СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.3

ОБ ОДНОЙ ЗАБЫТОЙ ТЕОРЕМЕ АНАЛИЗА[1]

Питер А. Лёб[2]

Department of Mathematics, University of Illinois
1409 West Green Street, Urbana, Illinois 61801;
e-mail: loeb@math.uiuc.edu

Перевод с английского Е. И. Гордона[3]

Предисловие переводчика

Предлагаемая заметка известного американского математика П. Лёба, профессора Иллинойского университета в Урбане-Шампейн, в настоящее время находящегося на пенсии (Professor Emeritus), посвящена проблеме, которая уже довольно давно не рассматривается в курсах математического анализа как в США, так и в России. Впрочем, как следует из заметки, её продолжают обсуждать в университетах Высшей Лиги США, к которой относятся такие университеты, как Гарвард, Йель, Колумбия, Принстон и некоторые другие. Речь идет о проблеме строгого обоснования выбора подынтегрального выражения при вычислении величин с помощью определенных интегралов. Например, при вычислении площади под графиком непрерывной функции на отрезке $[a, b]$ тот факт, что эта площадь равна $\int_a^b f(x)\,dx$, обосновывается при помощи верхних и нижних сумм Дарбу, поскольку по определению площадь квадрируемой фигуры есть точная верхняя грань площадей вписанных многогранников и, одновременно, точная нижняя грань площадей описанных многогранников. Однако уже при вычислении площади между графиками двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ обосновать использование интеграла $\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$ при помощи сумм Дарбу, вообще говоря, не удаётся и приходится привлекать аддитивность площади. При вычислении длины кривой, которая является пределом длин вписанных ломаных, т. е. пределом сумм вида $\sum_i \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, использование интеграла $\int_a^b \sqrt{1+f'^2}\,dx$ тоже не удаётся обосновать при помощи верхних и нижних сумм — здесь нужно использовать теорему о конечных приращениях и независимость интеграла от выбора точек, в которых вычисляется функция в суммах Римана. Еще сложнее задача строгого обоснования вычисления с помощью интегралов физических величин, не имеющих, как правило, формального математического определения.

[2] Оригинал статьи — «A Lost Theorem of Calculus» — опубликован в журнале *Math. Intelligencer,* Vol. 24, No 2 (2002), 15–18. Перевод публикуется с любезного разрешения автора.

[2] Автор признателен Данниилу Грэйсону и рецензенту за ряд полезных предложений.

[3] Department of Mathematics, Eastern Illinois University, Charleston, IL 61920.

В заметке описывается общий подход к этой проблеме, основанный на ныне забытой теореме Дюамеля и некоторых её модификациях. Этот подход применяется для обоснования интеграла в упомянутом случае вычисления площади, заключенной между графиками двух функций, а также в одной весьма нетривиальной физической задаче. Достоинство этого подхода состоит в его простоте и доступности для начинающих.

Чтобы мотивация этой заметки была более понятна читателю, поясним структуру преподавания математического анализа в американских университетах. Поступая на факультет естественных наук (College of Science), студент, как правило, выбирает свою основную специализацию после окончания двух – трёх семестров, в течение которых он изучает вводные курсы по математике, физике, химии и т. п. При этом основным математическим курсом является курс дифференциального и интегрального исчисления, который читается без доказательств теорем о пределах, свойств непрерывных функций и т. п. Иногда не даётся даже формальное определение предела. Этот курс примерно соответствует курсу математики в технических вузах России. Определённый интеграл вводится как предел римановых сумм. При этом отрезки разбиения считаются равными. Студенты, выбирающие математику своей основной специальностью, изучают затем курс оснований (Foundations), который примерно соответствует курсу «Элементы математической логики и теории множеств», читаемому иногда в российских университетах. Затем читается «продвинутый» курс анализа (Advanced Analysis), в котором излагаются теория вещественных чисел, теория пределов, теория непрерывности и теория интеграла Римана. Как правило, в основу определения интеграла Римана в современных учебниках кладутся суммы Дарбу. Этим и объясняется внимание к обоснованию корректности использования определённых интегралов.

