СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517

ИНТЕГРАЛ РИМАНА КАК ФУНКЦИЯ ОБЛАСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

М. К. Яковлев

Рязанский государственный радиотехнический университет
Россия, 390005, г. Рязань, ул. Гагарина, 59/1;
e-mail: vm@rgrta.ryazan.ru

Приводится схема построения теории римановых интегралов, трактующая их как значение аддитивной функции области интегрирования, заданной на некотором семействе подобластей, производная которой по мере области интегрирования равна подынтегральной функции. Эта схема не использует определение интегралов через пределы интегральных сумм и существенно короче традиционных схем построения римановых интегралов.

Ключевые слова: скалярная аддитивная величина, плотность распределения, производная скалярная функция области по мере, восстановление скалярной аддитивной величины по её плотности распределения, определённый интеграл, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.

Теорию определённых интегралов всех видов (по отрезку, по плоской области, по телу, по кривой или криволинейной поверхности) можно рассматривать как решение задачи восстановления скалярной аддитивной величины (САВ) по известной плотности её распределения в соответствующей области.

В этом смысле операция интегрирования является обратной по отношению к операции вычисления плотности распределения САВ по соответствующей области, называемой дифференцированием рассматриваемой САВ по мере области.

Строго определяя упомянутые выше понятия, мы получим теорию, по форме и по существу не отличающуюся от теории восстановления первообразной $F(x)$ по известной производной $f(x)$ функции числового аргумента x. Сформулированная точка зрения на интеграл, по существу, изложена в монографии А. Лебега «Об измерении величин» [1], написанной более 70 лет назад, но до сих пор недостаточно используемой в учебной литературе по анализу. Вследствие этого наши учащиеся полагают, что предметом интегрирования являются пределы интегральных сумм, а не измерения скалярных аддитивных величин.

Далее следует обратить внимание на то, что практическое вычисление плотности распределения САВ будет иметь физический смысл, если в близких точках области эти плотности будут близки по значению, то есть плотность распределения САВ должна быть непрерывна как функция точки. Разумеется, может случиться, что в некоторых точках области эта плотность не определена или уходит в бесконечность. Можно ли и как восстановить

САВ по разрывной плотности? Ответ на этот вопрос становится более простым и понятным, если учащиеся предварительно поймут решение задачи в случае непрерывной плотности. Поэтому в методическом и логическом плане представляется целесообразным сначала изучить интегралы от непрерывной функции. Техника доказательств всех формул этой теории сводится просто к вычислению производной по мере области интегрирования. Ниже рассматриваются сразу все виды определённых интегралов. При обучении в этом, разумеется, нет необходимости, и в зависимости от математического развития слушателей преподаватель может повторять одно и то же для каждого вида определённых интегралов отдельно. Предлагаемая здесь методика неоднократно использовалась автором, начиная с семидесятых годов, при изложении теории интегрирования студентам 1-го и 2-го курсов Рязанской государственной радиотехнической академии.

Статья предназначена для преподавателей математического анализа в школе и в вузе.

1. Основные определения

Пусть G — ограниченное связное множество точек в R^n, например, отрезок прямой, дуга непрерывной кривой линии, кусок плоскости, кусок криволинейной поверхности, тело в R^3 и т. п.

В G можно естественным образом ввести понятие окрестности точки $p \in G$, а следовательно, и понятия открытого и замкнутого подмножеств в G.

Пусть g — область (т. е. открытое связное подмножество) в G, а $\bar{g}$ — замыкание области g. Будем называть g открытой, а $\bar{g}$ — замкнутой ячейкой области G.

Определение 1. *Конечное или счётное множество $R(G) = \{\bar{g}_i\}$ замкнутых ячеек $\bar{g}_i$ области G назовём разбиением области G, если $\bigcup\limits_i \bar{g}_i = \overline{G}$ и $g_i \cap g_j = \varnothing$ при $i \neq j$.*

Определение 2. *Множество A открытых и замкнутых ячеек области G называется алгеброй ячеек из G, если выполняются условия:*

1) *$G \in A$;*
2) *если $g \in A$, то $\bar{g} \in A$;*
3) *объединение конечного или счётного множества ячеек $\bar{g}_i \in A$, не налегающих друг на друга, то есть таких, что $g_i \cap g_j = \varnothing$ при $i \neq j$, принадлежит A, если оно связно;*
4) *непустое пересечение $g \cap g'$ ячеек g и g' из A принадлежит A, если оно связно или состоит из ячеек $g_i \in A$, не пересекающихся между собой;*
5) *если $g \in A$, $\bar{g}_1 \in A$ и $\bar{g}_1 \subset g$, то замыкание разности $\overline{g \setminus \bar{g}_1}$ принадлежит A, если оно связно или состоит из непересекающихся между собой ячеек, принадлежащих A;*
6) *для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $R(G)$ области G на ячейки, диаметр которых меньше ε.*

Пусть на алгебре ячеек A задана скалярная функция $\Phi\colon A \to R$, которую будем называть функцией ячейки (в отличие от функции $f\colon G \to R$, которая называется функцией точки).

Определение 3. *Скалярная функция* $\Phi\colon A \to R$ *называется аддитивной на* A, *если* $\forall\, g \in A\, \forall\, \overline{g'} \in A\colon \overline{g'} \subset g \Rightarrow \Phi(g) = \Phi(\overline{g'}) + \Phi(g \setminus \overline{g'})$.

Пусть $g(p)$ — ячейка, содержащая точку $p \in G$.

