В ПЕРЕРЫВЕ МЕЖДУ ЛЕКЦИЯМИ

УДК 519.4 + 539.1 + 544.11

ПИФАГОРЕЙСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМАМ ПЕРИОДИЧНОСТИ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ

Д. Л. Вейзе

ЦНИИС и ЧЛХ
119991, г. Москва, ул. Тимура Фрунзе, 16;
e-mail: dweise@gol.ru

Пифагорейский подход к числовым последовательностям в химии и ядерной физике позволил предложить геометрические аналогии, основанные на фигурных числах (трехмерные формы периодического закона Менделеева и упаковочные модели ядер атомов). Для вывода формул использованы треугольник Паскаля и метод конечных разностей. Формулы позволяют экстраполировать атомные и ядерные магические числа до бесконечности.

Ключевые слова: фигурные числа, треугольник Паскаля, гномон, периодический закон элементов, магические числа, упаковочная модель.

Фигурные числа и треугольник Паскаля

В школе Пифагора (Древня Греция, V век до н. э.) особую роль играло представление натуральных чисел в виде тех или иных правильных фигур, выложенных камешками. Такие числа получили название фигурных чисел. Таким образом, арифметика пифагорейцев была тесно связана с геометрией: они выделяли классы чисел, имеющих одну и ту же форму, а именно: треугольные, квадратные, пятиугольные и так далее.

Учение пифагорейцев предшествовало идеям атомизма Левкиппа и Демокрита: тела — это комбинации атомов; разнообразие тел обусловлено как различием слагающих их атомов, так и различием порядка сборки. На основании этого фигурные числа пифагорейцев можно рассматривать как аналог структурных формул современной химии.

Треугольник Паскаля (табл. 1) — это треугольная таблица из чисел, построенная так, что каждое число внутри таблицы является суммой двух чисел, непосредственно вышестоящих в предыдущем ряду, а на концах каждого ряда стоят единицы. Этот треугольник, хотя и назван в честь выдающегося французского учёного Блеза Паскаля (1623–1662), написавшего в 1654 г. «Трактат об арифметическом треугольнике» (издан в 1665 году), появляется уже в десятом столетии в индийских математических трудах и, вероятно, имеет еще более почтенный возраст[1].

[1] Различные исторические и математические подробности можно найти в [1].

Таблица 1. Треугольник Паскаля

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
…	…	…		…		…		…		…		…	…	…		

Число в треугольнике Паскаля, стоящее на k-м месте в n-й строке (строки и места в них нумеруются начиная с нуля), обозначается символом C_n^k или $\binom{n}{k}$ и вычисляется по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Гномон

Греческое слово *гномон* имеет несколько определений. Гномоном называют тенеобразующую деталь солнечных часов. Этот древнейший астрономический инструмент был известен в древнем Китае (в XI в. до н. э.), Египте и Греции. Кроме этого, гномон — угольник плотника в Древней Греции.

Нас интересует определение термина гномон, данное Героном Александрийским (I-й век н. э.): «Гномон — это фигура, которая, будучи добавлена к какой-либо другой фигуре, образует новую фигуру, подобную исходной». Очевидно, источником понимания гномона в смысле Герона было внешнее сходство астрономического инструмента с фигурой L-образной формы, добавляемой к квадрату для получения другого квадрата со стороной, на единицу большей стороны исходного квадрата [2, с. 23–24; 3].

Вторая и третья строки рис. 1 выпадают из ряда — там гномон образован двумя единичными квадратами, расположенными «унипозиционно», соприкасающимися углом, а не стороной. Не знаю, допускал ли такое Герон, но указаний на запрет несвязности я не нашел. То, что не запрещено, то разрешено.

В четвёртой строке рис. 1 изображены *квадратные числа*, составленные из L-образных гномонов квадрата — нечётных чисел. Греки с помощью этого геометрического образа доказывали, что сумма n первых нечетных чисел равна n^2.

Согласно [4, 5] древнегреческое γνώμων (gnömön, «указатель») восходит к γιγνώσκω (gignöskö, «я знаю») и γνώσις (gnösis, «знание»).

Единицы (гномоны линейного ряда шаров) стоят в первом столбце и в первой строке треугольника Паскаля. Их можно задать «порождающей формулой» $1 = n^0$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — порядковый номер гномона.

Натуральные числа (гномоны треугольных чисел) расположены во второй строке и втором столбце треугольника Паскаля. Они представлены в форме линейного ряда шаров (рис. 2) и описываются формулой $N = n^1$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Заметим, что при переходе от гномона (в данном случае —

