СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 510.22

СТАНДАРТНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФАКТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

И. Д. Ремизов

МГУ им. М. В. Ломоносова
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские Горы, д. 1;
e-mail: ivan.remizov@gmail.com

Статья представляет собой незначительно изменённый текст методического пособия [27] для студентов первого курса механико-математического факультета МГУ. В ней сжато изложены общие факты и обозначения теории множеств, использующиеся во многих областях высшей математики. Конспективный стиль изложения позволил затронуть достаточно широкий круг вопросов в сравнительно небольшом объёме текста. Изложение практически не содержит доказательств, однако приведён список литературы, к которой можно обратиться за более подробным разъяснением обсуждаемых понятий.

Ключевые слова: математика, теоретико-множественный подход, терминология.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задача настоящего текста — сжато, но понятно изложить основы той части теории множеств, которая является языком для большинства остальных областей математики. При этом автор старался: 1) донести до читателя набор сведений, позволяющий самостоятельно изучать математическую литературу, не запинаясь о кванторы, символы декартовых произведений и термины «транзитивное отношение», «дизъюнктные множества», «биекция», «многозначная функция», «кардинал», «факторизация», «континуум», «направленность» и т. д.; 2) сделать текст возможно более кратким, не обеднив его сверх меры.

Подлинное понимание обсуждаемых в статье понятий приходит лишь после работы с примерами и задачами; здесь начинающему изучение высшей математики может понадобиться помощь наставника, готового отвечать на вопросы и проверять рассуждения. Следует также иметь в виду, что далеко не все включённые в текст утверждения имеют простые короткие доказательства.

Список литературы содержит как специализированные учебники для дальнейшего изучения, так и популярные издания. Конечно, их полезно читать и параллельно, и до, и после ознакомления с настоящим текстом: лишь взгляд на предмет с различных точек зрения позволяет ощутить его красоту в полной мере.

Автор выражает благодарность Б. В. Агафонцеву, А. В. Бегунцу, В. И. Богачеву, Н. А. Бочаровой, М. С. Вербицкому, А. В. Горшкову, А. В. Дурягину, С. Б. Измалкову, А. Б. Коконовой, А. А. Костицыну, Т. П. Лукашенко, А. В. Мелешкиной, И. С. Париной, Г. М. Полотовскому, А. В. Савватееву, Я. А. Смирнову, О. Г. Смолянову, А. С. Тонису, Г. Г. Хмуркину, Д. С. Шамканову, Е. В. Шаройко за большие и маленькие замечания, позволившие сделать изложение лучше.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СКОРОПИСЬ

В математической скорописи часто используют специальные значки, называемые *кванторами*, и некоторые другие символы. Не следует думать, что высказывание, записанное с помощью математической скорописи, более научно, чем то же самое высказывание, сформулированное словами. Это лишь разные формы выражения одной и той же мысли. Главное, чтобы мысль была правильной, а не чтобы она была записана с помощью математической скорописи.

Значок логической эквивалентности $\iff$ означает «тогда и только тогда, когда», «в точности тогда, когда». *Значок импликации* $\Rightarrow$ означает «следовательно», «тогда». Например, запись $(P \iff Q) \Rightarrow H$ означает: из того, что P имеет место в том и только в том случае, когда имеет место Q, следует, что верно H. *Квантор всеобщности* $\forall$ читается как «любой», «для любого», «для всех», «для каждого» и представляет собой перевёрнутую первую букву слова All. *Квантор существования* $\exists$ читается как «найдётся», «существует» и представляет собой перевёрнутую первую букву слова Exists. *Символы конъюнкции* $\wedge$ и & означают «и». *Символ дизъюнкции* $\vee$ означает неисключающее «или», т. е. ($P \vee Q$ верно) $\iff$ (верно хотя бы одно из высказываний P или Q). Более подробно: фраза «верно хотя бы одно из высказываний P или Q» означает, что реализуется одна из трёх ситуаций: (P верно, а Q неверно), или (Q верно, а P неверно), или (верны оба — и P, и Q). Исключающее «или» — значок $\oplus$ — используется реже: по определению ($P \oplus Q$ верно) $\iff$ (верно ровно одно из высказываний P или Q). Символы «двоеточие» : или «палочка» | в формулах читаются как «что», или «такой (такие), что», или «так, что». Запятая « , » в формулах обычно означает «и». Не зазорно для большей ясности писать «и» и «или» словами. Всё это следует иметь в виду при использовании математической скорописи.

Остальные используемые обозначения объясняются прямо в тексте.

2. МНОЖЕСТВА

Множество — набор, совокупность, семейство, неупорядоченный перечень, неупорядоченный список каких-либо отличимых друг от друга объектов, называемых *элементами* (иногда — *точками*) множества. В XX веке оформилась традиция «строить математику из множеств», т. е. каждый новый вводимый в рассмотрение объект определять как некоторое множество.

$A = \{a, b, c\}$ — множество A состоит из трех элементов: a, b и c.

$x \in A$ — элемент x *принадлежит* множеству A (говорят также, что x *лежит* в A).

$A \ni x$ — множество A *содержит* элемент x.

Ясно, что $x \in A \iff A \ni x$.

$A = \{x\colon \text{условия на } x\}$ — множество A состоит из тех и только из тех объектов x, для которых выполняются указанные после : условия. Вместо : иногда пишут вертикальную палочку |. Действует соглашение, сокращающее записи: $\{x \in B\colon \text{условия на } x\}$ означает то же самое, что $\{x\colon x \in \in B, \text{ условия на } x\}$.

