которой Канторович быстро выдвинулся на первые роли.

При подготовке собрания сочинений Канторовича в его личном архиве было обнаружено письмо Н. Н. Лузина, датированное 29 апреля 1934 г. и посвященное касающимся его и Канторовича обстоятельствам подготовки издания Советской математической энциклопедии. Раздел по аналитическим множествам был поручен Канторовичу, а не Лузину. Между тем Канторовичу было в то время всего 22 года. Удивительная прозорливость Лузина проявлялась не только внутри математики, но и в отношении её творцов. Он писал Канторовичу:

«Прежде всего Вы должны знать, каково мое отношение к Вам. Вас всего, как человека, я не знаю еще, но угадываю мягкий чарующий характер.

Но то что я точно знаю — это размер Ваших духовных сил, которые, насколько я привык угадывать людей, представляют в науке неограниченные возможности. Я не стану произносить соответствующего слова — зачем? Талант — это слишком мало. Вы имеете право на большее, если будете культивировать в себе Ваши силы, беседуя с сильнейшими (умершими) людьми».

Закончив ЛГУ в 1930 г., Канторович начал педагогическую работу в ленинградских вузах, сочетая её с интенсивными научными исследованиями. Уже в 1932 г. он профессор Ленинградского института инженеров граждан-

ского строительства и доцент ЛГУ. В 1934 г. Канторович становится профессором своей alma mater.

Канторович был одним из наиболее ярких и разносторонних математиков своего времени, достойным представителем петербургской математической школы, основателем которой принято считать П. Л. Чебышева.

Взгляд на математику как на науку, все разделы которой не просто взаимосвязаны, а неразрывны, соседствовал в творчестве и методологии Чебышева с пониманием особой роли математики во взаимопроникновении науки, техники, технологии и производства. Благодаря трудам Чебышева представление о единстве фундаментальных и прикладных исследований как *sine qua non* прогресса стало уникальным ментальным символом российской науки. Ленинградский период школы Чебышева связан с Владимиром Ивановичем Смирновым. Математик-энциклопедист, Смирнов задавал стандарты, приоритеты и моральные принципы в науке и преподавании. Канторович называл Смирнова своим вторым учителем.

Основные труды в области математики Канторович создал именно в свой «ленинградский» период. При этом в 1930-е годы он опубликовал больше статей по чистой математике, а 1940-е годы для него — время работ по вычислительной математике, где он стал признанным лидером в стране.

В 1935 г. Канторович совершил свое главное математическое открытие — он определил K -пространства, т. е. такие полуупорядоченные векторные пространства, в которых каждое непустое порядково ограниченное множество имеет точные грани.

Пространства Канторовича предоставили естественные рамки для построения теории линейных неравенств — области, до того времени практически никак не изученной. Очевидно, что концепция неравенств весьма приспособлена для задач, связанных с приближенными вычислениями, где существенную роль играют разнообразные оценки точности полученных результатов. Важным источником интереса к линейным неравенствам служила экономическая проблематика. Целесообразное и оптимальное поведение в условиях ограниченных ресурсов естественно связывать с языком отношений частичного сравнения. Наконец, концепция линейных неравенств неразрывна с ключевой идеей выпуклого множества. Функциональный анализ по своему своему понятию предполагает наличие нетривиальных непрерывных линейных функционалов в рассматриваемом пространстве. Наличие же такого функционала эквивалентно существованию непустого собственного открытого выпуклого множества в объемлющем пространстве. В случае общего положения выпуклые множества суть в точности решения подходящей системы линейных неравенств.

В конце 1940-х годов Канторович в серии работ сформулировал и развил тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики:

«Установилась традиция считать функциональный анализ дисциплиной чисто теоретической, далекой от непосредственных приложений, которая в практических вопросах не может быть использована. Цель ... в известной мере разрушить эту традицию, указать на связь функционального анализа с вопросами прикладной математики...».

Канторович выделил три технологии: метод мажорант, восходящий к Коши, метод конечномерных приближений и метод Лагранжа для новых задач оптимизации, возникающих в экономике.