При современном развитии компьютерных вычислений, в том числе символьных, вряд ли имеет смысл уделять столько внимания технике вычисления неопределенных интегралов (хотя, конечно, самые основные общие методы, такие, как интегрирование рациональных функций, должны быть изучены). При этом встает вопрос, чем заменить исключаемые темы. Заметка убедительно показывает, что обоснование применения интегралов при вычислении величин может быть хорошим кандидатом на включение в курсы анализа.

1. Введение

Как при решении прикладной задачи с помощью интеграла Римана определить, что подынтегральное выражение выбрано правильно? Почему, например, $f(x)\Delta x$ является хорошей аппроксимацией при вычислении площади под графиком функции f, в то время как Δx — плохое приближение при вычислении длины этого графика? Много лет тому назад для ответа на этот вопрос математики использовали принцип Дюамеля (см. [5, 4], или [2, стр. 35]), а позднее там, где это возможно — заменяющую его теорему Блисса [1]. В настоящее время эти теоремы знают лишь немногие математики старейшего поколения. В современных учебниках строгое изложение определенных интегралов использует верхние и нижние суммы как для теории, так и для приложений. Большинство преподавателей и не подозревает, что этот метод не годится для проверки правильности выбора подынтегрального выражения даже в некоторых простых задачах для первокурсников.

Автор остро столкнулся с этой проблемой неадекватности, когда, будучи приглашенным профессором в одном из университетов высшей лиги, вынужден был, вопреки своим энергичным возражениям, включить в заключительный экзамен по математическому анализу следующую задачу: написать и подробно обосновать интеграл для вычисления силы, с которой вода в бассейне действует на круглое стеклянное окно радиуса R в стене этого бассейна, если уровень воды находится как раз на вершине окна. Студенты изучали в курсе только метод верхних и нижних сумм, так что они смогли правильно решить задачу лишь для верхней половины окна, но не для его нижней половины (см. ниже Пример 2).

Трудность, связанная с обоснованием правильности выбора подынтегрального выражения, довольно тонкая. Если величина Q равна интегралу от функции f, то каждая верхняя сумма для f больше Q, а каждая нижняя сумма для f меньше Q. С другой стороны, даже в приложениях самого элементарного уровня невозможно знать *a priori*, что величина Q ограничена верхней и нижней суммами. Это можно узнать, только показав каким-то другим путем, что интеграл от f равен Q. Рассмотрим, например, площадь между графиками функций $g(x) = 1 + x^2$ и $h(x) = 2x^2$ на $[0, 1]$. В то время как при достаточно малом $\Delta x > 0$ функция $g(x) - h(x)$ принимает на интервале $[0, \Delta x]$ максимальное значение 1 в точке 0, ни один прямоугольник с высотой 1 и шириной Δx не содержит области, заключенной между этими графиками над интервалом $[0, \Delta x]$. Таким образом, *заранее* не ясно, что $1 \cdot \Delta x$ больше, чем площадь этой области. Конечно, обосновать нужный здесь интеграл можно несколькими различными способами (см. Пример 1), однако даже в этом простом случае «универсальный» метод верхних и нижних сумм, а также теорема Блисса не подходят для проверки правильности выбора подынтегрального выражения.