Определение 4. *Функция* $\Phi\colon A \to R$ *называется непрерывной на* A, *если*

1) $\forall\, g \in A\colon \Phi(g) = \Phi(\bar g)$;

2) $\forall\, p \in G\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, \bar g(p)\colon \operatorname{diam} \bar g(p) < \delta \Rightarrow \bigl|\Phi\bigl(\bar g(p)\bigr)\bigr| < \varepsilon$.

В дальнейшем, имея в виду условие 2, будем писать

$$\lim_{\bar g(p) \to p} \Phi\bigl(\bar g(p)\bigr) = 0.$$

Определение 5. *Значение* $\Phi(G)$ *аддитивной функции* $\Phi\colon A \to R$ *будем называть непрерывной скалярной аддитивной величиной* (*НСАВ*), *распределённой по ячейкам алгебры* A.

Для того чтобы ввести понятие плотности этой величины, нужно, чтобы на алгебре ячеек A была задана ещё одна непрерывная аддитивная функция $m = m(g)$, $g \in A$, принимающая только положительные значения. Эта функция в дальнейшем называется мерой, а сама область G, на ячейках которой задана мера $m(g)$, называется измеримой. Вопрос о том, как задать меру, мы оставим пока открытым. В качестве меры области G чаще всего выступает длина, площадь, объём области G в зависимости от её размерности.

Определение 6. *Число* $\dfrac{\Phi(\bar g)}{m(\bar g)}$ *называется средней плотностью величины* $\Phi(\bar g)$ *в области* $\bar g$.

Определение 7. *Предел* $f(p)$ *средней плотности при условии, что ячейка стягивается к своей точке* p, *называется плотностью НСАВ* $\Phi(G)$ *в точке* p. *Другими словами*,

$$\begin{aligned}\lim_{\bar g(p)\to p} \frac{\Phi\bigl(\bar g(p)\bigr)}{m\bigl(\bar g(p)\bigr)} &= f(p) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, p \in \bar g(p)\, \forall\, \bar g(p)\colon \operatorname{diam} \bar g(p) < \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left|\frac{\Phi\bigl(\bar g(p)\bigr)}{m\bigl(\bar g(p)\bigr)} - f(p)\right| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

Число $f(p)$ будем обозначать также $\Phi'_{m(g)}(p)$ и называть производной по мере $m(g)$ в точке p. Функция $\Phi\colon A \to R$ называется дифференцируемой на G, если $\forall\, p \in G$ она имеет плотность (т. е. производную по выбранной мере $m(g)$).

Производная $\Phi'_{m(g)}$ обладает линейными свойствами:

1) $\bigl(\alpha\, \Phi(g)\bigr)'_{m(g)}(p) = \alpha\, \Phi'_{m(g)}(p)$, $\alpha \in \mathbf{R}$;

2) $\bigl(\Phi_1(g) + \Phi_2(g)\bigr)'_{m(g)}(p) = \Phi'_{1\, m(g)}(p) + \Phi'_{2\, m(g)}(p)$.

Определение 8. *Скалярная функция* $\Phi\colon A \to R$ *(функция ячейки) называется первообразной для функции* $f\colon G \to R$ *(функции точки), если*

$$\forall\, p \in G\colon\ \Phi'_{m(g)}(p) = f(p). \tag{2}$$

Замечание. Пусть множество B содержится в A. Если условие (1) выполняется лишь для ячеек из B, то говорят о частичной производной, вычисляемой по ячейкам множества B.

2. Основные теоремы

Теорема 1. *Если плотность $f(p)$ определена в каждой точке $p_0 \in G$, то функция $f(p)$ непрерывна на G.*

Доказательство. Пусть p и p_0 принадлежат ячейке $\bar{g}(p_0)$ достаточно малого диаметра. Тогда из (1) следует

$$\begin{aligned}\big|f(p) - f(p_0)\big| &= \left|f(p) - \frac{\Phi\big(\bar{g}(p_0)\big)}{m\big(\bar{g}(p_0)\big)} + \frac{\Phi\big(\bar{g}(p_0)\big)}{m\big(\bar{g}(p_0)\big)} - f(p_0)\right| \leq \\ &\leq \left|\frac{\Phi\big(\bar{g}(p_0)\big)}{m\big(\bar{g}(p_0)\big)} - f(p)\right| + \left|\frac{\Phi\big(\bar{g}(p_0)\big)}{m\big(\bar{g}(p_0)\big)} - f(p_0)\right| < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

а это и означает, что $\lim\limits_{p\to p_0} f(p) = f(p_0)\,\forall\, p_0 \in G$.

Теорема 2. *Пусть функция $\Phi\colon A \to R$ дифференцируема на G. Если $\Phi(\overline{G}) = 0$, то $\exists\, p_0 \in G\colon \Phi'_{m(\bar{g})}(p_0) = 0$.*

Доказательство. Если $\Phi(g) \equiv 0$ на A, то $\Phi'_{m(\bar{g})}(p) \equiv 0$, поэтому пусть $\Phi'_{m(g)}(p) \not\equiv 0$. Если функция $\Phi'_{m(g)}(p)$ меняет знак в области G, то, будучи непрерывной, она обратится в нуль в некоторой точке $p_0 \in G$. Поэтому предположим, что $\Phi'_{m(g)}(p)$ не меняет знак в области G. Пусть $\forall\, p \in G\colon \Phi'_{m(g)}(p) > > 0$. Из условия (1) существования производной следует:

$$\forall\, \varepsilon > 0\,\exists\, \delta > 0\,\forall\, \bar{g}\,\forall\, p \in \bar{g}\colon \operatorname{diam}\bar{g}(p) < \delta \Rightarrow \left|\frac{\Phi\big(\bar{g}(p)\big)}{m\big(\bar{g}(p)\big)} - \Phi'_{m(g)}(p)\right| < \varepsilon.$$