Для «стандартных» числовых множеств вводятся следующие общеупотребительные обозначения:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ — множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$ — множество всех целых чисел;

$\mathbb{Q} = \{x \mid \exists m \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}\colon x = \dfrac{m}{n}\}$ — множество всех рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество всех действительных (синоним: вещественных) чисел;

$\mathbb{C} = \{x + iy\colon x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ — множество всех комплексных чисел.

Пустое множество $\varnothing$ — пустой список элементов, т. е. множество, в котором нет ни одного элемента. Для каждого x неверно, что $x \in \varnothing$. Например, если для всех x утверждение $P(x)$ ложно, то $\varnothing = \{x\colon \text{имеет место } P(x)\}$.

Запись $A \subset B$ означает, что если $x \in A$, то $x \in B$. В таком случает говорят, что A содержится в B в качестве подмножества, или что множество A является *подмножеством множества* B. То же самое записывают в виде $B \supset A$ и говорят, что множество B является *надмножеством множества* A. Каждый из значков $\in$, $\ni$, $\subset$, $\supset$ можно перечеркнуть, при этом смысл меняется на противоположный. Пример: запись $x \notin A$ означает, что элемент x не принадлежит множеству A.

Принадлежность множества A множеству B в качестве подмножества называют иногда *включением* A в B, а запись $A \subset B$ допускает прочтение «A включено в B». Например, имеет место цепочка включений: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Если одновременно $A \subset B$ и $A \supset B$, то $A = B$, т. е. множества A и B совпадают как наборы элементов (другими словами, состоят из одних и тех же элементов).

У каждого множества X есть подмножества X и $\varnothing$. Эти подмножества называются *несобственными подмножествами множества* X, а все остальные его подмножества — *собственными подмножествами*. Легко видеть, что у пустого множества собственных подмножеств нет, а два несобственных совпадают. Если X — множество, то $2^X = \{A\colon A \subset X\}$ — *множество всех подмножеств* множества X. Мотивировка обозначения: если в множестве X ровно n элементов, то в множестве 2^X ровно 2^n элементов. Иногда вместо 2^X пишут $\mathscr{P}(X)$.

$A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ или } x \in B\}$ — *объединение множеств* A и B, т. е. множество всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B. Легко проверяется, что $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Символами $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\cup_{k=1}^{n} A_k$ обозначают объединение n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т. е. множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

$A \cap B = \{x \colon x \in A$ и $x \in B\}$ — *пересечение* (синоним: *общая часть*) *множеств* A и B, т. е. множество всех тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A и B. Легко проверяется, что $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Символами $A_1 \cap \ldots \cap A_n$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\cap_{k=1}^{n} A_k$ обозначают пересечение n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т. е. множество всех элементов, принадлежащих каждому из этих множеств.

Если набор множеств A_α проиндексирован элементами α некоторого множества I, т. е. каждому $\alpha \in I$ поставлено в соответствие множество A_α, то по определению $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \exists\, \alpha \in I \colon x \in A_\alpha\}$ — *объединение всех множеств из набора* $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$. Аналогично, по определению, $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \forall\, \alpha \in I \colon x \in A_\alpha\}$ — *пересечение всех множеств из набора* $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$. Пример: если $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, то $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha = \cap_{k=1}^{n} A_k$ и $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha = \cup_{k=1}^{n} A_k$.

Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются (синоним: являются *дизъюнктными*). Говорят, что C *разбивается* на A и B (запись: $C = A \sqcup B$), если одновременно $C = A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$. Аналогично, $C = \sqcup_{k=1}^{n} A_k$, если $C = \cup_{k=1}^{n} A_k$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

$A \setminus B = \{x \colon x \in A,\ x \notin B\}$ — *разность множеств* A и B, то есть множество всех элементов множества A, не являющихся элементами множества B. Запись $A \setminus B$ читается «A без B» или «A минус B». Если $A \subset X$, то $X \setminus A = \{x \in X \colon x \notin A\}$ — *дополнение множества* A *до множества* X. Если из контекста понятно, о каком X идет речь, то используют обозначение $A^c = X \setminus A$. Очевидно, $(A^c)^c = A$. Пример: множество всех натуральных чисел разбивается на множество всех чётных натуральных чисел и множество всех нечётных натуральных чисел; каждое из этих множеств является дополнением к другому.

Если $A \subset X$ и $B \subset X$, то $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ и $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (так называемые правила де Моргана). Обобщение на случай произвольного количества множеств: если $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ — набор подмножеств множества X, то имеют место равенства $(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \cap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ и $(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — *симметрическая разность* множеств A и B. Непосредственно из определения симметрической разности следует, что $A \triangle B = B \triangle A$, $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

3. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Будем считать известным множество всех *действительных чисел* $\mathbb{R}$, с конструкцией которого можно быстро и качественно ознакомиться по учебнику [29]. Напомним, что это множество можно ввести аксиоматически [17] и предъявить различные множества, удовлетворяющие принятым аксиомам. Эти множества — *модели множества* $\mathbb{R}$ — могут быть построены на основе следующих объектов: дедекиндовы сечения множества всех рациональных чисел [29], бесконечные вправо m-ичные дроби ($m \geq 2$) [29], прямая в геометрии [17], цепные m-ичные дроби ($m \geq 2$) [32], фундаментальные последовательности рациональных чисел. На практике может быть удобна та или иная модель в зависимости от решаемой задачи.