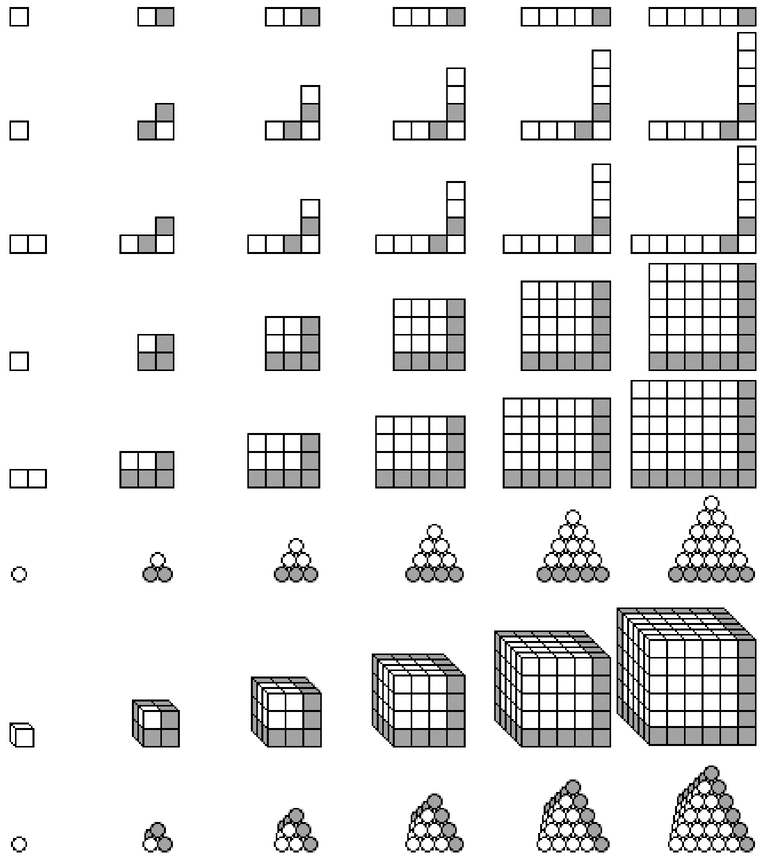
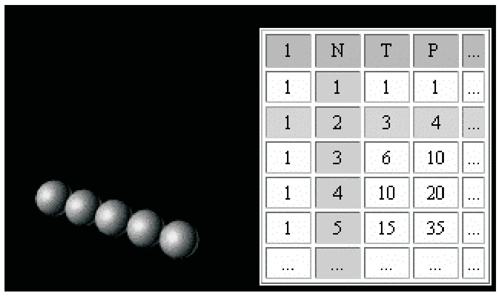


Рис. 1. Некоторые фигурные числа (белый цвет) и их гномоны (серый цвет). Сверху вниз: натуральные, нечетные, четные, квадратные, продолговатые, треугольные, кубические, тетраэдральные

одного шара) к дополняемой им фигуре (в данном случае — к ряду шаров) степень правой части формулы возрастает на единицу.



1	N	T	P	...
1	1	1	1	...
1	2	3	4	...
1	3	6	10	...
1	4	10	20	...
1	5	15	35	...
...	...	...	...	...

Рис. 2. Для удобства треугольник повернут на 45 градусов против часовой стрелки. N — натуральные числа, T — треугольные числа, P — пирамидальные числа

Треугольные числа (гномоны пирамидальных чисел) появляются в третьей строке и третьем столбце треугольника Паскаля (рис. 3) и описываются формулой 2-й степени:

$$T_n = (n^2 + n)/2, \quad \text{где} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Пирамидальные числа (рис. 4) появляются в четвертой строке и четвертом столбце таблицы и описываются формулой 3-й степени:

$$P_n = (n^3 + 3n^2 + 2n)/6, \quad \text{где} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

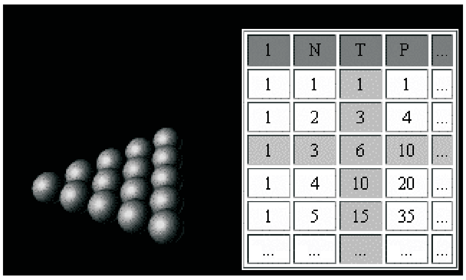


Рис. 3

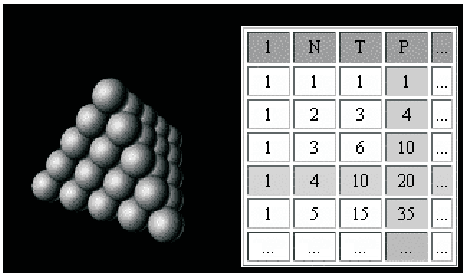


Рис. 4

В рассмотренных случаях прослеживается закономерность — гномоном для числа из n-й строчки является соседнее сверху число из $(n-1)$-й строчки. Аналогично, гномоном для числа из n-го столбца является соседнее слева число из $(n-1)$-го столбца.

Числа Фибоначчи

В последовательности *чисел Фибоначчи* $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих.

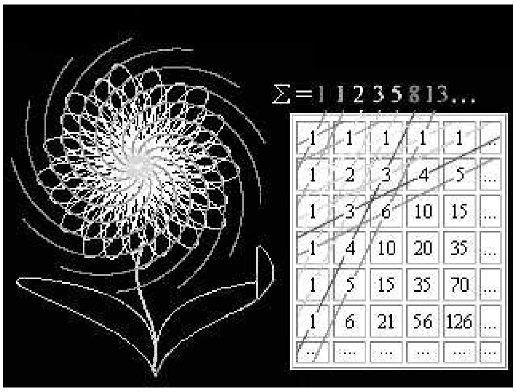


Рис. 5. Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи появляются в треугольнике Паскаля как суммы чисел, расположенных на наклонных линиях, показанных на рис. 5. Числа Фибоначчи присутствуют также в паттернах растений (см. [6, 7]). Таким образом, треугольник Паскаля можно рассматривать как познавательный мостик, перекинутый между живой природой и микромиром. Познавательный = когнитивный. В слове *когнитивный* слышно и *гномон*, и *гнозис*, и *to know*.

Периодичность свойств атомов. Атомные магические числа

Ниже приводится расширенная до гипотетического элемента с номером 168 периодическая таблица элементов (табл. 2). Теоретически она бесконечная. Существование элементов выше 118 в настоящее время не доказано.