Пусть $R_\delta(\overline{G})$ — разбиение $\overline{G}$ на ячейки, диаметр которых меньше δ. Тогда

$$\forall\, i\,\forall\, \bar{g}_i \in R_\delta(\overline{G})\,\forall\, p_i \in \bar{g}_i\colon \left|\frac{\Phi(\bar{g}_i)}{m(\bar{g}_i)} - \Phi'(p_i)\right| < \varepsilon.$$

Освободившись от модуля, получим

$$\forall\, i\colon \Phi'(p_i)\, m(\bar{g}_i) - \varepsilon \cdot m(g_i) < \Phi(\bar{g}_i) < \Phi'(p_i) \cdot m(\bar{g}_i) + \varepsilon \cdot m(\bar{g}_i). \qquad (*)$$

Просуммируем неравенства $(*)$ по всем ячейкам разбиения $R_\delta(\overline{G})$:

$$\sum_i \Phi'(p_i)\, m(\bar{g}_i) - \varepsilon m(\overline{G}) < \Phi(\overline{G}) < \sum_i \Phi'(p_i)\, m(\bar{g}_i) + \varepsilon \cdot m(\overline{G}).$$

Так как $\Phi(\overline{G}) = 0$, то из левого неравенства при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_i \Phi'(p_i) \cdot m(\bar{g}_i) < \varepsilon \cdot m(\overline{G}),$$

то есть $\sum\limits_i \Phi'(p_i)\, m(g_i) = 0$, что невозможно, так как все слагаемые суммы $\sum\limits_i \Phi'(p_i)\, m(g_i)$ положительны.

Аналогично опровергается предположение, что $\forall\, p \in G\colon \Phi'(p) < 0$. Следовательно, непрерывная, согласно теореме 1, функция $\Phi'(p)$ меняет знак в области G и потому обращается в некоторой точке в нуль.

Доказанная теорема 2 является распространением теоремы Ролля на функции ячейки.

Теорема 3. *Если $\Phi(g)$ непрерывна в A, где A — алгебра ячеек на $\overline{G}$, и дифференцируема на G, то существует точка $p_0 \in G$ такая, что $\Phi(\overline{G}) = \Phi'(p_0) \cdot m(\overline{G})$.*

Доказательство. Рассмотрим аддитивную функцию

$$\varphi(\bar{g}) = \Phi(\bar{g}) - \frac{\Phi(\overline{G})}{m(\overline{G})} \cdot m(\bar{g}), \quad \bar{g} \in A.$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы 2: 1) $\varphi'(p) = \Phi'(p) - \dfrac{\Phi(\overline{G})}{m(\overline{G})}$, 2) $\varphi(\overline{G}) = 0$, следовательно, $\exists\, p_0 \in G\colon \varphi'(p_0) = 0$, т. е. $\exists\, p_0 \in G\colon \Phi'(p_0) = \dfrac{\Phi(\overline{G})}{m(\bar{g})}$.

Следствие 1. *Для любой функции $f(p)$, $p \in G$, существует не более одной первообразной $\Phi(g)$.*

Действительно, пусть $\Phi(g)$ и $F(g)$ — первообразные для $f(p)$. Тогда производная их разности $\varphi(g) = \Phi(g) - F(g)$, $g \in A$, тождественно равна нулю. Следовательно, согласно теореме 3, $\forall\, \bar{g} \in A\, \exists\, p_0\colon \varphi(\bar{g}) = \varphi'_{m(g)}(p_0) \cdot m(\bar{g}) = 0$, то есть $\Phi(g) \equiv F(g)$.

Следствие 2. *Существует не более одной скалярной аддитивной величины, распределённой на G с наперёд заданной плотностью $f(p)$, $p \in G$.*

Следствие 3. *Пусть A_1 более обширная алгебра ячеек из G, чем A, то есть $A \subset A_1$. Тогда*

$$\lim_{\substack{\bar{g}(p) \to p \\ \bar{g}(p) \in A_1}} \frac{\Phi(\bar{g})}{m(\bar{g})} = \lim_{\substack{\bar{g}(p) \to p \\ \bar{g}(p) \in A}} \frac{\Phi(\bar{g})}{m(\bar{g})},$$

если последний предел существует.

Действительно, согласно теореме 3

$$\forall\, g \in A_1\, \exists\, p_0 \in \bar{g}\colon \frac{\Phi(\bar{g})}{m(\bar{g})} = \Phi'_A(p_0).$$

Переходя к пределу при $\bar{g} \to p$ и учитывая непрерывность производной $\Phi'(p)$, получим:

$$\Phi'_{A_1}(p) = \lim_{\substack{\bar{g} \to p \\ \bar{g} \in A_1}} \frac{\Phi(\bar{g})}{m(\bar{g})} = \lim_{g \to p} \Phi'_A(p_0) = \Phi'_A(p).$$

Здесь $\Phi'_A(P)$ — производная функции.