Технологию мажорирования в общих упорядоченных векторных пространствах Канторович взял за основу исследования вариантов метода Ньютона в банаховых пространствах. Приближение бесконечномерных пространств и операторов их конечномерными аналогами следует воспринимать наряду с удивительным универсальным пониманием вычислительной математики как науки о конечных приближениях общих компактов (не обязательно метрических). Это положение включено в совместный доклад, подготовленный С. Л. Соболевым, Л. А. Люстерником и Л. В. Канторовичем для III Всесоюзного математического съезда в 1956 г. Новизна экстремальных задач, возникающих в социальных науках, связана с наличием многомерных противоречивых целей, ставящих на первое место проблему согласования интересов. Соответствующие приёмы можно рассматривать как своего рода скаляризацию векторных целей.

Канторович организовал кафедры вычислительной математики в ЛГУ и НГУ. По его настоянию курсы функционального анализа и специализация в этой области математики осуществлялись именно на этих кафедрах.

С конца 1930-х годов творчество Канторовича обрело новые черты — он совершил серьёзный прорыв в экономической науке. В 1939 г. вышла в свет его знаменитая брошюра «Математические методы организации и планирования производства», ознаменовавшая рождение линейного программирования. Линейное программирование — техника максимизации линейного функционала на множестве положительных решений системы линейных неравенств. Неудивительно, что открытие линейного программирования последовало вскоре за созданием основ теории пространств Канторовича.

В 1940-е годы экономические работы Канторовича практически не публиковались. Однако в его творчестве экономическая проблематика выступила на первый план.

Уже в военные годы он завершил работу над первым вариантом книги «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов», принесшей ему в 1975 г. Нобелевскую премию. Эта работа опережала время, не соответствовала догматам господствующей политической экономии, и её публикация оказалась возможной только в 1959 г. Пионерские идеи Канторовича были легализованы и начали использоваться в экономической практике.

В 1948 г. Совет Министров СССР особо секретным постановлением №1990-774сс/оп решил «в двухнедельный срок организовать в Ленинградском филиале Математического института АН СССР расчетную группу в количестве до 15 чел., возложив руководство этой группой на проф. Канторовича». Так Канторович вошёл в число участников проекта по созданию отечественного ядерного оружия — операции «Энормоз» в оперативной переписке советской разведки.

В 1957 г. Канторовича пригласили на работу во вновь создаваемое Сибирское отделение Академии наук. Вскоре он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР по Отделению экономики. Основные публикации

Канторовича этого периода относятся к экономике за исключением, прежде всего, всемирно известного курса «Функциональный анализ в нормированных пространствах», написанного совместно с Г. П. Акиловым.

Нельзя не отметить одну блестящую придумку Канторовича и его учеников — научно обоснованные тарифы на такси. Люди старшего поколения помнят, как в 1960-е годы была введена плата за посадку и уменьшена такса за проезд, что немедленно привело к повышению рентабельности перевозок и выгоды коротких поездок для клиентов и водителей. Эта экономическая мера была разработана в результате математического моделирования, осуществленного Канторовичем и группой его молодых учеников-математиков, и опубликована в самом престижном математическом журнале страны — в «Успехах математических наук».

В 1964 г. Л. В. Канторович избран действительным членом АН СССР по Отделению математики и в 1965 г. удостоен Ленинской премии.

В начале 1970-х годов Канторович переехал в Москву, где продолжил занятия экономическим анализом. Л. В. Канторович всегда мечтал о внедрении новых математических методов в хозяйственную практику своей Родины и служил этой мечте до своей кончины 7 апреля 1986 г. невзирая на непонимание и откровенное противодействие ретроградов от науки и политики, управлявших страной. Он похоронен на Новодевичьем кладбище в Москве.

Научное наследие

Канторович был вундеркиндом-математиком. Он стал профессором в 20 лет и был одним из наиболее ярких и широких математиков своего времени. Универсальный подход к математике характерен для всего творчества Канторовича. Среди его монографических сочинений наряду с классическими книгами «Функциональный анализ в нормированных пространствах», «Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах», «Приближенные методы высшего анализа», «Математические методы организации и планирования производства» есть и такие, как «Теория вероятностей», «Вариационное исчисление», «Определенные интегралы и ряды Фурье», «Таблицы для численного решения граничных задач теории гармонических функций».

