

СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 51 : 37

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ КАК ПОДДЕРЖКА
ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ
В ВУЗЕ

Л. Н. Посицельская

*Московский автомобильно-дорожный
государственный технический университет
Россия, 125319, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 64;
тел. (499)155-03-26; e-mail: posicelskaja@yandex.ru*

Обсуждается использование математических экспериментов для проверки, обоснования и разъяснения математических утверждений при изучении математики в вузе.

Ключевые слова: прямое и косвенное доказательство, тезис и антитезис, контрпример, математический эксперимент.

1. Ученые и философы о математических доказательствах

Доказательства не всегда были неотъемлемой частью математики. Древние египтяне, например, знавшие много математических фактов и алгоритмов, прекрасно обходились без доказательств. Но, по мнению Н. Бурбаки, «со времен греков говорить “математика” значит говорить “доказательство”». Однако многие ученые высказывают и совершенно иные точки зрения на математические доказательства.

А. Шопенгауэр говорит о доказательстве: «Математик вынуждает вас допустить справедливость теоремы, но вы не получаете никакого реального понимания. Это всё равно, как если бы вас провели через лабиринт. Вы, наконец, выходите из лабиринта и говорите себе: “Да, я вышел, но не знаю, как здесь очутился”».

Позиция Шопенгауэра, конечно, курьез, но в ней есть момент, заслуживающий внимания. Нужно уметь проследить каждый шаг доказательства. Иначе его части лишатся связи, и оно в любой момент может рассыпаться, как картонный домик. Но не менее важно понять доказательство в целом как единую конструкцию, каждая часть которой необходима на своем месте. Доказательство, не понятое как целое, ни в чем не убеждает. Даже если выучить его наизусть, предложение за предложением, к имеющемуся знанию предмета это ничего не прибавит. Французский математик А. Пуанкаре по этому поводу писал [1]: «Следить за доказательством и лишь убеждаться в правильности каждого его последующего шага равносильно такому наблюдению за игрой в шахматы, когда замечаешь только то, что каждый ход подчинен правилам игры».

Об И. Ньютоне рассказывают, что, будучи студентом, он начал изучение геометрии, как было принято в то время, с чтения Евклида. Знакомясь с формулировками теорем, он видел, что они справедливы, и не изучал доказательств. Его удивляло, что люди затрачивают столько усилий, чтобы доказать совершенно очевидное. Позднее Ньютон изменил свое мнение о необходимости доказательств в математике и других науках и хвалил Евклида как раз за безупречность и строгость его доказательств.

2. Убедительность доказательства

В связи с сокращением аудиторных часов на изучение математики в вузе доказательствам математических утверждений на лекциях уделяется меньше внимания. При таком подходе выхолащивается содержание предмета; утверждения, формулируемые без обоснования, становятся необидительными. Чтобы компенсировать эту потерю, необходимо понять, какую роль играет доказательство в учебном процессе. В отличие от научных работ, где доказательство служит способом проверки правильности утверждения, изложение доказательства на лекции предназначено для того, чтобы убедить слушателей в правильности теоремы и разъяснить причины, по которым утверждение справедливо. Необходимо признать, что требования к строгости доказательства не являются универсальными и зависят от контекста, аудитории слушателей, раздела науки. С убедительностью дело обстоит ещё сложнее, в частности, когда речь идет о студенческой аудитории на лекции.

Рассмотрим для примера утверждение, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Тот факт, что предел не равен единице, противоречит интуиции студента, который уже знает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100} = 1$. Доказательство не убеждает. Нужно провести эксперимент по вычислению членов последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, который целесообразно поручить студентам. В зависимости от наличия технических возможностей они могут использовать калькулятор или написать компьютерную программу.

Одним из наиболее трудных для понимания разделов математического анализа является раздел «Ряды», особенно тема «Числовые ряды». Решение задачи на исследование сходимости ряда часто представляется студентам шахматной партией, в которой все ходы сделаны по правилам, а результат не ясен, так как в ответе нет ни числа, ни функции, ни графика, а какие-то слова: «сходится», «расходится», «абсолютно», «условно». Эксперименты по вычислению сумм рядов, сравнение поведения последовательностей частичных сумм, которые студенты проводят самостоятельно или под руководством преподавателя, могут несколько поправить дело.