Согласно следствию 3 для вычисления плотности $\Phi'(p)$ по множеству ячеек A_1 достаточно найти частичную плотность по множеству A, выбирая в качестве ячейки $\bar{g}(p)$ области G, например, n-мерный куб, содержащий точку p.

Далее мы решим вопрос о существовании первообразной для непрерывной функции $f(p)$ точки $p \in G$.

3. Верхний и нижний интегралы Дарбу

Пусть $\overline{G}$ — ограниченная замкнутая область и $m(q)$, $q \in A$, — мера, заданная на A, $f(p)$, $p \in \overline{G}$, — ограниченная на $\overline{G}$ скалярная функция. Пусть $R(\overline{G}) = \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n, \ldots\}$ — разбиение множества $\overline{G}$ на неналегающие друг на друга ячейки $\bar{g}_i \in A$.

Введём следующие обозначения:

$$m_i = \inf_{p\,\in\,\bar{g}_i}\{f(p)\}, \quad M_i = \sup_{p\,\in\,\bar{g}_i}\{f(p)\}, \quad m = \inf_{p\,\in\,\overline{G}}\{f(p)\}, \quad M = \sup_{p\,\in\,\overline{G}}\{f(p)\},$$

$$\underline{S}\bigl(f, R(\overline{G})\bigr) = \sum_{\bar{g}_i\,\in\,R(\overline{G})} m_i \cdot m(\bar{g}_i) < \infty, \quad \overline{S}\bigl(f, R(\overline{G})\bigr) = \sum_{\bar{g}_i\,\in\,R(\overline{G})} M_i \cdot m(\bar{g}_i) < \infty.$$

Числа $\underline{S}$ и $\overline{S}$ называются нижней и верхней суммами Дарбу соответственно. Легко показать, что для любых разбиений R и R' области $\overline{G}$ на ячейки из A справедливо:

$$m \cdot m(\overline{G}) \le \underline{S}(f, R) \le \overline{S}(f, R') \le M \cdot m(\overline{G}). \tag{3}$$

Обозначим $\underline{J}(f) = \sup\limits_{R}\{\underline{S}(f, R)\}$, $\overline{J}(f) = \inf\limits_{R}\{\overline{S}(f, R)\}$. Числа $\underline{J}(f)$ и $\overline{J}(f)$ однозначно определены для любой ограниченной функции $f(p)$, $p \in \overline{J}$, и называются нижним и верхним интегралами Дарбу от функции $f(p)$. Из (3) следует, что

$$m \cdot m(\overline{G}) \le \underline{J}(f) \le \overline{J}(f) \le M \cdot m(\overline{G}). \tag{4}$$

Пусть $\bar{g}$ — произвольная замкнутая ячейка из A. Аналогичные построения приводят к неравенству:

$$\forall\, \bar{g} \in A\colon m_{\bar{g}} \cdot m(\bar{g}) \le \underline{J}(f, \bar{g}) \le \overline{J}(f, \bar{g}) \le M_{\bar{g}} \cdot m(\bar{g}), \tag{4a}$$

где $m_{\bar{g}} = \inf\limits_{p\,\in\,\bar{g}}\{f(p)\}$, $M_{\bar{g}} = \sup\limits_{p\,\in\,\bar{g}}\{f(p)\}$. Переменные $\underline{J}(f, \bar{g})$ и $\overline{J}(f, \bar{g})$ называются нижним и верхним неопределенными интегралами соответственно.

Функции $\underline{J}(f, \bar{g})$ и $\overline{J}(f, \bar{g})$ ячейки $\bar{g} \in A$ аддитивны на A. Действительно, пусть ячейки $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ образуют разбиение ячейки $\bar{g}$, т. е. $\bar{g} = \bar{g}_1 \cup \bar{g}_2$ и $g_1 \cap g_2 = \varnothing$. Пусть R_1 и R_2 — произвольные разбиения областей $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$. Тогда $R_1 \cup R_2 \equiv R$ есть некоторое разбиение ячейки $\bar{g}$. Пусть R' — произвольное разбиение ячейки $\bar{g}$. Ясно, что $\underline{S}(R) = \underline{S}_1(R_1) + \underline{S}_2(R_2) \le \sup\limits_{R'}\{\underline{S}(R')\} \equiv \underline{J}(\bar{g})$, откуда $\underline{S}_1(R_1) \le \underline{J}(\bar{g}) - \underline{S}_2(R_2)$. Следовательно, $\underline{J}(\bar{g}_1) = \sup\limits_{R_1}\{\underline{S}_1(R_1)\} \le \underline{J}(\bar{g}) - S_2(R_2)$. Далее, $\underline{S}_2(R_2) \le \underline{J}(\bar{g}) - \underline{J}(\bar{g}_1)$, откуда следует $\underline{J}(g_2) = \sup\limits_{R_2}\{\underline{S}_2(R_2)\} \le \underline{J}(\bar{g}) - \underline{J}(\bar{g}_1)$. Таким образом,

$$\underline{J}(\bar{g}_1) + \underline{J}(\bar{g}_2) \le \underline{J}(\bar{g}). \tag{$**$}$$

Далее, пусть R' — произвольное разбиение ячейки $\bar g$. Общая граница ячеек $\bar g_1$ и $\bar g_2$ разрежет некоторые ячейки разбиения R' на более мелкие. Полученное новое разбиение обозначим R''. Тогда

$$\underline{S}(R') \le \underline{S}(R'') = \underline{S}_1(R_1) + \underline{S}_2(R_2) \le \underline{J}(\bar g_1) + \underline{J}(\bar g_2).$$

Следовательно,

$$\underline{J}(\bar g) = \sup_{R'}\{\underline{S}(R')\} \le \underline{J}(\bar g_1) + \underline{J}(\bar g_2). \tag{$***$}$$

Из неравенств $(**)$ и $(***)$ следует: $\forall\, \bar g \in A\colon \underline{J}(\bar g) = \underline{J}(\bar g_1) + \underline{J}(\bar g_2)$.