Таблица 2. Расширенная двумерная периодическая таблица (Теодор Сиборг, 1969)

	IA																	0
1	1 H	IIA											IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIII			IB	IB	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	57 La	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	89 Ac	104 Rf	105 Ha	106 Sg	107 Ns	108 Hs	109 Mt	110 Uun	111 Uuu	112 Uub	113 Uut	114 Uuq	115 Uup	116 Uuh	117 Uus	118 Uuo
8	119 Uue	120 Ubn	121 Ubu	154 Upq	155 Upp	156 Uph	157 Ups	158 Upo	159 Upe	160 Uhn	161 Uhu	162 Uhb	163 Uht	164 Uhq	165 Uhp	166 Uhh	167 Uhs	168 Uho
			6	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu	
			7	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr	
			8	122 Ubb	123 Ubt	124 Ubq	125 Ubp	126 Ubh	127 Ubs	128 Ubo	129 Ube	130 Utn	131 Utu	132 Utb	133 Utt	134 Utq	153 Upt	
8	135 Utp	136 Uth	137 Uts	138 Uto	139 Ute	140 Uqn	141 Uqu	142 Uqb	143 Uqt	144 Uqq	145 Uqp	146 Uqh	147 Uqs	148 Uqo	149 Uqe	150 Upn	151 Upu	152 Upb

Напомню, что *электронная оболочка* атома — это область в пространстве вокруг ядра атома для вероятного местонахождения электронов, характеризующихся одинаковым значением *главного квантового числа* n и, как следствие, располагающихся на близких энергетических уровнях. Каждая электронная оболочка может иметь определенное максимальное число электронов. Согласно атомной оболочечной модели оболочка заполняется электронами по известным правилам в порядке увеличения их энергии до тех пор, пока они не заполнят все вакантные места.

Главное (*радиальное*) *квантовое число* — целое число, обозначающее номер энергетического уровня. Оно характеризует энергию электронов, занимающих данный уровень, и является первым в ряду квантовых чисел, который включает в себя главное, орбитальное и магнитное квантовые числа, а также спин. Эти четыре квантовых числа определяют уникальное состояние электрона в атоме (его волновую функцию). При увеличении главного квантового числа возрастают радиус орбиты и энергия электрона. Главное квантовое число равно номеру периода элемента.

Порядок заполнения электронами орбиталей в пределах одного подуровня (орбиталей с одинаковыми значениями главного квантового числа n и орбитального квантового числа l) определяется *правилом Хунда*, согласно которому электроны предпочитают расселяться на одинаковых по энергии орбиталях сначала поодиночке, и лишь когда на каждой такой орбитали уже есть по одному электрону, начинается заполнение этих орбиталей вторыми электронами. Два электрона, заселяющие одну орбиталь, называются *спаренными*.

Электронные оболочки обозначаются буквами K, L, M, N, O, P, Q или цифрами от 1 до 7 в порядке появления и заполнения оболочек по мере увеличения заряда ядра атома.

Наибольшее число электронов на энергетическом уровне (оболочке) равно $2n^2$ (множитель 2 отвечает учёту спина электрона). Обратим внимание, что произнося «два эн квадрат», мы пользуемся пифагорейской «фигурной» терминологией, дошедшей до нас из глубины двух с половиной тысяч лет.

Каждая оболочка состоит из одного или нескольких подуровней, обозначаемых буквами s, p, d, f, g, h, i или цифрами от 0 до 6. К примеру, первая оболочка (K) состоит из одного подуровня «1s». Вторая оболочка (L) состоит из двух подуровней, «2s» и «2p». Третья оболочка (M) — из «3s», «3p» и «3d», каждый из которых состоит из *атомных орбиталей*. На каждой орбитали может находиться не более двух электронов.

В следующей таблице показано распределение электронов по уровням и подуровням.

Таблица 3

	s	**p**	**d**	**f**	**g**	Итого
K	2					2
L	2	6				8
M	2	6	10			18
N	2	6	10	14		32
O	2	6	10	14	18	50

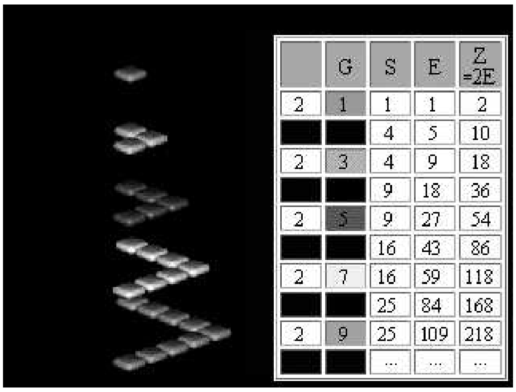
В строчках таблицы вписаны удвоенные нечетные числа, а в итоговом столбце — суммы чисел строки, которые равны удвоенным квадратам номера строки. Из строки 4 рис. 1 видно, что гномоны квадрата выражаются нечетными числами. Следовательно, подуровни s, p, d, f, g, … оболочек с пифагорейских позиций можно рассматривать как гномоны оболочек K, L, M, N, O, …

Составим таблицу, первые четыре столбца которой назовём модификацией “A” треугольника Паскаля (рис. 6). Именно, в первый столбец вместо традиционных единиц впишем двойки. Во втором столбце (G) запишем нечётные числа, получаемые по основному правилу построения таблицы: число в ячейке — результат суммирования чисел, записанных в соседних сверху и слева ячейках.

В третьем столбце (S) стоят числа, полученные в результате трёх последовательных манипуляций:

а) заполнение 3-го столбца по основному правилу построения таблицы;

б) вставка после каждой строки таблицы новой строки;



	G	S	E	Z =2E
2	1	1	1	2
		4	5	10
2	3	4	9	18
		9	18	36
2	5	9	27	54
		16	43	86
2	7	16	59	118
		25	84	168
2	9	25	109	218
		...	...	...

Рис. 6. Слева — гномоны квадрата, соответствующие столбцу G (gnomon) таблицы. S (square) — квадраты чисел натурального ряда, E (electron) — количество электронных орбиталей в атоме, Z — заряд атома инертного газа

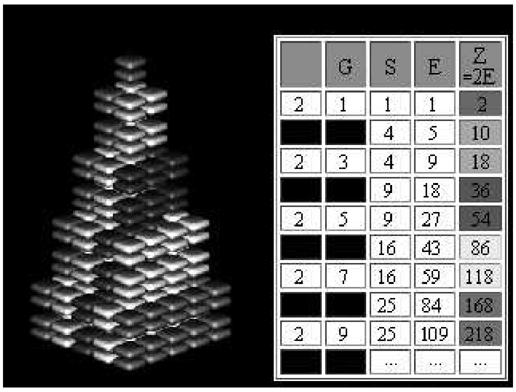
в) запись в каждую добавленную ячейку третьего столбца числа из следующей строки; при этом добавленные ячейки в первых двух столбцах оставляем незаполненными.