Какой ответ мы здесь предлагаем? При вычислении величины Q как интеграла от непрерывной функции f на интервале $[a, b]$ часть Q_i величины Q, относящаяся к i-му интервалу данного разбиения, аппроксимируется i-м членом суммы Римана для функции f. Результирующие ошибки e_i при этом должны быть настолько малы, чтобы их *сумма* стремилась к нулю при измельчении разбиения. Мы ответим на этот вопрос, указав, сколь малым должно быть для этого каждое e_i. Ответ, данный ниже в Теореме 2, является специальным случаем принципа Дюамеля, выведенным из теоремы Кислера [3] о бесконечной сумме. Результат Кислера использует бесконечно малые числа. Он утверждает, что при разбиении на бесконечно малые интервалы каждая ошибка e_i должна быть бесконечно малой по сравнению с длиной соответствующего интервала. В этой статье мы заменим бесконечно малые величины на функции, стремящиеся к нулю при стремлении аргумента к нулю. Чтобы наш ответ был полезным, нужно отказаться от распространенного убеждения, что равномерная непрерывность не может быть введена на элементарном уровне; на самом деле её можно ввести относительно легко, используя эквивалентое условие, приведенное ниже в Теореме 1.

Как и в большинстве вводных курсов, мы пока неявно предположили, что требуемая величина Q существует как число и что проблема состоит в том, чтобы правильно вычислить это число при помощи интеграла. Эта точка зрения подходит даже для достаточно продвинутых приложений анализа, когда величина определяется физическими законами и элементарными рассуждениями и имеется необходимость проверить правильность значения, полученного при помощи некоторого интеграла. Теорема 2 дает общий метод подтверждения правильности таких вычислений. Хотя при более формальном подходе рассматриваемые величины сначала должны быть строго определены, такое определение обычно сопровождается каким-то обоснованием. В литературе можно найти рассуждения, использующие аппроксимирующие части Q_i еще не определенной величины Q. Однако в примере о площади, обсуждавшемся выше, смысл любой части величины Q не более ясен, чем смысл этой величины в целом. Простая модификация метода Дюамеля, приведенная ниже в Теореме 2, имеет дело не с отдельными кусочками Q_i величины Q, а с интервалами J_i, в которых эти числа, если они существуют, могут быть найдены.

Независимо от того, формальный или неформальный подход к составлению интеграла применяется, ошибки могут случаться и случаются. Поскольку никто не знает, что именно придётся применять студентам после обучения, они должно быть готовы к совершенно новым приложениям. Поэтому представляется странным, что проверка правильности выбора подынтегрального выражения не включается в учебники по математическому анализу. Вместо этого учебники изобилуют методами численного вычисления интегралов и оценок точности этих вычислений. И это в то время, когда имеется множество компьютерных программ не только для численного, но и для формульного вычисления интегралов. А вот что компьютерные программы не могут сделать — это ответить на вопрос пользователя, является ли полученный ответ правильным для исходной задачи. Поскольку в настоящее время необходимость в вычислении интегралов вручную практически отпала, умение оценивать ошибки при составлении подынтегрального выражения должно занять более важное место при подготовке будущих специалистов.

2. Принцип Дюамеля и равномерная непрерывность

В определении сумм Римана непрерывной функции f на интервале $[a, b]$ мы следуем Кислеру [3]. Каждое $\Delta x > 0$ отвечает единственному разбиению $[a, b]$ на n подынтервалов, где n — такое первое целое число, что $a + n\Delta x \geq b$. Концевые точки интервалов разбиения задаются формулами $x_i = a + i\Delta x$ для $0 \leq i \leq n-1$, и $x_n = b$. Мы используем Δx_i для обозначения длины i-го подынтервала разбиения; разумеется, $\Delta x_i = \Delta x$ за исключением последнего подынтервала, который может быть короче Δx. Вычисляемая всегда «слева» сумма Римана имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i$, а интеграл есть её предел при $\Delta x \to$ $\to 0$. Здесь нет необходимости вводить понятие предела, отличное от того, которое используется при дифференцировании. Кислер отмечает, что если

$a < c < b$ то, используя значения Δx, которые делят $[a, c]$ на равные части, можно показать, что интеграл по $[a, b]$ равен сумме интегралов по $[a, c]$ и $[c, b]$.

Мы хотим использовать следующий результат, эквивалентный теореме о равномерной непрерывности функции f, непрерывной на замкнутом ограниченном интервале. Читатель легко может доказать эту эквивалентность, а преподаватели могут доказать этот результат начинающим студентам сам по себе для случая функции f с ограниченной производной.