Аналогично доказывается аддитивность верхнего интеграла Дарбу:

$$\forall\, \bar g \in A\colon \overline{J}(\bar g) = \overline{J}(\bar g_1) + \overline{J}(\bar g_2), \text{ если } \bar g = \bar g_1 \cup \bar g_2, \ \ g_1 \cap g_2 = \varnothing.$$

4. Теорема о пределе промежуточной функции области

Теорема 4. *Если* $f_1(\bar g) \le f(\bar g) \le f_2(\bar g)$ *и* $\lim\limits_{g\to p} f_1(\bar g) = \lim\limits_{g\to p} f_2(\bar g) = a$, *то* $\lim\limits_{g\to p} f(\bar g) = a$.

Доказательство.

$$\lim_{g\to p\,\in\, g} f_1(\bar g) = a \leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\, \exists\, \delta_1 > 0\, \forall\, \bar g(p)\colon \operatorname{diam} \bar g(p) < \delta_1 \Rightarrow |f_1(\bar g) - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{g\to p\,\in\, g} f_2(\bar g) = a \leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\, \exists\, \delta_2 > 0\, \forall\, \bar g(p)\colon \operatorname{diam} \bar g(p) < \delta_2 \Rightarrow |f_2(\bar g) - a| < \varepsilon.$$

Пусть δ не превосходит наименьшего из δ_1, δ_2. Тогда

$$\operatorname{diam} \bar g < \delta \Rightarrow -\varepsilon < f_1(\bar g) - a < f(\bar g) - a \le f_2(\bar g) - a < \varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{g\to p} f(\bar g) = a.$$

Теорема 5 (о существовании первообразной). *Для любой непрерывной в ограниченной измеримой области G функции $f(p)$ существует (и только одна) первообразная функция, т. е. такая функция $\Phi(g)$, $g \in A$, что $\Phi'_{m_g}(p) \equiv f(p)$, $\forall\, p \in G$.*

Доказательство. Действительно, поделив члены неравенства (4a) на $m(\bar g)$, получим

$$m_{\bar g} \le \frac{\underline{J}(\bar g)}{m(\bar g)} \le \frac{\overline{J}(\bar g)}{m(\bar g)} \le M_{\bar g}. \tag{5}$$

Крайние члены неравенства (5) при стягивании ячейки $\bar g$ к её точке p стремятся к общему пределу $f(p)$, откуда, согласно теореме 4, заключаем:

$$\forall\, p \in G\colon \ \ \underline{J}'_{m(g)}(p) = \lim_{\bar g\to p} \frac{\underline{J}(\bar g)}{m(\bar g)} = f(p), \quad \overline{J}'_{m(g)}(p) = \lim_{\bar g\to p} \frac{\overline{J}(\bar g)}{m(\bar g)} = f(p). \tag{6}$$

Итак, нижний и верхний неопределённые интегралы $\underline{J}(\bar g)$ и $\overline{J}(\bar g)$ являются первообразными для непрерывной функции $f(p)$ и потому $\forall\, \bar g \in A$: $\underline{J}(\bar g) = \overline{J}(\bar g)$, согласно следствию 1 из теоремы 3.

Следствие 1. *Существует, и только одна, НСАВ, распределённая по ячейкам области G с наперёд заданной непрерывной плотностью $f(p)$. Этой величиной является общее значение J верхнего и нижнего интегралов $\underline{J}(\overline{G}) = \overline{J}(\overline{G})$.*

Замечание. Если функция $f(p)$ определена на $\overline{G}$, ограничена и выполняется одно из равенств (6), то соответствующий интеграл Дарбу будет первообразной для $f(p)$, и, согласно теореме 1, $f(p)$ непрерывна на $\overline{G}$. Если оба равенства (6) несправедливы хотя бы в одной точке $p \in G$, то ни $\underline{J}(g)$, ни $\overline{J}(g)$ не являются первообразными для $f(p)$ в смысле определения 5.

В связи с этим замечанием вводится

Определение 9. *Ограниченная функция $f(p)$, $p \in G$, называется интегрируемой по Риману по области G, если $\underline{J}(G) = \overline{J}(G)$.*

Определение 10. *Интегрируемая по Риману функция $f(p)$ называется плотностью распределения величины $\int\limits_G f(p)\,dm(g)$.*

Равенство

$$\lim_{\bar{g}\to p} \frac{\int\limits_{\bar{g}} f(p)\,dm(g)}{m(\bar{g})} = f(p) \tag{7}$$

выполняется в точках непрерывности функции $f(p)$. Для непрерывных функций $f(p)$ определение 10 равносильно определению 7.

Таким образом, интеграл по ограниченной измеримой области G от интегрируемой по Риману функции $f(p)$ — это скалярная аддитивная величина, распределённая по ячейкам из A с плотностью $f(p)$ в смысле определения 10.

5. Интеграл как предел интегральной суммы

Интегральная сумма для разбиения $R(G)$ — это $S\big(f(p), R(G)\big) \equiv \equiv \sum\limits_i f(p_i)\, m(\bar{g}_i)$, где $p_i \in \bar{g}_i$.