В четвёртом столбце (E) записываем числа, получаемые по основному правилу построения таблицы. В пятом столбце (Z) — числа, получаемые удвоением чисел, стоящих в соседних слева ячейках четвёртого столбца. На одной орбитали, как было отмечено, может находиться не более двух электронов. Следовательно, в ячейках пятого столбца указаны числа электронов в атомах, в которых все оболочки окончательно заполнены. Эти числа называются *атомными магическими числами*.

Элементы, в атомах которых все оболочки окончательно заполнены — это инертные газы, отличающиеся крайне низкой химической активностью.

Итак, в пятом столбце таблицы рис. 6 получаются атомные магические числа, среди которых 2, 10, 18, 36, 54, 86 и 118 — это числа электронов в до отказа заполненных электронных оболочках ядер инертных газов.

Ту же самую таблицу можно интерпретировать с помощью трёхмерной модели — см. рис. 7.



	G	S	E	Z =2E
2	1	1	1	2
		4	5	10
2	3	4	9	18
		9	18	36
2	5	9	27	54
		16	43	86
2	7	16	59	118
		25	84	168
2	9	25	109	218
		...	...	...

Рис. 7. Трехмерная модель для таблицы периодического закона Менделеева

Каждый химический элемент в этой пирамидальной конструкции обозначен блоком-кирпичиком, который является аналогом ячейки традиционной двумерной таблицы. Верхний блок-кирпичик — водород, под ним — гелий и т. д.

Один квадратный двухэтажный слой соответствует периоду таблицы Менделеева. Его номер, считая сверху, равен *главному квантовому числу* n.

Число $2n^2$ стандартных блоков в таком двойном слое соответствует количеству элементов в периоде и в то же время (как уже было сказано) — максимальному количеству электронов на энергетическом уровне.

Пара одноцветных блоков, расположенных один выше другого в каждом слое, соответствует *электронной орбитали*. Блоки верхнего этажа в каждом двойном слое соответствуют элементам, в которых на орбитали находятся неспаренные электроны (на орбитали данного подуровня находится не более одного электрона). Нижний этаж соответствует элементам, для которых существуют спаренные электроны (орбитали заполняются вторым электроном).

Элементы, химические свойства которых определены внешними электронными подоболочками s, p, d, f, g, группируются в L-образных модулях (гномонах квадрата) индивидуального цвета (эти цветовые обозначения позаимствованы у традиционной таблицы Менделеева): s — красный, p — зеленый, d — синий, f — желтый, g — сиреневый (на черно-белых иллюстрациях — оттенки серого).

Двухэтажные слои на рис. 7 разделены большими дистанциями. Первый такой слой содержит два стандартных блока-квадратика: первый, сверху — H (водород) и второй, снизу — He (гелий). Главное квантовое число $n = 1$.

Второй ($n = 2$) двухэтажный квадратный слой состоит из 8 блоков-квадратиков. Он отвечает химическим элементам, стоящим во 2-м периоде: 3 — Li, 4 — Be (s-элементы, красные блоки один над другим), 5 — B, 6 — C, 7 — N (p-элементы, зеленые блоки в верхнем гномоне квадрата), 8 — O, 9 — F, 10 — Ne (зеленые блоки в нижнем гномоне квадрата). Таким образом s[Li], p[B, C, N] — верхний квадрат, s[Be], p[O, F, Ne] — нижний квадрат во втором двухэтажном слое.

Третий ($n = 3$) двухэтажный квадратный слой (третий период) также состоит из 8 блоков-квадратиков и по взаиморасположению элементов (порядок нумерации и окраска) идентичен второму двухэтажному слою. То же самое будет повторяться далее: двухэтажный слой номер $2k + 1$ будет идентичен двухэтажному слою с номером $2k$. У самого верхнего, первого двухэтажного слоя, пары нет.

Четвертый ($n = 4$) двухэтажный квадратный слой состоит из 18 блоков:

s[K], p[Ga, Ge, As], d[Sc, Ti, V, Cr, Mn] — верхний этаж,

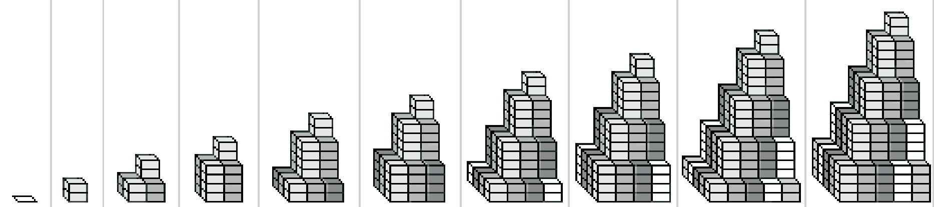
s[Ca], p[Se, Br, Kr], d[Fe, Co, Ni, Cu, Zn] — нижний этаж[2].

[2] Здесь химические элементы записаны не в порядке возрастания заряда атомного ядра, а в порядке геометрического заполнения квадрата гномонами. Объяснение этому несоответствию с периодической таблицей (см. табл. 2) состоит в том, что из энергетических соображений в 4-м и 5-м периодах после заполнения s-подуровня идет заполнение не p- , а d-подуровня. В 6-м и 7-м периодах после s-подуровня идет заполнение f-, потом d-, потом p-подуровня.