В течение ряда лет на государственном экзамене по математике в одном из вузов студентам задавали простой дополнительный вопрос: «Дайте определение точки локального максимума функции одной переменной» и получали всегда один и тот же ответ: «Это точка, в которой производная равна нулю».

При продолжении беседы выяснялось, что надо ещё смотреть на переменные знака производной. Определение никто не вспоминал. Очевидно, что запоминают не то, что слышали на лекции или читали в учебнике, а то, что сами вычисляли: «Я слышу, и я забываю. Я вижу, и я забываю. Я делаю, и я забываю» (китайская пословица).

Доказательство не будет убедительным, если утверждение кажется очевидным. Например, интуиция, основанная на опыте работы с конечными суммами, подсказывает, что члены ряда можно произвольно переставлять или группировать. И нужно рассмотреть примеры различных рядов, чтобы понять, что не со всеми из них можно так обращаться. Интересные эксперименты со знакопеременными числовыми рядами можно найти в книге Р. Грэхема, Д. Кнута, О. Поташника «Конкретная математика» [2].

3. Прямые и косвенные доказательства в математике

Доказательства по форме и логической структуре делятся на прямые и косвенные. Прямое доказательство идет от рассмотрения аргументов к доказательству тезиса, то есть истинность доказательства непосредственно обосновывается аргументами. Схема этого доказательства такова: из данных аргументов $(a, b, c, \dots)$ необходимо следуют истинные суждения $(k, m, l, \dots)$, а из последних следует доказываемый тезис. По этому типу проводятся доказательства в судебной практике, в науке, в полемике, в сочинениях школьников, при изложении материала учителем.

Косвенное доказательство — это доказательство, в котором истинность выдвинутого тезиса обосновывается путем доказательства ложности антитезиса. Оно применяется тогда, когда нет аргументов для прямого доказательства. Косвенное доказательство устанавливает справедливость тезиса тем, что вскрывает ошибочность противоположного ему допущения, антитезиса. Как с иронией замечает американский математик Д. По́йа, «косвенное доказательство имеет некоторое сходство с надувательским приемом политика, поддерживающего своего кандидата тем, что опорочивает репутацию кандидата другой партии». Косвенные доказательства делятся на два вида: доказательство «от противного» и разделительное доказательство (методом исключения).

Доказательство «от противного» осуществляется путем установления ложности противоречащего тезису суждения. Этот метод часто используется в математике. Разделительное доказательство — это доказательство методом исключения. Антитезис является одним из членов разделительного суждения, в котором должны быть обязательно перечислены все возможные альтернативы. Истинность тезиса устанавливается путем последовательного доказательства ложности всех членов разделительного суждения кроме одного.

Косвенное доказательство представляет собой эффективное средство обоснования. Но, имея с ним дело, мы вынуждены всё время сосредотачиваться не на верном положении, справедливость которого необходимо обосновать,

а на ошибочных утверждениях. Ход доказательства состоит в том, что из антитезиса, являющегося ложным, мы выводим следствия до тех пор, пока не придем к утверждению, ошибочность которого несомненна. Косвенное доказательство — хорошее орудие исследования, но оно не всегда удачный прием изложения материала. Не случайно в практике преподавания нередок такой парадоксальный совет: после того как косвенное доказательство проведено, ход его полезно тут же забыть, оставив в памяти только доказанное положение. Имеются также более серьезные возражения против косвенного доказательства. Они связаны с использованием в нем закона исключенного третьего, который не всеми признается универсальным.

4. Экспериментальная поддержка доказательства в образовательном процессе

Потребность в экспериментальной поддержке доказательства возникает в следующих случаях:

- Утверждение противоречит интуиции или известным похожим фактам (пример о числе ϵ в пункте 2).
- Часть условий теоремы на первый взгляд кажется излишней. Примеры: односвязность области в теореме о формуле Грина; условие абсолютной сходимости ряда в теореме о перестановках членов числового ряда.
- Доказательство содержит указание на численный метод или алгоритм, который надо проработать. Пример: доказательство теоремы о промежуточном значении непрерывной функции содержит указание на алгоритм половинного деления для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ на данном отрезке.
- Доказательство является косвенным, и тезис нужно поддержать в противовес антитезису.
- Во избежание логической ошибки: подмены прямого утверждения обратным, которое является неверным. Пример: необходимое условие сходимости ряда (предел общего члена равен нулю) часто ошибочно воспринимается как достаточное.
- Доказательство не излагалось или было рассказано схематично в силу его сложности, недостатка времени, по иным причинам.