Запись $\langle a, b\rangle$ означает *упорядоченную пару* элементов a и b, т. е. a считается первым элементом пары $\langle a, b\rangle$, а b — вторым[1].

При $a \neq b$ всегда $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$, однако $\{a, b\} = \{b, a\}$, поскольку в этом равенстве неупорядоченные перечни элементов слева и справа совпадают. Запись $\langle a, a\rangle$ корректна. Запись $\{a, a\}$ в зависимости от договоренности либо некорректна, т. е. не обозначает никакого множества (поскольку элементы множества должны быть различимы), либо (это бывает чаще) обозначает множество $\{a\}$.

Если A и B — множества, то множество $\{\langle a, b\rangle : a \in A,\ b \in B\}$ всех упорядоченных пар (первый элемент в паре из A, второй из B) называется *декартовым произведением* (синоним: *прямым произведением*) множества A на множество B и обозначается $A \times B$. Заметим, что если $A \neq B$, то $A \times B \neq$ $\neq B \times A$. Аналогично вводится множество $A \times B \times C$ упорядоченных троек элементов: первый из A, второй из B, третий из C. Множество

$$A^n = \overbrace{A \times \ldots \times A}^{n \text{ экземпляров мн-ва } A}$$

называется n-й *декартовой степенью* множества A. Например, $A^2 = A \times A$ — *декартов квадрат* множества A.

Каждое подмножество $\gamma \subset A \times B$ называется *бинарным отношением* на $A \times B$. Говорят, что элементы $x \in A$ и $y \in B$ находятся в отношении γ, если $\langle x, y\rangle \in \gamma$; этот факт обычно записывают так: $x\,\gamma\,y$.

Если $\langle x, y\rangle \notin \gamma$, то пишут $x \not\gamma\, y$ или $x\,\overline{\gamma}\,y$. Если $\gamma \subset A \times B$ — некоторое отношение, то отношение $\overline{\gamma} = (A \times B) \setminus \gamma$ называется *противоположным* к отношению γ. Очевидно, $\overline{(\overline{\gamma})} = \gamma$.

Отношение $\gamma = A \times B$ можно называть *тотальным* — в этом случае каждый $x \in A$ находится в отношении γ с каждым $y \in B$. Отношение $\gamma =$ $= \varnothing$ можно называть *пустым*: в нем не состоят никакие элементы[2]. Кроме бинарных, по аналогии вводятся: $\gamma \subset A \times B \times C$ — *тернарное отношение* и $\gamma \subset A_1 \times \ldots \times A_n$ — *n-арное отношение* для любого натурального n.

Если $\gamma \subset A \times A$, то для краткости говорят, что γ — бинарное отношение на A, не упоминая множество $A \times A$.

Пример: отношение $=$ (отношение равенства) на $\mathbb{R}$: $x = y \iff$ (числа x и y равны). Противоположным к нему является отношение неравенства $\neq$.

Обратным к отношению γ называется такое отношение γ^{-1}, что $x\,\gamma^{-1}\,y \iff y\,\gamma\,x$.

Ясно, что $(\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$. Попробуйте найти противоположные и обратные к следующим бинарным отношениям на $\mathbb{R}$: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Графиком бинарного отношения называется, как ни странно, само это отношение. Например, графиком отношения $=$ на прямой $\mathbb{R}$ является бис-

[1] Иногда в обозначении упорядоченной пары вместо угловых скобок используют круглые: (a, b). Упорядоченная пара как новый объект может быть определена без употребления терминов «первый», «второй» равенством $\langle a, b\rangle = \big\{a, \{a, b\}\big\}$.

[2] Оба термина: «пустое отношение», «тотальное отношение» — не общепринятые.

сектриса $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon y = x\}$ первого и третьего квадрантов координатной плоскости $\mathbb{R}^2$. Если множество A — отрезок, например, отрезок $[0, 1]$ числовой оси, то множество $A \times A$ естественно интерпретируется как единичный квадрат, и тогда график отношения равенства на A — диагональ этого квадрата. По этой причине график отношения $x = y$ на произвольном множестве называют диагональю.

Бинарное отношение γ на непустом множестве A называется:

— *рефлексивным*, если $a\,\gamma\,a$ для каждого $a \in A$; геометрический смысл: отношение γ рефлексивно $\iff$ диагональ $x = y$ принадлежит графику γ;

— *антирефлексивным*, если $a\,\overline{\gamma}\,a$ для каждого $a \in A$; геометрический смысл: диагональ не пересекается с графиком отношения;

— *симметричным*, если для каждых $x \in A$, $y \in A$ из $x\,\gamma\,y$ следует $y\,\gamma\,x$; геометрический смысл: график симметричен относительно диагонали. Отношение симметрично тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим обратным;

— *антисимметричным*, если для каждых $x \in A$, $y \in A$ из $x\,\gamma\,y$ и $y\,\gamma\,x$ следует $x = y$; геометрический смысл: симметричные относительно диагонали точки графика могут лежать только на диагонали;

— *связным*[3], если для каждых $x \in A$, $y \in A$ выполняется хотя бы одно из условий: $x\,\gamma\,y$ или $y\,\gamma\,x$;

— *транзитивным*, если для каждых $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$ из одновременного выполнения $x\,\gamma\,y$ и $y\,\gamma\,z$ следует $x\,\gamma\,z$.