Любая модификация таблицы периодического закона обладает двойственностью. С одной стороны, это просто нумерованный список элементов, существующих в природе или гипотетических. С другой стороны, таблица отражает структурные особенности строения ядра и электронных оболочек атома элемента, что для краткости мы будем выражать словами «таблица в качестве модели атома». Так, переход в таблице на один номер вперед означает, с одной стороны, смену элемента списка (был, скажем, Na, стал Mg) — таблица в качестве списка, а с другой стороны, появление в атоме нового протона и электрона — таблица в качестве модели атома. Другой пример: количество элементов в одном периоде (таблица в качестве списка) равно количеству электронов на энергетическом уровне, обозначенном главным квантовым числом (таблица в качестве модели атома).

В этой связи отметим, что наша трехмерная таблица-модель (см. рис. 7, левая часть) обладает несколько большей информативностью и наглядностью в сравнении с двумерными аналогами (см. [8]). В частности, получила свое пространственно-графическое отражение электронная орбиталь. Как было отмечено выше, это комплекс двух одноцветных расположенных друг над другом блоков.

На рис. 8 показаны трёхмерные таблицы-модели, в каждой из которых один кирпичик в основании (последний из всех, с номером, указанным в нижней строке таблицы) отвечает инертному газу. С другой стороны, эти конструкции из кирпичиков можно рассматривать в качестве моделей молекул инертных газов, в которых каждая орбиталь представлена парой лежащих друг на друге кирпичиков одного двухэтажного слоя[3].



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
		He	Ne	Ar	Kr	Xe	Rn	Ol	Uho	Buo	
Zn	0	2	10	18	36	54	86	118	168	218	...

Рис. 8. Трехмерные таблицы-модели

Применяя пифагорейскую терминологию, можно сказать, что электронный подуровень оболочки — это гномон электронной оболочки атома, а электронная оболочка — гномон всей электронной конфигурации атома.

Аналитическое представление рядов элементов в периодах

Арифметические свойства *магических чисел* можно рассматривать с позиции теории *возвратных*, или *рекуррентных*, последовательностей.

[3] В отличие от рис. 7, на рис. 8 пробелы между двухэтажными слоями не показаны.

Формула $P_n = [(-1)^n(2n+3) + 2n^2 + 6n + 5]/4$ с правой частью степени 2, позволяющая вычислять число P_n элементов в n-м периоде, равное максимальному количеству электронов на одном энергетическом уровне, генерирует последовательность

$$2,\ 8,\ 8,\ 18,\ 18,\ 32,\ 32,\ 50,\ 50,\ 72,\ 72,\ 98,\ 98,\ldots$$

Эту же последовательность можно определить рекуррентно следующим возвратным уравнением 5-го порядка:

$$P_{n+5} = P_{n+4} + 2P_{n+3} - 2P_{n+2} - P_{n+1} + P_n, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Формула $Z_n = [(-1)^n(3n+6) + 2n^3 + 12n^2 + 25n - 6]/12$ с кубической правой частью даёт правило вычисления зарядов ядер атомов инертных газов и генерирует *атомные магические числа*:

- 2, 10, 18, 36, 54, 86, 118 — магические числа реальных элементов;
- 168, 218, 290, 362, 460, 558, 686, 814, ... — экстраполированные магические числа.

Когда были получены эти результаты, 118 элемент не был ещё синтезирован и занимал место в нижней строчке.

Соответствующее возвратное уравнение имеет порядок шесть:

$$Z_{n+6} = 2Z_{n+5} + Z_{n+4} - 4Z_{n+3} + Z_{n+2} + 2Z_{n+1} - Z_n, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Отметим, что порядок возвратного уравнения для последовательности фигурных чисел на единицу больше порядка возвратного уравнения для последовательности их гномонов.

Периодичность свойств ядер. Ядерные магические числа

В ядерной физике *теория оболочечного строения ядра* — модель, объясняющая структуру атомного ядра. Она аналогична теории оболочечного строения атома.

При последовательном увеличении количества нуклонов (протонов или нейтронов) в ядре периодически складывается ситуация, когда энергия связи следующего нуклона намного меньше, чем предыдущего.

Особой устойчивостью отличаются атомные ядра, содержащие 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 протонов или нейтронов. Эти числа, которые мы будем обозначать M_n (где n — порядковый номер числа) принято называть *ядерными магическими числами*.

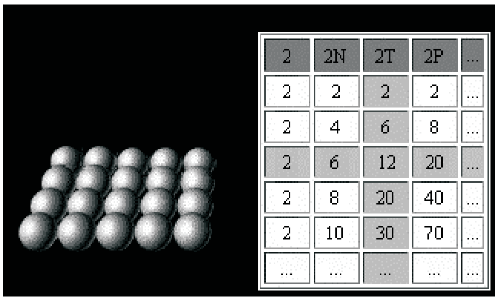


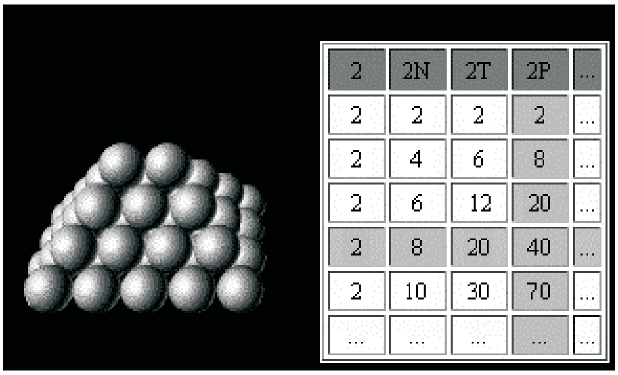
Рис. 9. Продолговатые плоские числа

В правой части рис. 9 показана таблица, которая получена удвоением всех чисел треугольника Паскаля. Будем называть её модификацией «B» треугольника Паскаля.

В продолговатом плоском числе Lf (obLong flat) одна сторона прямоугольника длиннее другой на 1. Продолговатые плоские числа определяются формулой 2-й степени

$$Lf_n = 2T_n = n^2 + n = n(n+1)$$

и являются гномонами для продолговатых пирамидальных чисел (рис. 10).