Среди своих математических работ Канторович выделял циклы исследований в следующих направлениях: дескриптивная теория функций и теория множеств; конструктивная теория функций; приближенные методы анализа; функциональный анализ; функциональный анализ и прикладная математика; линейное программирование; вычислительная техника и программирование. Во всех указанных направлениях Канторович получил первоклассные, зачастую основополагающие результаты. В математический тезаурус прочно вошли пространства Канторовича, ядра Канторовича, метод Ньютона – Канторовича, вариационный метод Канторовича и, конечно же, многочисленные теоремы Канторовича.

Нынешние ученые, живущие на гранты, нередко работают и пишут для прокорма. Девиз “Publish or Perish” давно уже не ремарка острослова от науки, а каждодневный слоган исследователя. Канторович творил математику,

отвечающую критериям совершенства, сформулированным классиком американской математики XX века Саундерсом Маклейном. Его математика была неизбежной и своевременной, отвечала на поставленные вопросы и освещала новые пути в науке.

Тридцатые годы прошлого века занимают в творчестве Канторовича особое место. Именно тогда сложилась характерная для него методология синтеза теоретических и прикладных исследований, сочетания наиболее абстрактных математических идей с приземленными конкретными практическими разработками. В эти годы сверкают фейерверки его идей в функциональном анализе. В 1935 году он, закладывая основы теории упорядоченных пространств, выдвинул гениальный эвристический принцип, нашедший свое отражение в булевозначном анализе наших дней. Канторович в те годы вносит вклад в геометрию классических банаховых пространств и развивает новые приближенные приемы анализа: вариационный метод, метод коллокаций, модифицированные градиентные методы.

До сих пор остаются малоизвестными работы Канторовича по «расширению пространства Гильберта», ставшие удивительно ярким эпизодом предистории теории распределений. Уже в 1935 году, изучая в одном семинаре с С. Л. Соболевым классическую книгу Дж. фон Неймана «Математические методы квантовой механики» (1932), Канторович развивает подход К. Фридрихса (1934) к проблеме построения «идеальных функций», явно выписывая гильбертовы пространства, чьи элементы сейчас мы называем умеренными периодическими распределениями.

Об этих работах И. М. Гельфанд писал:

«По существу Леонид Витальевич первым понял значение обобщенных функций и написал об этом задолго до Лорана Шварца. И, я думаю, не случайно, что не его работа оказалась широко известной. Для концепции Леонида Витальевича это был только маленький фрагмент. То, что было всей жизнью или основой творчества для других, было маленьким фрагментом выстраивающейся у него картины математики и её связей с миром. Я думаю, что сделанная намного позже работа А. Г. Костюченко и моя об использовании обобщенных функций для спектрального анализа операторов была именно той, которую Леонид Витальевич не написал в свое время. По существу же он четко и ясно понимал эту работу, какие теоремы можно получить».

Говоря о математическом творчестве Канторовича, нельзя не выделить особо три обзорные статьи:

Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, вып. 6. С. 89–185.

Полупорядоченные группы и линейные полупорядоченные пространства // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, вып. 3. С. 31–98. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.

Об интегральных операторах // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, вып. 2. С. 3–29.

Первая из названных статей снабжена названием, несказанно впечатляющим своим масштабом, особенно если вспомнить возраст автора. Эта статья

фигурирует в указе о награждении Сталинской премией второй степени в размере 100 000 рублей, присужденной Канторовичу в 1948 году. Учебник Канторовича и Акилова, многие годы служивший настольной книгой многих теоретиков и прикладников, возник на основе идей этого блестящего математического сочинения.

Впечатляющее многообразие направлений исследований объединяется не только личностью Канторовича, но и его методическими установками. Он всегда подчеркивал внутреннее единство науки, взаимопроникновение идей и методов, необходимых для решения разнородных теоретических и прикладных проблем как в математике, так и в экономике.

Математика и экономика

Математика изучает формы мышления. Предмет экономики — обстоятельства человеческого поведения. Математика абстрактна и доказательна, а профессиональные решения математиков не задевают обычной жизни людей. Экономика конкретна и декларативна, а практические упражнения экономистов основательно меняют жизнь. Цель математики — безупречные истины и методы их получения. Цель экономики — индивидуальное благополучие и пути его достижения. Математика не вмешивается в личную жизнь человека. Экономика задевает его кошелек и кошелёк. Список коренных различий математики и экономики бесконечен.