Очевидно, $\underline{S}(f,R) \le S(f,R) \le \overline{S}(f,R)$. Так как крайние члены этого неравенства при $\operatorname{diam} R \to 0$ стремятся к общему пределу $J(f,R)$, то для любой интегрируемой по Риману функции $\lim\limits_{\operatorname{diam} R\to 0} S(f,R) = J(f,R)$.

Справедливо и обратное утверждение: если существует предел интегральной суммы $\lim\limits_{\operatorname{diam} R\to 0} S\big(f(R)\big) = J^*(f)$, то функция $f(p)$ интегрируема по Риману и $J^*(f) = J(f)$. На очевидном доказательстве этого утверждения мы здесь останавливаться не будем.

6. Вычисление определённых интегралов

1. Формула Ньютона – Лейбница. Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, — непрерывная функция и $\Phi([\alpha,\beta])$, $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, — скалярная аддитивная функция отрезка $[\alpha,\beta]$, $\alpha < \beta$, заданная на множестве A всех отрезков $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ и распределённая по A с плотностью $f(x)$, то есть $\lim\limits_{[\alpha,\beta]\to x} \dfrac{\Phi([\alpha,\beta])}{m[\alpha,\beta]} = f(x)\,\forall\, x \in$ $\in (a,b)$. Очевидно, длина отрезка $m[\alpha,\beta] = \beta - \alpha$ является непрерывной и аддитивной функцией на A.

Согласно теореме 5, функция $\Phi([\alpha,\beta])$ определяется однозначно по непрерывной плотности $f(x)$. Обозначим $F(x) \equiv \Phi([a,x])$, $a < x \le b$. Доопределим $F(x)$ при $x = a$, положив $F(a) = 0$. Вычислим $F'(x)$. Ввиду аддитивности $\Phi([\alpha,\beta])$ при $\Delta x > 0$ имеем $\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \Phi([a,x+\Delta x]) -$ $- \Phi([a,x]) = \Phi([x,x+\Delta x])$, а при $\Delta x < 0$ получаем $\Delta F(x) = F(x+\Delta x) -$ $- F(x) = \Phi([a,x+\Delta x]) - \Phi([a,x]) = -\Phi([x+\Delta x,x])$. Поэтому

$$F'(x+0) = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{[x,x+\Delta x]\to x} \frac{\Phi([x,x+\Delta x])}{\Delta x} = f(x),$$
$$F'(x-0) = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{[x+\Delta x,x]\to x} \frac{\Phi([x+\Delta x,x])}{-\Delta x} = f(x).$$

Таким образом, $\forall\, x \in [a,b]\colon F'(x) = f(x)$, то есть справедлива

Теорема 6. *Для любой непрерывной скалярной функции $f(x)$ скалярного аргумента x существует первообразная. Ею является функция*

$$F(x) \equiv \int\limits_a^x f(t)\,dt \equiv \Phi([a,x]), \quad x \in [a,b].$$

Пусть $V(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$. Тогда $\exists\, c\,\forall\, x\colon F(x) =$ $= V(x) + c$, при $x = a$ получим $0 = F(a) = V(x) + c$, то есть $c = -V(a)$ и $F(x) = V(x) - V(a)$. При $x = b$ имеем $F(b) = \Phi([a,b]) = V(b) - V(a)$, то есть

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = V(b) - V(a), \quad a \le b.$$

Теорема 7. *Пусть $f(x)$ кусочно-непрерывна и ограничена на $[a,b]$. Существует непрерывная функция $F(x)$, $x \in [a,b]$, такая, что $F'(x) = f(x)$ в любой точке непрерывности функции $f(x)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случаи, когда $f(x)$ имеет одну точку разрыва c, где $a < c < b$. Пусть $F_1(x) \equiv \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \le c$. Тогда $\Delta F_1(c) =$ $= F_1(c) - F(x) = \int\limits_x^c f(t)\,dt = f(t_0)(c-x)$, где $t_0 \in (x,c)$, то есть $\lim\limits_{x\to c-0} F_1(x) =$ $= F_1(c)$ и $F_1'(x) = f(x)\,\forall\, x < c$.

Пусть $F_2(x) \equiv \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt$, $x_0, x \in (c,b)$. Тогда

$$\lim_{x\to c+0} F_2(x) = \int\limits_{x_0}^c f(t)\,dt \equiv F_2(c) \quad \text{и} \quad F_2'(x) = f(x) \quad \text{при} \quad c < x \le b.$$

Пусть $F(x) \equiv \begin{cases} F_1(x), & x \le c, \\ F_2(x) - F_2(c) + F_1(c), & x > c. \end{cases}$ Функция $F(x)$ непрерывна при всех $x \in [a, b]$, и при $x \ne c$ имеем $F'(x) = f(x)$.

Следствие. *Пусть $V(x)$ — непрерывная первообразная для кусочно-непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = V(b) - V(a).$$

Доказательство. Пусть $c \in (a, b)$ — единственная точка разрыва функции $f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = V(c) - V(a) + V(b) - V(c) = V(b) - V(a).$$

Аналогично доказывается формула Ньютона–Лейбница для функции $f(x)$, имеющей конечное число точек разрыва на $[a, b]$.