2	2N	2T	2P	...
2	2	2	2	...
2	4	6	8	...
2	6	12	20	...
2	8	20	40	...
2	10	30	70	...
...	...	...	...	...

Рис. 10. Продолговатые пирамидальные числа

Продолговатые пирамидальные числа Lp (obLong pyramid) задаются формулой степени 3: $Lp_n = 2P_n = (n^3 + 3n^2 + 2n)/3$.

Иногда одно и то же число n можно по-разному представить в виде фигурного числа или комбинации подобных или неподобных фигурных чисел, т. е. n шаров можно упаковать в разные геометрические фигуры или тела. Так, например, квадратное число может состоять из меньших квадратных чисел или соседних в ряду треугольных, продолговатое плоское число равно удвоенному треугольному числу, продолговатая пирамида (рис. 11) равновелика композиции из двух равных тетраэдров и т. д.

Числа шаров в последовательных фигурах, показанных на рис. 12, равны ядерным магическим числам M_n и получаются суммированием по определённым правилам пар чисел из ячеек модификации «В» треугольника Паскаля. Именно, в каждой таблице фон ячеек с суммируемыми числами затемнен, а пары слагаемых соединены отрезками. Для первых трех фигур, отвечающих магическим числам 2, 8 и 20, выделен также фон ячейки с суммой.

В самом первом случае происходит сложение $2 + 0 = 2$: отрезок, соединяющий слагаемые, не проведён, но его можно нарисовать, если продолжить таблицу влево и вверх и заполнить новые ячейки нулями.

Далее имеем $2 + 6 = 8$: первую пару тетраэдров (= продолговатую пирамиду) «сложили» со второй парой треугольников (= прямоугольником, гномоном продолговатой пирамиды) — получили вторую пару тетраэдров (= продолговатую пирамиду).

Для следующей фигуры $8 + 12 = 20$: вторую пару тетраэдров (= продолговатую пирамиду) сложили с третьей парой треугольников (= прямо-

Рис. 11. Продолговатые пирамиды в древней архитектуре

угольником, гномоном продолговатой пирамиды) — получили третью пару тетраэдров (= продолговатую пирамиду).

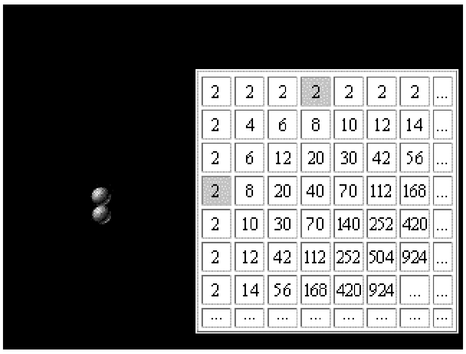
На этом серия отрезков с наклоном 45° кончается, поскольку меняется форма фигур. Далее идет серия отрезков с бо́льшим сдвигом ячеек в строчках и столбцах:

$$8+20=20+8=28; \quad 10+40=30+20=50; \quad 12+70=42+40=82;$$
$$14+112=56+70=126.$$

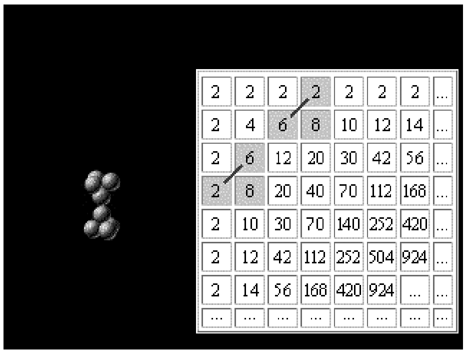
Ядра атомов с начальными значениями 2, 8, и 20 ядерных магических чисел по своим физическим свойствам несколько отличаются от ядер с бо́льшими числами 28, 50, 82 и 126. Обсуждение глубинных причин этого феномена не входит в задачу этой заметки. Отметим, что фигуры этих чисел и аналитические формулы также отличаются. Фигуры для 2, 8 и 20 — удвоенные тетраэдры (или продолговатые пирамиды). Фигуры для 28, 50, 82 и 126 — также удвоенные тетраэдры или продолговатые пирамиды, но с удаленными предпоследними по величине слоями.

Представление чисел 28, 50, 82, 126, ... суммами разных пар слагаемых, взятых из таблицы, отвечает возможности построения ряда других фигур — именно, составленных из тетраэдра и линейного ряда шаров — гномона треугольника[4]. Фигурные представления этих чисел можно получить, если убрать зазор между треугольником и пирамидой. Рассмотрим, например, для $M_5 = 50$ половину фигуры, состоящую из 25 шаров: 10 шаров в пирамиде с

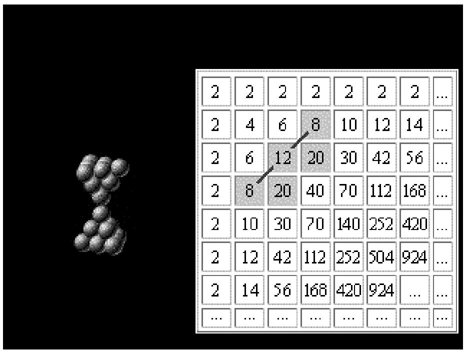
[4] Для $28 = 8 + 20 = 20 + 8$ имеем удвоение пирамиды из 4 шаров и треугольника из 10 шаров или пирамиды из 10 шаров и линейного ряда из 4 шаров, т. е. при смене порядка слагаемых меняются фигуры.