Из связности отношения следует его рефлексивность. Отношение на непустом множестве не может одновременно быть рефлексивным и антирефлексивным. Если отношение одновременно симметрично и антисимметрично, то его график лежит на диагонали.

Бинарное отношение на множестве A называется *отношением эквивалентности*, если оно симметрично, рефлексивно и транзитивно. Отношения эквивалентности принято обозначать значками вроде $\sim$, $\simeq$, $\approx$, $\cong$.

Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности $\sim$. Если $x \sim y$, то говорят, что элементы x и y эквивалентны. Множество $K_x = \{y \in A \colon x \sim y\}$ называется *классом эквивалентности элемента* $x \in A$ *по отношению* $\sim$. При этом x называется *представителем класса* K_x. Несложно доказать, что если $y \in K_x$, то $K_x = K_y$. Элементы эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному классу эквивалентности. Поэтому можно говорить просто о *классах эквивалентности по отношению* $\sim$, а не только о классах эквивалентности тех или иных элементов. Классы эквивалентности или не пересекаются, или совпадают, поэтому множество A представляется в виде объединения непересекающихся классов эквивалентности. Множество $A_{/\sim}$ всех классов эквивалентности множества A по отношению эквивалентности $\sim$ называется *фактор-множеством*, а процесс представления множества A в виде объединения классов эквивалентности называется *факторизацией*.

[3] Согласно другим терминологиям — связанным, а иногда — полным. В последнем случае полноту бинарного отношения не следует путать с полнотой отношения порядка (о ней речь пойдет далее).

Примеры.

1. Пусть множество A непусто. Отношение $\sim$, заданное так: $x \sim y \iff \iff x = y$, является отношением эквивалентности. При этом $A_{/\sim} = \big\{\{a\} : a \in \in A\big\}$.

2. Пусть p — простое число. Определим на $\mathbb{Z}$ отношение эквивалентности так: $m \sim n \iff$ найдется такое число $k \in \mathbb{Z}$, что $n = m + kp$. Фактор-множество $\mathbb{Z}_{/\sim}$ обозначается $\mathbb{Z}_p$ и играет важную роль в теории чисел.

3. Отношение «иметь одинаковый цвет глаз» — отношение эквивалентности на множестве всех девушек, живущих на Земле в данный момент. То есть $x \sim y \iff$ (глаза девушки x того же цвета, что глаза девушки y). Фактор-множество в этом случае — это множество групп девушек, имеющих один и тот же цвет глаз; в фактор-множестве столько элементов, сколько различных цветов глаз сейчас у девушек на Земле.

4. ФУНКЦИИ

Записи $f\colon A \to B$ и $A \xrightarrow{f} B$ отражают тот факт, что функция f отображает множество A в множество B. Это означает, что каждому элементу x множества A поставлен в соответствие элемент $f(x)$ множества B, а правило, задающее это соответствие, называется f. Слова «функция» и «отображение» — синонимы.

Записи $f\colon x \longmapsto y$, или $x \xmapsto{f} y$, или $y = f(x)$ означают, что функция f отображает элемент x в элемент y (то же самое по смыслу, что «функция f принимает значение y на элементе x»). Обратите внимание: когда стрелка соединяет множества, то она «открытая», т. е. без поперечной палочки. А когда стрелка соединяет соответствующие друг другу элементы, то она «закрытая», т. е. с палочкой.

Формально функция $f\colon A \to B$ определяется как такое бинарное отношение $f \subset A \times B$, для которого выполнены два условия:

1) (*условие определенности всюду* на A). Для каждого $x \in A$ найдется такой $y \in B$, что $\langle x, y\rangle \in f$;

2) (*условие однозначности*). Если $\langle x, y_1\rangle \in f$ и $\langle x, y_2\rangle \in f$, то $y_1 = y_2$.

Бинарные отношения, для которых не выполняется условие однозначности, называют *многозначными функциями*. Многозначную функцию $f\colon A \to \to B$ можно интерпретировать как однозначную функцию $f\colon A \to 2^B$.

Бинарные отношения, для которых не выполняется условие определенности всюду, называют определенными не всюду функциями, или *частичными функциями*. Частичную функцию $f\colon A \to B$ можно интерпретировать как функцию, всюду определенную на множестве $\mathrm{Dom}\,(f) \subset A$, задаваемом условием $\mathrm{Dom}\,(f) = \{x \in A\colon \exists\, y \in B \mid \langle x, y\rangle \in f\}$. Множество $\mathrm{Dom}\,(f)$ называют *областью определения* (domain) функции f.

Несмотря на всё сказанное выше о многозначных и частичных функциях, по умолчанию (т. е. если явно не указано иное) фраза «f — функция из A в B» и записи $f\colon A \to B$, $y = f(x)$ всегда означают, что множества A и B непусты, а f — однозначное отображение. Будем также по умолчанию считать, что $\mathrm{Dom}\,(f) = A$.

Пусть $A \subset B$ и заданы функции $f\colon A \to C$ и $g\colon B \to C$, причём для каждого $x \in A$ выполняется $f(x) = g(x)$. В этом случае говорят, что функция f является *сужением* функции g на множество A, и что функция g является *продолжением* функции f на множество B. Этот факт обозначается так: $f = g\big|_A$ или так: $f \subset g$ (поскольку функции можно рассматривать как бинарные отношения, т. е. как множества).