Замечание. Если $f(x)$ стремится к бесконечности в точке c, непрерывна на $[a, c)$ и $(c, b]$, и несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то построенная выше функция $F(x)$ будет непрерывной первообразной для $f(x)$. Таким образом, и для неограниченной кусочно-непрерывной на $[a, b]$ функции существует непрерывная первообразная, если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

Удобно определить интеграл по отрезку $[a, b]$ при $b < a$ формулой $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[b,a]} -f(x)\,dx$. Это определение превращает интеграл по отрезку в интеграл по направленному отрезку $[\overrightarrow{a, b}]$. При изменении ориентации (направления) плотность САВ $\int_a^b f(x)\,dx$ меняет знак на противоположный, то есть является функцией не только точки x, но и выбранного направления отрезка $[a, b]$.

2. Вычисление кратных интегралов и теорему Фубини рассмотрим на примере двойного интеграла по элементарной области.

Пусть $\overline{G} = \{p(x, y)\colon a \le x \le b,\ y_{\text{н}}(x) \le y < y_{\text{в}}(x)\}$, где $a < b$ и $y_{\text{н}}(x) < y_{\text{в}}(x)$ — заданные на $[a, b]$ непрерывные функции. Такую область называют правильной по y. В качестве алгебры ячеек A рассмотрим множество всех правильных ячеек:

$$A = \bigl\{g = \{(x, y)\colon a \le \alpha \le x \le \beta \le b,\ \ y_{\text{н}}(x) \le y^*_{\text{н}}(x) \le y \le y^*_{\text{в}}(x) \le y_{\text{в}}(x)\}\bigr\}.$$

Тогда мера $m(\bar{g}) = \int_\alpha^\beta dx \int_{y^*_{\text{н}}(x)}^{y^*_{\text{в}}(x)} dy = \int_\alpha^\beta [y^*_{\text{в}}(x) - y^*_{\text{н}}(x)]\,dx > 0$ аддитивна за счет аддитивности внешнего и внутреннего интегралов. Очевидно, эта мера непрерывна на A.

Повторный интеграл $J(G) = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_{\text{н}}(x)}^{y_{\text{в}}(x)} f(x,y)\,dy$ от непрерывной на G функции $f(x,y)$ удовлетворяет условию

$$m\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_{\text{н}}(x)}^{y_{\text{в}}(x)} dy \le J(G) \le M\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_{\text{н}}(x)}^{y_{\text{в}}(x)} dy.$$

Поделив все члены этого неравенства на $m(G)$, получим $m \le \dfrac{J(G)}{m(G)} \le M$, где m и M — наименьшее и наибольшее значения $f(x,y)$ на G. Стягивая G к точке $p=(x,y)$, получим $\overline{J'}_{m(g)}(p) = \lim\limits_{\bar g \to p} \dfrac{J(\bar g)}{m(\bar g)} = f(p)$. Но двойной интеграл $\iint\limits_g f(p)\,dm(g)$ также является первообразной для $f(p)$. Таким образом, $\iint\limits_{\overline{G}} f(p)\,dm(\bar g) = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_{\text{н}}(x)}^{y_{\text{в}}(x)} f(x,y)\,dy$.

3. Вычисление криволинейных интегралов. Пусть гладкая жорданова дуга (L) задана параметрическим уравнением $\bar r = \bar r(t)$, $t \in [a,b]$, где $\bar r(t)$ — радиус-вектор точки $r(t) \in (L)$, имеющий непрерывную производную $\bar r'(t) \ne 0$.

Пусть L — длина кривой (L). Соотнесём каждому отрезку $[t, t+\Delta t] \subseteq$ $\subseteq [a,b]$ длину соответствующего куска (ΔL) кривой (L) от точки $r(t)$ до точки $r(t+\Delta t)$. Вычислим плотность распределения длины кривой по отрезку $[a,b]$:

$$\begin{aligned} L'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta L}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta L\,|\overline{\Delta r}|}{|\overline{\Delta r}|\,|\Delta t|} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta L}{|\overline{\Delta r}|}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\overline{\Delta r}|}{|\Delta t|} = 1\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\overline{\Delta r}|}{|\Delta t|} = \\ &= \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, сама длина L вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt.$$

Ввиду аддитивности определённого интеграла и длины кривой последнюю формулу можно распространить на кусочно-гладкие дуги.

Пусть по ячейкам дуги (L) распределена НСАВ $\Phi\big((L)\big)$ с линейной плотностью $f(r) = \lim\limits_{(L)\to r}\dfrac{\Phi\big((L)\big)}{L}$, $r \in (L)$. Тогда

$$\begin{aligned} f\big(r(t)\big) &= \lim_{(L)\to r(t)}\frac{\Phi\big((L)\big)}{L} = f(r)\cdot L'(t) = \\ &= f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Phi\big((L)\big) = \int\limits_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, dt.$$

Ввиду аддитивности величины $\Phi\big((L)\big)$ и аддитивности определённого интеграла последняя формула справедлива для кусочно-непрерывной функции $f(r)$ и кусочно-гладких дуг Жордана.

4. Криволинейный интеграл по ориентированной кривой. Пусть на гладкой ориентированной дуге $\smile AB$ выбрано одно из двух возможных направлений. Направление от начала A кривой $\smile AB$ к концу B назовём положительным (L^+), а противоположное — отрицательным.