Математическая экономика — новация XX века. Именно тогда возникло понимание, что экономические проблемы требуют совершенно нового математического аппарата.

Человек разумный всегда был, есть и будет человеком хозяйствующим. Практическая экономика для каждого из нас и наших предков — это арена здравого смысла. Здравый смысл представляет собой особую способность человека к мгновенным оценочным суждениям. Понимание выше здравого смысла и проявляется как осознанная адаптивность поведения. Понимание не наследуется и, стало быть, не принадлежит к числу врожденных свойств. Уникальной особенностью человека является способность пониманием делиться, превращая оценки в материальные и идеальные артефакты.

Наука — трудный путь объективизации понимания. Становление науки как инструмента понимания — долгий и сложный процесс. Зарождение ординального счета фиксировано палеолитическими находками, отделенными десятками тысяч лет от появления разумного и хозяйствующего человека. Экономическая практика предваряет предысторию математики, сформировавшуюся в науку доказательных вычислений в Древней Греции примерно 2500 лет тому назад.

Целенаправленное поведение людей в условиях ограниченных ресурсов стало объектом науки совсем недавно. Датой рождения экономики как науки принято считать 9 марта 1776 г. — день публикации сочинения Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов».

Идеи правят миром. Эту банальную констатацию когда-то с глубокой иронией дополнил Джон Мейнард Кейнс. Свой капитальный труд «Общая тео-

рия занятости, процента и денег» он завершил весьма афористично: «Практические люди, мнящие себя совершенно неподверженными никаким интеллектуальным влияниям, обычно являются рабами какого-нибудь замшелого экономиста».

Политические идеи направлены на власть, экономические — на свободу от власти. Политическая экономия неразрывна не только с экономической практикой, но и с практической политикой. Политизированность экономических учений характеризует их особое положение в мировой науке. Изменчивость эпох, их технологических достижений и политических предпочтений отражается в широком распространении эмоционального подхода к экономическим теориям и ставит экономику в положение, невыносимое для остальных наук. Помимо благородных причин, для этого есть и одна довольно циничная: как бы не меняли достижения точных наук жизнь человечества, они никогда не затрагивают обыденное сознание людей столь живо и остро, как суждения об их кошельках и свободах.

Наука — чувственно-сверхчувственный артефакт в том смысле, что её содержание раскрывается только человеком, и без человека, по меньшей мере, вполне можно быть не может. Расположенная в самом центре культуры наука напоминает «Вавилонскую башню» — наивный, но героический и великий проект народов Земли. Стремление к свободе, внутренне присущее человеку, проявляется в неистребимой жажде знания. «Мы должны знать, мы будем знать!» — этот уже вековой тезис Давида Гильберта лежит в кладовой здравого смысла.

Георг Кантор, создатель теории множеств, еще в 1883 г. заметил, что «сущность математики заключена в её свободе». Свобода математики отнюдь не сводится к отсутствию экзогенных ограничений на объекты и методы исследования. Свобода математики в немалой мере проявляется в предоставляемых ею новых интеллектуальных средствах овладения окружающим миром, которые раскрепощают человека, раздвигая границы его независимости. Математизация экономики — неизбежный этап пути человечества в царство свободы.

XIX век отмечен первыми попытками применения математических методов в экономике в работах Антуана Огюста Курно, Карла Маркса, Уильяма Стенли Джевонса, Леона Вальраса и его преемника по Лозаннскому университету Вильфредо Парето.

В XX веке к экономической проблематике обратились математики первой величины — Джон фон Нейман и Л. В. Канторович. Первый разработал теорию игр как аппарат изучения экономического поведения, а второй разработал линейное программирование как аппарат принятия решений о наилучшем использовании ограниченных ресурсов. Эти исследования фон Неймана и Канторовича занимают исключительное место в науке. Они показали, что современная математика предоставляет самые широкие возможности для экономического анализа практических проблем. Экономика приблизилась к математике. Оставаясь гуманитарной, она стремительно математизируется, демонстрируя высокую самокритичность и незаурядную способность к объективным суждениям.

Поворот в мышлении человечества, осуществленный фон Нейманом и Канторовичем, не всегда достаточно осознается. Между точным и гуманитарным стилями мышления существуют принципиальные различия. Люди склонны к рассуждениям по аналогии и методу неполной индукции, рождающим иллюзию общезначимости знакомых приемов. Различия научных технологий не всегда выделены отчетливо, что, в свою очередь, способствует самоизоляции и вырождению громадных разделов науки.