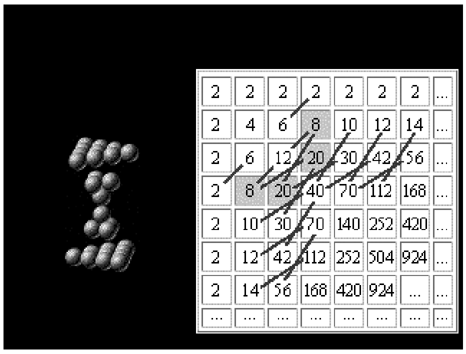
$M_1 = 2$



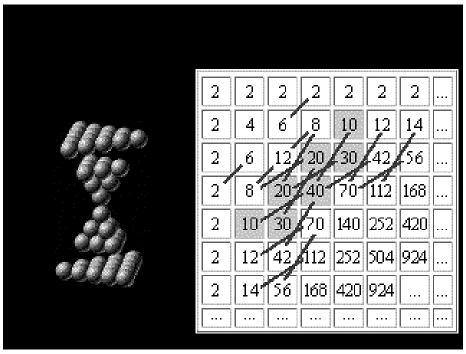
$M_2 = 8$



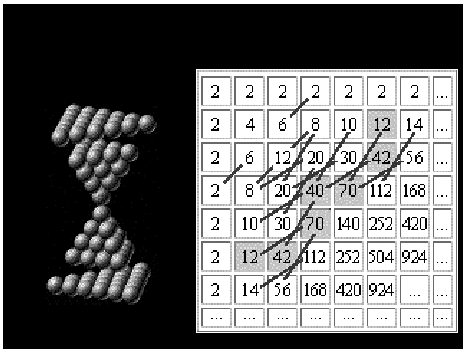
$M_3 = 20$



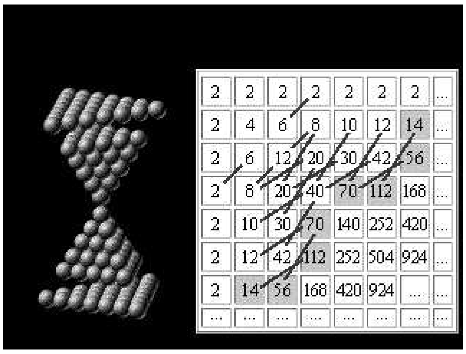
$M_4 = 28$



$M_5 = 50$



$M_6 = 82$



$M_7 = 126$

Рис. 12. Фигурные магические числа и модификация «В» треугольника Паскаля ребром 3 и 15 шаров в треугольнике со стороной 5. Опустим пирамиду на треугольник вдоль какого-нибудь ребра пирамиды — получится новая пирамида с ребром в 4 шара и ещё один ряд из 5 шаров (одна сторона треугольника) за пределами новой пирамиды. 20 шаров новой пирамиды плюс 5 шаров линейного ряда дают в сумме всё те же 25 шаров.

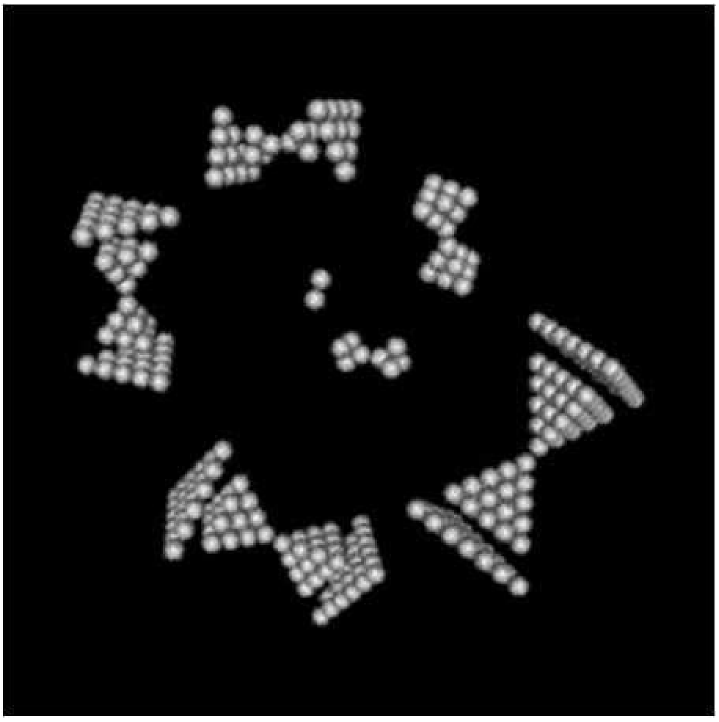


Рис. 13. Спираль фигурных образов ядерных магических чисел 2, 8, 20, 28, 50, 82 и 126

Имеется формула 3-й степени с параметром, дающая значение всех ядерных магических чисел: $M_n = k(n^2 - n) + (n^3 + 5n)/3$, где $k = 1$ при $n = 1, 2, 3$ и $k = 0$ в противном случае. Эта формула даёт:

$*$ 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 — магические числа реально существующих ядер (спираль из моделей показана на рис. 13);

$*$ 184, 258, 350, 462, 596, 754, 938, 1150, $\ldots$ — экстраполированные магические числа.

Применяя пифагорейскую терминологию, можно сказать, что ядерная оболочка — гномон всей конфигурации ядра.

Пошаговое добавление шаров к фигуре (аналогия заполнения ядерной оболочки нуклонами) периодически приводит к завершенной подобной фигуре большего размера. Разность количества шаров между этими фигурами мы расцениваем как *гномон*. Таким же образом разница количества нуклонов между соседними в числовом ряду устойчивыми ядрами составляет оболочку.

Магические числа в кластерах

Пифагорейский подход в современной науке не ограничивается приведенными примерами. Так, он может быть использован для изучения магических чисел при анализе свойств стабильности групп, сформированных инертными газами или атомами щелочных металлов.

Применим пифагорейский подход к последовательности магических чисел 7, 29, 66, 118 и 185, которая возникает при некоторых условиях в кластерах инертного газа.