Теорема 1 (теорема о максимальных приращениях). *Пусть f — непрерывная функция на $[a, b]$. Для заданного значения $\Delta x > 0$ и соответствующего ему разбиения интервала $[a, b]$ обозначим через M_i и m_i максимальное и минимальное значения функции f на i-м интервале $[x_{i-1}, x_i]$. Пусть $E_f(\Delta x) := \max\limits_{1 \le i \le n} (M_i - m_i)$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} E_f(\Delta x) = 0$.*

Применяя этот результат, легко показать, что интеграл от непрерывной функции на ограниченном замкнутом отрезке существует и имеет обычные свойства. Использование отображения $f \mapsto E_f$, определенного для любой непрерывной функции f, является необходимым для нашего подхода. Мы также применяем эти функции для формулировки и приложений следующей простой формы принципа Дюамеля.

Теорема 2 (принцип суммарной ошибки). *Пусть f — непрерывная функция на интервале $[a, b]$. Величина Q равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если существует функция E, зависящая от Δx, которая обладает следующими свойствами: для каждого положительного Δx и соответствующего ему разбиения интервала $[a, b]$ число Q может быть записано в виде суммы $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i$ так, что*

$$|Q_i - f(x_{i-1})\Delta x_i| \le E(\Delta x)\Delta x_i$$

для каждого i между 1 и n, и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} E(\Delta x) = 0$.

Доказательство. Величина Q является пределом при $\Delta x \to 0$ соответствующих римановых сумм, поскольку для любого заданного Δx

$$\left| Q - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |Q_i - f(x_{i-1})\Delta x_i| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} E(\Delta x)\Delta x_i = E(\Delta x)(b-a). \ \square$$

Каждому, кто знаком с исторической литературой, должно быть очевидно, что приведенная выше формулировка принципа Дюамеля больше подходит для начинающих, чем оригинальная формулировка Дюамеля 1856 года [2], или усовершенствованная Осгудом формулировка 1903 года [4], или любая более поздняя формулировка, использующая o-обозначение Ландау.

Формулировка Теоремы 2 не вполне удовлетворяет современным требованиям, предъявляемым к математической строгости, находясь, впрочем, в полном соответствии с требованиями 19-го века. Дело в том, что эта формулировка включает интуитивно ясное, но не определенное строго понятие величины. Такие определения существуют для некоторых математических величин, например, для длины спрямляемой кривой или для площади квадрируемой области. Однако даже для случая площади между графиками двух гладких функций на отрезке $[a, b]$ обоснование корректности вычисления этой площади при помощи интеграла Римана выходит за рамки курса анализа для начинающих студентов.

Для вычисляемых при помощи интеграла Римана физических величин (таких, например, как работа или давление) математически строгое определение вообще отсутствует. Мы знаем, как правило, лишь значение этих величин в некоторых частных случаях (например, работу постоянной силы на отрезке прямой) и имеем интуитивное представление о некоторых свойствах этих величин, таких, как аддитивность или непрерывность.

Можно избежать понятия общего количества Q. Хотя это может не подойти для начинающих, мы можем модифицировать принцип Дюамеля, следуя Осгуду [4] и Тейлору [5] так, что существование полной величины Q не предполагается, а делается акцент на интервалы, в которых её части могут быть найдены. Цель модификации состоит в исключении любого предположения о заданном изначально вещественно-значном отображении $i \mapsto Q_i$ для каждого разбиения $[a, b]$. Это приводит к следующей модификации принципа Дюамеля, которая и может быть использована для обоснования определения физических величин при помощи интеграла Римана.