5. Способы организации экспериментальной работы по математике в процессе обучения

При пассивном восприятии материала эффективность усвоения не велика. Для присвоения знаний необходима самостоятельная учебная деятельность, математический эксперимент, осуществляемый студентами индивидуально или в групповом режиме [3]. Это особенно важно при схематическом

изложении доказательств или их отсутствии. «Примеры учат не меньше, чем правила» (В. Арнольд). И. М. Гельфанду приписывают высказывание: «Теории приходят и уходят, а примеры остаются».

Экспериментальную работу по математике можно организовать разными способами:

1. На практических занятиях студентам предлагаются задания типа: придумать (построить) объект с заданными свойствами; изменить данный объект (предел, функцию, уравнение, ряд) так, чтобы были выполнены заданные условия; проверить, верно ли данное утверждение; установить, может ли существовать математический объект, удовлетворяющий данным условиям (студент сталкивается с необходимостью перейти к рассмотрению примеров, «прощупать» вопрос).

2. Лабораторные работы на компьютере с поставленной исследовательской задачей по изучению свойств объекта, модели, алгоритма; по сравнительному анализу методов. Для повышения эффективности лабораторных занятий и экономии времени на проведение эксперимента целесообразно использовать групповую форму работы, при которой необходимые вычисления распределяются между участниками группы. Использование этой формы работы позволяет расширить объем эксперимента. Полученные результаты затем сводятся воедино и обсуждаются; делаются выводы [3, 4].

3. При наличии необходимого оборудования есть смысл делать на лекции небольшие паузы, во время которых студенты проводят вычислительные эксперименты, разъясняющие суть излагаемого материала.

Опыт проведения математических экспериментов на занятиях по дисциплинам «Теория игр и исследование операций», «Методы оптимизации», «Численные методы», «Методы аппроксимации» показывает высокую эффективность использования этой методики для усвоения учебного материала.

6. Смежные вопросы

Пространство для математических экспериментов включает, кроме поддержки доказательств, и другие виды учебной деятельности:

1. Опровержение ложного утверждения. Построение контрпримеров занимает важное место не только в математических исследованиях, но и при изучении математики. Можно предложить группе студентов опровергнуть утверждение одного из студентов, если они считают его неверным.

2. Проверка ответа. Необходимо приучать студентов проверять решение задачи, сопоставляя результат с условием: подставить в данное уравнение числовой корень или функцию — решение дифференциального уравнения; проверить интегрирование дифференцированием и т. п.

3. Оценки и прикидки — важная часть работы при решении прикладных задач, к которым надо готовить студентов. Может ли объем тела быть отрицательным, вероятность больше единицы, а центр тяжести выпуклой фигуры находится вне её пределов? Желательно готовить будущих инженеров и экономистов к проведению гораздо более тонкого анализа числовых результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. О науке. — М.: Физматлит, 1983. 560 с.
2. Грэхем Р., Кнут Д., Поташник О. Конкретная математика. — М.: Мир, 2009. 703 с.
3. Посицельская Л. Н. Групповая форма работы на лабораторных занятиях по специальным математическим дисциплинам в вузе // XIX Международная конференция «Математика. Образование», 2011. С. 308.
4. Посицельская Л. Н. Лабораторные работы по дисциплине «Теория игр и исследование операций» // Математическое образование. 2010. № 2. С. 56–61.

Поступила 03.10.2012

MATHEMATICAL EXPERIMENT AS PROOF SUPPORT WHEN STUDING MATHEMATICS

L. N. Positselskaya

Use of mathematical experiment for check, justifications, explanations of mathematical statements when studying mathematics in higher school is discussed.

Keywords: direct and indirect proof, thesis and antithesis, counterexample, mathematical experiment.