Функция $f\colon A \to B$ называется:

— *инъективной*, инъекцией, теоретико-множественным вложением, если она переводит различные точки множества A в различные точки множества B, т. е. если из $f(a) = f(b)$ следует $a = b$. Иногда при этом пишут не $f\colon A \to B$, а $f\colon A \rightarrowtail B$;

— *сюръективной*, сюръекцией, теоретико-множественным наложением, «*отображением A на B*», если в каждую точку множества B она переводит хотя бы одну точку множества A. Иногда при этом пишут не $f\colon A \to B$, а $f\colon A \twoheadrightarrow B$;

— *биективной*, биекцией, 1–1-отображением, взаимно-однозначным отображением, если она одновременно инъекция и сюръекция.

Примеры.

1. Пусть $A = B = \mathbb{R}$ и $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $f_4(x) = x\sin(x)$. Тогда f_1 — биекция; f_2 — не инъекция (т. к. $1 \neq -1$, но $(1)^2 = (-1)^2$) и не сюръекция (т. к. нет такого $x \in \mathbb{R}$, что $x^2 = -1$); f_3 — инъекция, но не сюръекция; f_4 — сюръекция, но не инъекция.

2. Пусть $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$. Тогда $f(x) = x + 1$ — биекция между A и B.

3. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ — биекция между $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\mathbb{R}$.

Если $f\colon A \to B$ — функция, и обратное к $f \subset A \times B$ бинарное отношение $f^{-1} \subset B \times A$ удовлетворяет условиям однозначности и определенности всюду, то функция f называется *обратимой* (синоним: однозначно обратимой), а отношение f^{-1} называется *функцией, обратной к f*.

Если $f\colon A \to B$, то (f инъективно) $\iff$ (отношение f^{-1} удовлетворяет условию однозначности), и (f сюръективно) $\iff$ (отношение f^{-1} удовлетворяет условию определенности всюду на B). Таким образом, однозначная функция является биекцией тогда и только тогда, когда она обратима.

Если $f\colon A \to B$ и $B \supset B_1$, то множество $f^{-1}(B_1)$, определяемое равенством $f^{-1}(B_1) = \{x \in A\colon f(x) \in B_1\} \subset A$, называют *прообразом* (иногда — *полным прообразом*) *множества* B_1 при отображении f.

Если $A_1 \subset A$, то множество $f(A_1) = \{f(x)\colon x \in A_1\} \subset B$ называют *образом множества* A_1 при отображении f.

Для каждой функции $f\colon A \to B$ и каждого $B_1 \subset B$ имеет место $f\big(f^{-1}(B_1)\big) \subset B_1$, причем (для каждого $B_1 \subset B$ имеет место $f\big(f^{-1}(B_1)\big) = B_1$) $\iff$ (функция f сюръективна). Для каждой функции $f\colon A \to B$ и каждого $A_1 \subset A$ имеет место $A_1 \subset f^{-1}\big(f(A_1)\big)$, причем (для каждого $A_1 \subset A$ имеет место $A_1 = f^{-1}\big(f(A_1)\big)$) $\iff$ (функция f инъективна).

По функции $f\colon A \to B$ построим функцию $F\colon 2^B \to 2^A$, задав её так: точку $X \subset B$ множества 2^B функция F переводит в точку $F(X) = f^{-1}(X)$ множества 2^A. Можно доказать, что $(F\colon 2^B \rightarrowtail 2^A) \iff (f\colon A \twoheadrightarrow B)$, и что $(F\colon 2^B \twoheadrightarrow 2^A) \iff (f\colon A \rightarrowtail B)$.

Операция взятия полного прообраза коммутирует со всеми основными операциями над множествами. Имеется в виду следующее. Пусть I — некоторое непустое множество; если при каждом $\alpha \in I$ дано множество $B_\alpha \subset B$, то $\bigcup\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha) = f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\Big)$, $\bigcap\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha) = f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\Big)$. Если $B_1 \subset B$, то $f^{-1}(B \setminus B_1) = A \setminus f^{-1}(B_1)$. Эти свойства имеют большое значение при построении многих математических конструкций в общей топологии, в алгебре, в теории меры и т. д.

Операция взятия образа множества не обладает такими сильными свойствами, как операция взятия прообраза: вместо равенств здесь будут всего лишь включения в одну сторону. В качестве упражнения полезно установить это (т. е. привести примеры, где равенств нет).

Если A и B — множества, то символом A^B обозначается множество всех функций, определённых на B и принимающих значения в A, т. е. $A^B = \{f \mid f\colon B \to A\}$. Заметим, что последнее обозначение согласовано с введёнными ранее обозначениями с «показателями степени». В самом деле, между декартовой степенью $\mathbb{R}^n$ и множеством $\mathbb{R}^{\{1,\ldots,n\}}$ имеется естественное взаимно-однозначное соответствие: вещественная функция на n-точечном множестве — это упорядоченный набор n вещественных чисел. С другой стороны, между множеством 2^X всех подмножеств множества X и множеством $\{1,2\}^X$ тоже нетрудно установить биекцию: множеству $A \subset X$ поставим в соответствие функцию, которая на A принимает значение 1, а на $X \setminus A$ — значение 2.

Если хотят на письме функцию g выделить как самостоятельный математический объект, то выражение $x \longmapsto g(x)$ заключают в квадратные скобки. Запись $g = [x \longmapsto g(x)]$ означает: g — это то соответствие, которое элементу x сопоставляет элемент $g(x)$.