Теорема 3. *Пусть f — непрерывная функция на интервале $[a, b]$, а E — неотрицательная функция переменной Δx такая, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} E(\Delta x) = 0$. Сопоставим каждому $\Delta x > 0$ и каждому интервалу $[x_{i-1}, x_i]$ соответствующего ему разбиения интервал $J_i(\Delta x)$, содержащий $f(x_{i-1})\Delta x_i$ и имеющий длину, не превосходящую $E(\Delta x)\Delta x$. Тогда для любого выбора точек $q_i \in J_i(\Delta x)$, $1 \le i \le n$, положив $Q(\Delta x) := \sum q_i$, имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} Q(\Delta x) = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.*

Доказательство. Пусть $S(\Delta x) := \left| \sum\limits_{i=1}^n f(x_{i-1})\, \Delta x_i - \int\limits_a^b f(x)\, dx \right|$. Тогда если $\Delta x \le 1$, то

$$\left| Q(\Delta x) - \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \sum_{i=1}^n |q_i - f(x_{i-1})\Delta x_i| + S(\Delta x) \le$$
$$\le E(\Delta x)(b + 1 - a) + S(\Delta x) \to 0. \quad \square$$

Одним из следствий Теоремы 2 является результат Г. А. Блисса [1] 1914 года для проверки корректности интегралов в таких приложениях, где подынтегральное выражение представимо в виде произведения двух непрерывных функций g и h. Именно, требуется, чтобы для i-й части I_i разбиения интервала $[a, b]$, порождённого $\Delta x > 0$, и для соответствующей части Q_i искомой величины Q существовала точка (s_i, t_i) в $I_i \times I_i$ такая, что $Q_i = g(s_i)h(t_i)\Delta x_i$. В качестве альтернативы можно использовать Теорему 3, чтобы показать, что для любого выбора точки (s_i, t_i) в $I_i \times I_i$ имеет место равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\sum\limits_{i=1}^{n} g(s_i)h(t_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b g(x)h(x)\,dx$. В обоих доказательствах $E(\Delta x) = E_h(\Delta x)\max\limits_{[a,b]}|g| + E_g(\Delta x)\max\limits_{[a,b]}|h|$.

Основная теорема дифференциального и интегрального исчисления также является следствием принципа суммарной ошибки: для заданной первообразной $Y = F(x)$ непрерывной функции f на $[a,b]$ и положительного Δx в каждом подынтервале $[x_{i-1}, x_i]$ существует точка c_i такая, что $\Delta Y_i := F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i$; искомая величина есть $F(b) - F(a) = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta Y_i$, и для каждого i абсолютная величина ошибки есть $|f(c_i) - f(x_{i-1})|\,\Delta x_i \le E_f(\Delta x)\Delta x_i$. (Это неравенство показывает также, что римановы суммы не обязательно вычислять в левых концах интервалов разбиения.) Заметим, что риманова сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$ является суммой дифференциалов $\sum\limits_{i=1}^{n} dY_i$. Когда Δx стремится к 0, разность между суммой $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta Y_i$ настоящих приращений функции Y и суммой $\sum\limits_{i=1}^{n} dY_i$ их аппроксимаций вдоль касательных стремится к нулю. Это помогает объяснить интегральные обозначения.

3. Примеры

В заключение приведем два примера, показывающих, что при применении интеграла Римана имеются элементарные задачи, в которых верхние и нижние суммы не могут быть напрямую применены для обоснования выбора подынтегрального выражения.