Пусть в точках $p \in \smile AB$ задано непрерывное векторное поле $\overline{F}(p) = F_x(p)\,\bar{i} + F_y(p)\,\bar{j} + F_z(p)\,\bar{k}$. Обозначим $\bar{\tau}^+(p)$ единичный вектор касательной в точке p, направленный в сторону движения точки p при возрастании параметра t:

$$\bar{\tau}^+(p) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} \Big/ \left|\frac{d\bar{r}(t)}{dt}\right| = \cos\alpha(p)\,\bar{i} + \cos\beta(p)\,\bar{j} + \cos\gamma(p)\,\bar{k},$$

где $\bar{r}(t)$ — радиус-вектор точки $p(t) \in L$,

$$\cos\alpha = \frac{x'(t)}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y'(t)}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z'(t)}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}}.$$

Пусть функция $f^+(t) \equiv \overline{F}(p) \cdot \bar{\tau}^+(p)$ является плотностью распределения САВ $\Phi(L^+)$ по направленной кривой (L^+), то есть

$$\Phi(L^+) \equiv \int\limits_{(L^+)} f^+(p)\, dl.$$

Сводя последний криволинейный интеграл к определённому интегралу по отрезку $[\alpha, \beta]$, получим

$$\int\limits_{(L^+)} f^+(p)\, dl = \int\limits_\alpha^\beta [F_x \cdot x'(t) + F_y \cdot y'(t) + F_z \cdot z'(t)]\, dt.$$

Если $\bar{\tau}^-(p) = -\bar{\tau}^+(p)$, то

$$\Phi(L^-) = \int\limits_{(L^-)} \overline{F}(p)\,\bar{\tau}^-(p)\, dl = -\int\limits_{(L^+)} \overline{F}(p)\,\bar{\tau}^+(p)\, dl = -\Phi(L^+).$$

5. Формула Грина. Пусть $\overline{G}$ — замкнутая ограниченная плоская область с границей Γ, функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, P_y', Q_x' непрерывны в G. Тогда

$$\oint\limits_\Gamma P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = \iint\limits_{\overline{G}} (Q_x' - P_y')\, dx\, dy.$$

Соотнесём каждой ячейке $\bar g \subseteq \overline{G}$ интеграл $\oint\limits_{\partial\bar g} P\,dx + Q\,dy$, вычисленный по её границе в положительном направлении, и найдем производную $f(p)$ полученной аддитивной функции ячейки. Произвольную точку $p(x_0, y_0) \in G$ накроем квадратом $\bar g = \left\{(x,y)\colon \begin{array}{c} x_0 \le x \le x_0 + \Delta x \\ y_0 \le y \le y_0 + \Delta y \end{array}\right\}$. Вычисляя $\oint\limits_{\partial\bar g} P\,dx + Q\,dy$ по его границе, получим:

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial\bar g} P\,dx + Q\,dy \;&=\; \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x,y_0)\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x,y_0+\Delta y)\,dx + \\ &+ \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} Q(x_0+\Delta x,y)\,dy - \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} Q(x_0,y)\,dy = \\ &= \Delta x \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} Q'_x(c_1,y)\,dy - \Delta y \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P'_y(x,c_2)\,dx.\end{aligned}$$

Применяя к интегралам в последней разности теорему о среднем, имеем

$\Delta x \cdot \Delta y[Q'_x(c_1,c_3) - P'_y(c_4,c_2)]$, где $c_1, c_4 \in (x_0, x_0+\Delta x)$, $c_3, c_2 \in (y_0, y_0+\Delta y)$,

откуда следует

$$\forall\, p_0 = (x_0,y_0)\colon f(p_0) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\oint\limits_{\partial\bar g} P\,dx + Q\,dx}{\Delta x\,\Delta y} = Q'_x(x_0,y_0) - P'_y(x_0,y_0),$$

что и утверждает формула Грина.

Вычисление поверхностных интегралов, доказательство формул Остроградского – Гаусса и Стокса вполне аналогичны приведённым выше. Геометрические и физические приложения определённых интегралов сводятся к вычислению плотности распределения той или иной НСАВ и восстановлению НСАВ по плотности с помощью интегрирования по области распределения $\overline{G}$.

Более подробное изложение теории римановых интегралов по предлагаемой схеме можно найти в пособиях [2–5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебег А. Об измерении величин. — М., 1962. 204 с.
2. Яковлев М. К., Яковлева Н. Г. Определённый интеграл. Методические указания. — Рязань: Изд-во РРТИ, 1985. 84 с.
3. Яковлев М. К. Криволинейный и поверхностный интегралы. — Рязань: Изд-во РРТИ, 1986. 45 с.
4. Яковлев М. К., Маслова Н. Н. Определённый интеграл. Часть 1. Учебное пособие. — Рязань: РРТУ, 2010. 83 с.
5. Яковлев М. К., Маслова Н. Н. Определённый интеграл. Часть 2. Учебное пособие. — Рязань: РРТУ, 2011. 112 с.

Поступила 11.10.2011

THE RIEMANN INTEGRAL AS FUNCTION OF A DOMAIN OF INTEGRATION

M. K. Yakovlev

A scheme of construction of Riemann integrals is offered. The scheme interprets these integrals as the value of the additive function of a domain of integration over a certain set of subdomains. The derivative of the additive function over the measure of integration equals the subintegral function. The scheme offered does not use the definition of integrals via limits of integral sums. Moreover, the scheme is considerably shorter than the traditional schemes of construction of Riemann integrals.

Keywords: scalar additive value, distribution density; derivative of the scalar function with respect to a measure, reconstruction of a scalar additive quantity from its distribution density; definite integral, multiple integral, line integral, surface integral.