Рассмотрим три немного трудных, но зато весьма поучительных примера применения таких квадратных скобок.

1. Функцию f от двух переменных $x \in A$ и $y \in B$ со значениями в C, т. е. отображение $f\colon A \times B \to C$, можно рассматривать как функцию от первой переменной x, принимающую значения в множестве функций от второй переменной y, т. е. как отображение $f\colon A \to C^B$. При первом способе интерпретации грамотной будет запись $f\colon \langle x, y\rangle \longmapsto f(x,y)$, а при втором способе — запись $f\colon x \longmapsto [y \longmapsto f(x,y)]$. Классический случай совместного использования этих двух точек зрения на функцию двух переменных — это переход от двойного интеграла к повторному в математическом анализе.

2. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, V^* — пространство вещественных линейных функционалов над V, а V^{**} — пространство вещественных линейных функционалов над V^*. В курсе линейной алгебры доказывается, что функция $[V \ni y \longmapsto [V^* \ni x \longmapsto x(y) \in \mathbb{R}] \in V^{**}]$ осуществляет биекцию между V и V^{**}.

3. Пусть множество T обозначает некоторый временной интервал, а множество Ω в некотором смысле отвечает за случайность. Рассмотрим изучаемый на промежутке времени T случайный процесс ξ, который представляет собой функцию $\xi\colon \Omega \times T \to \mathbb{R}$. В зависимости от решаемой задачи бывает удобным один из двух подходов: рассматривать ξ как числовую случайную

величину, зависящую от времени, т. е. $\xi\colon t \longmapsto [\omega \longmapsto \xi(\omega, t)]$, или думать о ξ как о случайной величине, принимающей значения в множестве числовых функций времени, т. е. $\xi\colon \omega \longmapsto [t \longmapsto \xi(\omega, t)]$.

5. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Бинарное отношение на A называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Отношение порядка обычно обозначается символами вроде $\leq$, $\geq$, $\preccurlyeq$, $\succcurlyeq$. «Порядок» и «отношение порядка» — синонимы.

Антирефлексивное антисимметричное транзитивное отношение называется отношением *строгого порядка* и обозначается символами вроде $<$, $>$, $\prec$, $\succ$.

По порядку $\preccurlyeq$ можно построить строгий порядок $\prec$, удалив из графика отношения диагональ, т. е. объявив, что $x \prec y \iff (x \preccurlyeq y$ и $x \neq y)$. Аналогично, имея строгий порядок $\prec$, мы можем по нему построить порядок $\preccurlyeq$, добавив к графику диагональ, т. е. объявив, что $x \preccurlyeq y \iff (x \prec y$ или $x = y)$. Исходя из этого можно сказать, что следующие ниже утверждения У1 и У2 равносильны:

У1. На A задано отношение порядка $\preccurlyeq$.

У2. На A задано транзитивное отношение $\prec$, и для каждых двух разных элементов x и y множества A реализуется ровно одна из трех возможностей: 1) $x \succ y$, 2) $x \prec y$ или 3) x и y *несравнимы*, т. е. ни $x \succ y$, ни $x \prec y$.

Если отношение порядка не является связным (т. е. имеются несравнимые между собой элементы), то порядок называют *частичным*, а если все элементы сравнимы, то *линейным*. Множество, на котором введено отношение порядка (т. е. упорядоченная пара $\langle$множество, отношение порядка$\rangle$), называется *упорядоченным множеством*[4]. Обычный порядок $\leq$ на $\mathbb{R}$ линеен. Другой пример: пусть $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — множество множеств. Зададим на A отношение порядка, объявив, что $A_i \preccurlyeq A_j$ тогда и только тогда, когда $A_i \subset A_j$. Этот порядок на A частичен тогда и только тогда, когда найдутся множества A_i и A_j такие, что $A_i \setminus A_j \neq \varnothing$ и $A_j \setminus A_i \neq \varnothing$.

Пусть $\langle B, \leq \rangle$ — упорядоченное множество, и $A \subset B$. Множество A с унаследованным от B отношением порядка называется *упорядоченным подмножеством* упорядоченного множества B.

Элемент x упорядоченного множества B называется *минимальным* в B, если в множестве B нет такого элемента y, что $y < x$. Элемент x упорядоченного множества B называется *наименьшим* в B, если для всех $y \in B$ имеет место $x \leq y$. Если минимальных элементов несколько, то они между собой несравнимы; наименьших элементов может быть не больше одного. Аналогично, *наибольший элемент* — тот, который не меньше каждого, и *максимальный элемент* — тот, больше которого нет никакого. В линейно упорядоченном множестве минимальный элемент — то же самое, что наименьший, а максимальный — то же самое, что наибольший.

[4] Есть неудачная терминология, согласно которой упорядоченное множество называется частично упорядоченным, а для не линейно упорядоченных множеств никакой термин не вводится. Мы следуем в определениях классической книге [12].

Говорят, что множество A *плотно* (синоним: *является плотным подмножеством*) *в* содержащем его *упорядоченном множестве* $\langle B, \leq \rangle$, если для каждых элементов x и y множества B таких, что $x < y$, найдется элемент $a \in A$ такой, что $x < a < y$. Упорядоченное множество называется *плотным*, если оно является плотным подмножеством в себе.