Линейное программирование

Главным открытием Канторовича на стыке математики и экономики стало линейное программирование, которое теперь изучают десятки тысяч людей во всем мире. Под этим термином скрывается колоссальный раздел науки, посвященный линейным оптимизационным моделям. Иначе говоря, линейное программирование — это наука о теоретическом и численном анализе и решении задач, в которых требуется найти оптимальное значение, т. е. максимум или минимум некоторой совокупности показателей в процессе, поведение и состояние которого описывается той или иной системой линейных неравенств.

Термин «линейное программирование» был предложен в 1951 г. американским экономистом Т. Купмансом. В 1975 г. Канторович и Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам с формулировкой «за их вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Особыми заслугами Купманса стали пропаганда методов линейного программирования и защита приоритета Канторовича в открытии этих методов.

В США линейное программирование возникло только в 1947 г. в работах Джорджа Данцига. Поучительно привести его слова об истории линейного программирования:

«Русский математик Л. В. Канторович на протяжении ряда лет интересовался применением математики к задачам планирования. В 1939 г. он опубликовал обстоятельную монографию под названием “Математические методы организации и планирования производства”... Канторовича следует признать первым, кто обнаружил, что широкий класс важнейших производственных задач поддается четкой математической формулировке, которая, по его убеждению, дает возможность подходить к задачам с количественной стороны и решать их численными методами...»

Канторович описал метод решения, основанный на имеющемся первоначально допустимом решении... Хотя двойственные переменные и не назывались “ценами”, в целом идея метода состоит в том, что выбранные значения этих “разрешающих множителей” для недостающих ресурсов можно довести до уровня, когда становится целесообразной переброска ресурсов, являющихся избыточными...»

Если бы первые работы Канторовича были бы в должной мере оценены в момент их первой публикации, то, возможно, в настоящее время линейное программирование продвинулось бы значительно дальше. Однако его первая

работа в этой области оставалась неизвестной как в Советском Союзе, так и в других странах, а за это время линейное программирование стало настоящим искусством».

Следует подчеркнуть, что с оптимальным планом любой линейной программы автоматически связаны оптимальные цены или «объективно обусловленные оценки». Последнее громоздкое словосочетание Канторович выбрал из тактических соображений для повышения «критикоустойчивости» термина. Концепция оптимальных цен и взаимозависимость оптимальных решений и оптимальных цен — такова краткая суть экономического открытия Канторовича.

Универсальная эвристика

Целостность мышления проявлялась во всех исследованиях Канторовича. Идеи линейного программирования были тесно связаны с его методологическими установками в области математики. Уже в самой первой своей работе в неизведанной области упорядоченных векторных пространств, датированной 1935 г., Канторович писал:

«В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

Так была впервые сформулирована важнейшая методологическая установка, которую теперь называют эвристическим принципом Канторовича. Этот принцип нашел многочисленные подтверждения как в его собственных исследованиях, так и в работах его учеников и последователей.

Абстрактная теория K -пространств, линейное программирование и приближенные методы анализа — продукты универсальной эвристики Канторовича. В последней своей математической работе, над которой Леонид Витальевич работал уже смертельно больным, он отмечал:

«При развитии теории функциональных пространств одна сторона реальной действительности оказалась в ней на некоторое время упущенной. Для практических объектов, наряду с алгебраическими и другими соотношениями, большое значение имеет соотношение сравнения. Простое сравнение, имеющее место между всеми объектами, упорядочение, имеет обедненный характер, например, можно все виды упорядочить по их весу, но это мало что дает. Гораздо более естественным является упорядочение, которое для тех случаев, когда это естественно, определяется или фиксируется, а в других случаях оставляется неопределенным (частичное упорядочение или полуупорядочение). Например, два набора продуктов несомненно следует считать сравнимыми и первый большим второго, если в нем каждого продукта больше, соответственно, чем во втором. Если же часть больше в одном, часть больше в другом, то можно сравнение не фиксировать. Так в свое время была построена теория полуупорядоченных пространств и, прежде всего, теория K -пространств, определенных выше. Она

получила разнообразные применения как в теоретических вопросах анализа, так и в построении некоторых прикладных методов, например теории мажорант в связи с интенсивным изучением метода последовательных приближений. В то же время полностью её возможности до сих пор еще не раскрыты. Недооценено также и значение этой ветви функционального анализа для экономики. Между тем, в экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль и уже при возникновении K -пространств было ясно, что при анализе экономики они найдут свое место и дадут полезные плоды.