Как известно, иногда формулу, задающую целочисленную последовательность, можно найти с помощью *метода конечных разностей*. При этом в закономерностях построения таблицы конечных разностей можно легко усмотреть правила построения треугольника Паскаля. Пользуясь пифагорейскими терминами, можно высказать следующее утверждение:

Если метод конечных разностей применим, то каждую разность можно рассматривать как гномон для значения в ячейке последующего столбца.

Таблица 4. Конечные разности магических чисел кластеров инертного газа

Вторая разность	Первая разность	**Магические числа кластеров инертного газа**
	7	**7**
15	22	**29**
15	37	**66**
15	52	**118**
15	67	**185**
...	...	...

Мы привели эту таблицу в таком виде (элементы последовательности записаны справа, а номер разности возрастает влево), чтобы читатель мог сравнить её с треугольником Паскаля и увидеть сходство в их построении. Для n-го магического числа кластеров C_n получается выражение $C_n = (15n^2 - n)/2$.

С точки зрения геометрии магическим числам кластеров инертного газа соответствует объемно-центрированная кубическая решетка [9]. Она строится на основе додекаэдра. Обратим внимание, что в правой части формулы для C_n стоит многочлен степени 2 (размерность площади). Это значит, искомую структуру можно представить в виде поверхности, плёнки, покрывала, скорлупы, оболочки и т. д., в отличие от монолитного трехмерного объекта.

Ассоциации

1. Соответствие между строением электронных оболочек атомов химических элементов и композицией стихотворения «Дом, который построил Джек»:

Оболочка	Подоболочка	Дом, который построил Джек
K	s	Вот дом, Который построил Джек.
L	p	А это пшеница, Которая в тёмном чулане хранится
	s	В доме, Который построил Джек.
M	d	А это весёлая птица-синица, Которая часто ворует
	p	пшеницу, Которая в тёмном чулане хранится
	s	В доме, Который построил Джек.
N	f	Вот кот, Который пугает и ловит
	d	синицу, Которая часто ворует
	p	пшеницу, Которая в тёмном чулане хранится
	s	В доме, Который построил Джек.
O	g	Вот пёс без хвоста, Который за шиворот треплет
	f	кота, Который пугает и ловит
	d	синицу, Которая часто ворует
	p	пшеницу, Которая в тёмном чулане хранится
	s	В доме, Который построил Джек.

Такой композиционный прием — повторение с прибавлением суть спираль — часто встречается в отечественных и зарубежных песнях и сказках. Вспомним «Колобок», «Лисичка со скалочкой», «Теремок» и др.

2. Пирамидальная структура придает композиции ощущение устойчивости (см. рис. 14).

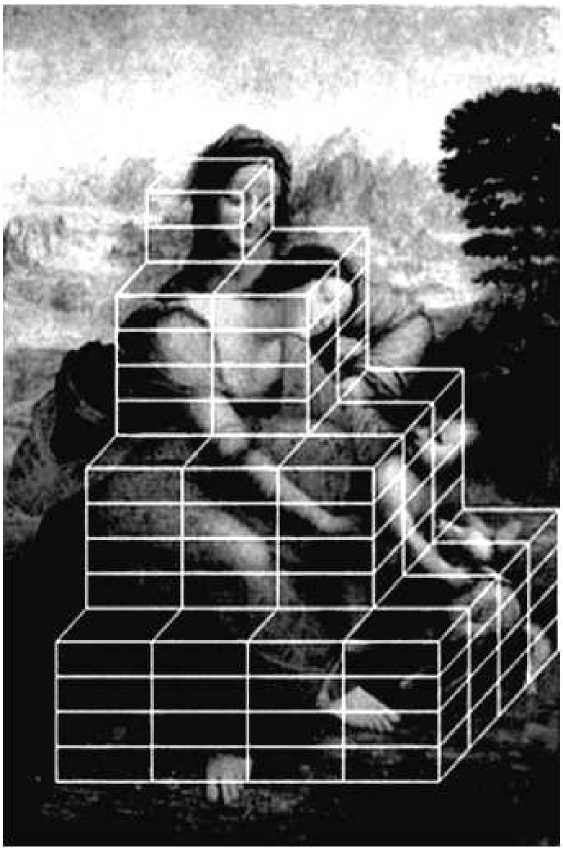


Рис. 14. Леонардо да Винчи.
«Святая Анна с Мадонной и младенцем Христом», 1510 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. — М.: Наука, 1979. 50 с.
2. Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов. — Москва – Ижевк: Институт компьютерных исследований, 2002. 273 с.
3. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов. Фигурные числа пифагорейцев. http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/3f694401-bf99-389d-eb5e-839722ce94fe/00155481978574512.htm
4. http://en.wiktionary.org/wiki/gnomon
5. http://www.etymonline.com/index.php?term=gnomon
6. Weise D. Principle of Minimax and Rising Phyllotaxis (Mechanistic Phyllotaxis Model) // Visual Mathematics (Electronic journal). http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/dima/index.html
7. Джан Р. В. Филлотаксис: системное исследование морфогенеза растений. РХД, 2006. 462 с.
8. Трифонов Д. Н. Периодическая система элементов. История в таблицах: Учебное пособие / РХТУ им. Д. И. Менделеева. — М., 1999. 68 с.
9. Елецкий А. В. «Экзотические» объекты атомной физики // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 4. С. 86–95.

Поступила 18.07.2011

PYTHAGOREAN APPROACH TO PROBLEMS OF PERIODICITY IN MODERN SCIENCE

Dmitry Weise

A Pythagorean approach to numerical sequences in both chemical and nuclear physics has allowed proposing the geometric analogies, based on the figured numbers (three-dimensional forms of Mendeleev's periodic table and packing models for atomic nuclei). The Pascal's triangle and finite-difference method are used to deduce formulas. The formulas make it possible to extrapolate both atomic and nuclear magic numbers ad infinitum.

Keywords: figured numbers, Pascal's triangle, gnomon, periodic law of the elements, magic numbers, packing model.