Пусть $\langle B, \leq \rangle$ — линейно упорядоченное множество и $A \subset B$. Элемент $b \in B$ такой, что $b \geq a$ для всех $a \in A$, называется *верхней гранью*, или *мажорантой* множества A. Аналогично, элемент $b \in B$ такой, что $b \leq a$ для всех $a \in A$, называется *нижней гранью*, или *минорантой* множества A. Если для множества A в множестве B существует верхняя грань, то A называется *ограниченным сверху* в B. Если для множества A в множестве B существует нижняя грань, то A называется *ограниченным снизу* в B.

Наименьший элемент множества всех верхних граней множества A имеет название *точная верхняя грань* (синоним: *супремум*) множества A и обозначается $\sup A$. Наибольший элемент множества всех нижних граней множества A имеет название *точная нижняя грань* (синоним: *инфимум*) множества A и обозначается $\inf A$[5]. Линейно упорядоченное множество B будем называть *целостным*[6], если выполняется каждое из двух условий:

1) из того, что $\varnothing \neq A \subset B$ и A ограничено сверху, следует, что существует элемент $a^* \in B$, являющийся точной верхней гранью множества A;

2) из того, что $\varnothing \neq A \subset B$ и A ограничено снизу, следует, что существует элемент $a_* \in B$, являющийся точной нижней гранью множества A.

Заметим, что не обязательно $a^* \in A$, $a_* \in A$, т. е. множество A может обладать супремумом и инфимумом в множестве B, но эти два элемента не обязаны лежать в A.

Целостное плотное множество называется *непрерывным*[7]. Упорядоченное естественным порядком множество $\mathbb{R}$ — непрерывное (см. [29]), в отличие от множества $\mathbb{Q}$ (оно не целостно) и множества $\mathbb{Z}$ (оно не плотно).

Пусть $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle B, \leq_B \rangle$ — два упорядоченных множества. Говорят, что функция $f\colon A \to B$ *монотонна*, если для каждых элементов x и y множества A из $x \leq_A y$ следует $f(x) \leq_B f(y)$. Если f монотонна, является биекцией и f^{-1} также монотонна, т. е. если f — биекция и для каждых элементов x и y множества A имеет место $(x \leq_A y) \iff \big(f(x) \leq_B f(y)\big)$, то говорят, что f — *порядковый изоморфизм* (синоним: *изоморфизм порядков*). Если между $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle B, \leq_B \rangle$ можно установить порядковый изоморфизм, то говорят, что $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle B, \leq_B \rangle$ имеют одинаковый *порядковый тип*, и пишут $\operatorname{Ord}\langle A, \leq_A \rangle = \operatorname{Ord}\langle B, \leq_B \rangle$, или, если ясно, какие отношения порядка имеются в виду, просто $\operatorname{Ord} A = \operatorname{Ord} B$. Неформально говоря, порядковый тип — это то общее, что есть у всех порядково изоморфных множеств.

[5] Термины «точная верхняя/нижняя грань», «мажоранта», «миноранта», «супремум», «инфимум» в литературе трактуются однозначно, в соответствии с данными выше определениями. Термины «верхняя/нижняя грань» иногда наделяются смыслом точных верхней и нижней граней, однако лучше этого избегать.

Заметим, что «инфимум» иногда ошибочно произносят как «инфинум». Не следует этого делать — термин происходит от латинского infimum (infima), что означает «нижний». Например, Novogardia Infima (*лат., устар.*) — Нижний Новгород.

[6] Термин «целостное множество» не является общепринятым.

[7] Этот термин общепринят, значение для него дано общепринятое.

Множество называется *вполне упорядоченным*, если оно линейно упорядоченно и каждое его непустое подмножество имеет наименьший элемент. Множество $\mathbb{N}$ с отношением $\leq$ вполне упорядоченно. Множества $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ их естественными отношениями порядка упорядочиваются линейно, но не вполне, т. к. в подмножестве $\{\ldots, -3, -2, -1, 0\} \subset \mathbb{Z}$ нет наименьшего элемента.

Порядковые типы вполне упорядоченных множеств называют *ординалами* (синоним: *порядковыми числами*). Ординалы, соответствующие бесконечным вполне упорядоченным множествам, называют *трансфинитами*. Порядковый тип множества $\mathbb{N}$ с естественным порядком обозначается ω. Существует много ординалов. Например, порядковый тип множества $\mathbb{N}$, упорядоченного следующим образом: $1 < 3 < 5 < 7 < \ldots < 2 < 4 < 6 < 8 < \ldots$ является ординалом и обозначается $\omega + \omega$ или 2ω.

Теорема Цермело. *Каждое множество можно вполне упорядочить.*

Прелесть этой теоремы в том, что она применима к несчётным множествам, о которых речь пойдет далее.

Начальным отрезком в линейно упорядоченном множестве A называется всякое множество вида $A_x = \{a \in A\colon a \leq x\}$; при этом говорят, что *элемент* $x \in A$ *отсекает начальный отрезок* A_x. Если α и β — два ординала, то можно объявить по определению, что $\alpha \leq \beta \iff$ существуют множество A типа α и множество B типа β такие, что A изоморфно некоторому начальному отрезку в множестве B. Можно доказать, что такой порядок вполне упорядочивает каждое множество ординалов.

Обозначим через $P(n)$ утверждение, зависящее от натурального параметра $n \in \mathbb{N}$. (Например, $P_1(n) =$ (имеет место $n = 3 - 1$), $P_2(n) =$ (имеет место $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$), $P_3(n) =$ (в поле $\mathbb{C}$ алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность)[8]. Утверждение $P_1(n)$ верно только при $n = 2$, а остальные два — при каждом $n \in \mathbb{N}$.)