Теория K -пространств имеет и другое значение — их элементы могут использоваться как числа. В частности, при построении пространств типа Банаха в качестве нормы могут вместо чисел использоваться элементы такого пространства, конечномерного или бесконечномерного. Такая нормировка объектов является гораздо более точной. Скажем, функция нормируется не своим максимумом на всем интервале, а десятком чисел — максимумами её на частях этого интервала».

Эвристический принцип Канторovichа связан с одной из самых ярких страниц математики прошлого века — со знаменитой проблемой континуума. Как известно, множество имеет мощность континуума, если оно находится во взаимно-однозначном соответствии с отрезком числовой прямой. Гипотеза континуума состоит в том, что любое подмножество отрезка либо счетно, то есть допускает пересчет, либо имеет мощность континуума. Проблема континуума ставит вопрос о справедливости или ложности гипотезы континуума.

Гипотеза континуума была впервые высказана Кантором в 1878 г. Он был убежден в том, что эта гипотеза является теоремой и всю жизнь тщетно пытался её доказать. В 1900 г. в Париже состоялся II Международный конгресс математиков. Гильберт выступил на открытии со своим знаменитым докладом «Математические проблемы», сформулировав 23 проблемы, решение которых девятнадцатое столетие завещало двадцатому. Первой в докладе Гильберта стоит проблема континуума. Оставаясь нерешенной десятилетиями, она породила глубокие исследования в основаниях математики. В итоге более чем полувековых усилий мы теперь знаем, что гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута.

К пониманию независимости гипотезы континуума человечество пришло в два этапа: в 1939 г. Курт Гёдель проверил, что гипотеза континуума совместна с аксиомами теории множеств, а в 1963 г. Поль Коэн доказал, что им не противоречит и отрицание гипотезы континуума. Оба результата установлены путем предъявления подходящих моделей, т. е. построением универсума и интерпретации в нем теории множеств. Подход Гёделя основан на «усечении» универсума фон Неймана. Гёдель показал, что выделенные им конструктивные множества образуют модель, в которой имеет место континуум-гипотеза. Следовательно, отрицание гипотезы континуума недоказуемо. Подход Коэна в известном смысле противоположен технике Гёделя: он основан на контролируемом расширении универсума фон Неймана.

Метод форсинга Коэна был упрощен в 1965 г. с использованием аппарата булевых алгебр и новой технологии математического моделирования, ис-

пользующей нестандартные модели теории множеств. Прогресс возникшего на этой основе булевозначного анализа продемонстрировал фундаментальное значение расширенных K -пространств. Каждое из таких пространств, как совершенно неожиданно оказалось, служит равноправной моделью вещественной прямой и, значит, играет в математике ту же фундаментальную роль. Пространства Канторovichа дали новые модели поля вещественных чисел и обрели бессмертие.

Эвристика Канторovichа постоянно получает блестящее подтверждение, доказывая целостность науки и неизбежность взаимопроникновения математики и экономики.

Канторovich был блестящим математиком, но он может показаться неудачником в главном — в вопросе о признании центральной идеи его жизни, идеи взаимопроникновения математики и экономики. Однако такое мнение ошибочно. Несмотря на попытки замалчивания Канторovichа и его идей, их торжество на самом деле неоспоримо. Яркими доказательствами стали изменение всей системы подготовки экономистов и уже неистребимые математизация и информатизация экономики как в её функциональных, так и в управленческих аспектах. Творчество Канторovichа останется образцом служения математике как основе универсального мировоззрения. Его эвристика будет путеводной звездой для новых поколений математиков и экономистов.

Поступила 10.03.2012

L. V. KANTOROVICH — MATHEMATICIAN AND ECONOMIST

S. S. Kutateladze

Short discussion of creative way and contribution by L. V. Kantorovich into formation of modern views on mathematics and economy interaction.

Keywords: linear programming, functional analysis, applied mathematics, the best use of resources.