Пример 1. Пусть g и h — непрерывные функции и $g(x) \ge h(x)$ для всех x в $[a,b]$. Используя, если необходимо, параллельный сдвиг графиков вдоль оси ординат и вычитание площадей, можно показать, что площадь, заключенная между графиками функций g и h, вычисляется при помощи интеграла $\int\limits_a^b \big(g(x) - h(x)\big)\,dx$. Невозможно доказать корректность выбора подынтегрального выражения без таких преобразований, т. е. только с помощью верхних и нижних интегральных сумм; простой пример рассмотрен во введении. С другой стороны, для решения этой задачи можно непосредственно применить наши более общие методы. Пусть $\overline{y}_i$ и $\overline{z}_i$ — наибольшие значения функций $y = g(x)$ и $z = h(x)$ на интервале $[x_{i-1}, x_i]$, а $\underline{y}_i$ и $\underline{z}_i$ — их наименьшие значения. Поставим в соответствие интервалу разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ интервал $J_i(\Delta x) = \Big[\big(\underline{y}_i - \overline{z}_i\big)\Delta x_i,\ \big(\overline{y}_i - \underline{z}_i\big)\Delta x_i\Big]$. Этот интервал содержит как i-й член суммы Римана, так и соответствующую часть площади в предположении, что последняя существует. Теперь можно применить Теорему 2 или Теорему 3, поскольку длина $J_i(\Delta x)$ не превосходит $[E_g(\Delta x) + E_h(\Delta x)]\Delta x_i$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[E_g(\Delta x) + E_h(\Delta x)] = 0$.

Пример 2. Рассмотрим в стене бассейна окно высоты 1, вершина которого находится на поверхности воды. Окно симметрично относительно вертикальной оси и имеет на глубине x ширину $\sin \pi x$. Обозначим w плотность воды. Мы хотим показать, что сила F действия воды на окно задаётся интегралом $\int\limits_0^1 wx \sin \pi x \, dx$. Верхние и нижние суммы годятся для обоснования этого интеграла для верхней половины окна, но не подходят для обоснования этого интеграла для нижней половины, поскольку там при увеличении глубины давление увеличивается, а длина горизонтальных полос уменьшается. Для этой части задачи можно использовать теорему Блисса. Мы, однако, воспользуемся непосредственно Теоремой 2, учитывая тот факт, что сила существует как физическая величина и является аддитивной. При интегрировании на интервале $[1/2, 1]$ для каждого $\Delta x > 0$ и каждого подынтервала $[x_{i-1}, x_i]$ границы соответствующей силы F_i определяются из соотношений

$$wx_{i-1} \sin \pi x_i \Delta x_i \leq F_i \leq wx_i \sin \pi x_{i-1} \Delta x_i.$$

При этом i-й член суммы Римана также находится между этими границами. (Границы для силы можно обосновать, используя либо давление, либо работу силы тяжести по переносу воды от повехности вниз через часть окна между x_{i-1} и x_i на расстояние Δx.) Правильность написанного выше интеграла теперь следует из принципа суммарной ошибки: действительно, для функции $E(\Delta x) = w\Delta x + wE_{\sin \pi x}(\Delta x)$ при любом i разность между границами равна Δx_i, умноженному на

$$w \left(x_i \sin \pi x_{i-1} - x_{i-1} \sin \pi x_{i-1} + x_{i-1} \sin \pi x_{i-1} - x_{i-1} \sin \pi x_i \right) \leq E(\Delta x).$$

Для этой задачи, как на самом деле для большинства задач, встречающихся в курсе анализа, можно найти специальные приемы проверки правильности выбора интеграла для нужного приложения. Однако студентам следует дать общий подход, который они смогут запомнить и применять в будущей работе. Таким общим подходом является проверка порядка ошибки, описанная в Теоремах 2 и 3. С увеличением возможностей компьютеров как для численного, так и для символьного интегрирования проверка правильности сведения задачи к вычислению интеграла должна играть основную роль в программах по дифференциальному и интегральному исчислению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bliss G. A. A substitute for Duhamel's Theorem // Annals of Math. 1914–15. V. 16. P. 45–49.
2. Duhamel J. M. C. Eléments de Calcul Infinitésimal. — Paris, 1856.
3. Keisler H. J. Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach. Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1986.
4. Osgood W. F. The integral as the limit of a sum, and a theorem of Duhamel's // Annals of Math. 1903. V. 4. P. 161–178.
5. Taylor A. E. Advanced Calculus. Ginn & Company, Boston, 1955; third edition coauthored with W. Robert Mann, John Wiley and Sons, New York, 1983.

Поступила 04.06.2012