Для доказательства утверждений, зависящих от параметра $n \in \mathbb{N}$, служит

Принцип математической индукции.
Если для утверждения $P(n)$ выполнены

1) (*база индукции*) $P(1)$ *верно*;
2) (*шаг индукции*) для любого $k \in \mathbb{N}$ из того, что верно $P(k)$ (*эту посылку называют* ***предположением индукции***), *следует, что верно* $P(k+1)$,

то утверждение $P(n)$ верно при всех $n \in \mathbb{N}$.

Шаг индукции допускает равносильную формулировку: для любого $k \in \mathbb{N}$ из того, что верны $P(1)$, $P(2)$, …, $P(k)$, следует, что верно $P(k+1)$.

Принцип математической индукции логически эквивалентен тому, что множество $\mathbb{N}$ вполне упорядоченно. Образно его можно выразить так. Представим себе начинающуюся у земли и уходящую в небо лестницу с бесконечным числом ступенек. Если некто стоит на первой ступеньке (есть база индукции) и с любой ступеньки он всегда может сделать шаг на следующую

[8] $P_3(n)$ называется основной теоремой алгебры и подробно разбирается в [28]. О поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно прочитать в [33].

за ней (есть индукционный шаг), то он сможет взойти по лестнице сколь угодно высоко, т. е. до любой по счёту ступеньки.

По аналогии с принципом математической индукции формулируется

Принцип трансфинитной индукции. *Пусть A — вполне упорядоченное множество, a_* — его наименьший элемент и $P(a)$ — утверждение, зависящее от параметра $a \in A$. Если*

1) (*база индукции*) *$P(a_*)$ верно*;
2) (*шаг индукции*) *для любого $a \in A$ из того, что $P(x)$ верно для всех $x < a$, следует, что верно $P(a)$,*

то $P(a)$ верно для всех $a \in A$.

Докажем принцип трансфинитной индукции методом «от противного». В самом деле, пусть $B \subset A$ — множество всех тех элементов b, для которых $P(b)$ не верно, т. е. $(b \in B) \iff (P(b)$ ложно$)$. Пусть $B \neq \varnothing$. Множество A вполне упорядоченно, следовательно, в B есть наименьший элемент b_*. Это значит, что $P(a)$ верно для всех $a < b_*$, следовательно, согласно индукционному шагу, $P(b_*)$ также должно быть верно. Полученное противоречие завершает доказательство.

Подробнее о принципе трансфинитной индукции и об арифметике ординалов см. в [6, 21].

Цепью в упорядоченном множестве называется каждое его линейно упорядоченное подмножество.

На множестве всех цепей в упорядоченном множестве A можно ввести порядок $\leq$, положив для цепей l_1, l_2 по определению: $l_1 \leq l_2 \iff l_1 \subset l_2$. Следующие утверждения показывают, что в упорядоченном таким образом множестве всех цепей каждый элемент мажорируется некоторым максимальным элементом.

Теорема Хаусдорфа. *В каждом упорядоченном множестве каждая цепь содержится в некоторой максимальной цепи.*

Лемма Цорна. *Если в упорядоченном множестве для каждой цепи имеется верхняя грань, то оно содержит максимальный элемент.*

Заметим, что лемма Цорна и теорема Хаусдорфа — утверждения о частично упорядоченных множествах, поскольку если в A более одного элемента, то среди цепей в A есть непересекающиеся.

Упорядоченное множество M называют *направленным*, если для каждых $a \in M$ и $b \in M$ найдется такой элемент $c \in M$, что $c \geq a$ и $c \geq b$. Всякое линейно упорядоченное множество направленно. Иногда различают понятия направленного множества по возрастанию и по убыванию (в последнем случае требуют, чтобы для каждых $a \in M$ и $b \in M$ существовал такой элемент $c \in M$, что $c \leq a$ и $c \leq b$). Рассмотрим множество всех открытых интервалов, содержащих точку $x \in \mathbb{R}$; если упорядочить это множество по включению, то оно, не являясь линейно упорядоченным, будет направленным и по возрастанию, и по убыванию.

Если множество M направленно, то функция $f\colon M \to X$ называется *направленностью* элементов множества X. Важным частным случаем направленности является *числовая последовательность* $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$.

Другой важный пример направленности — множество всех разбиений отрезка $[a, b]$ конечным числом точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$; говорят, что первое разбиение мажорируется вторым, если второе может быть получено из первого путем измельчения (добавления новых разбивающих отрезок точек). Обсуждаемая в курсе математического анализа *база множеств* тоже представляет собой направленное множество. Понятие предела направленности играет важную роль в общей топологии и математическом анализе, см. [7] и [17].

Бинарное отношение называется *отношением предпочтения*, если оно связно и транзитивно. Отношения предпочтения обозначают обычно значками $\precsim$ и $\succsim$. Отношение предпочтения — одно из центральных понятий микроэкономики. Если X — непустое множество товаров, то функция полезности $f\colon X \to \mathbb{R}$ порождает на X отношение предпочтения $\precsim_f$ по правилу: $(a \precsim_f b) \iff \big(f(a) \le f(b)\big)$. Оказывается, не каждое отношение предпочтения может быть задано функцией полезности.

По отношению предпочтения $\precsim$ можно построить отношение эквивалентности $\sim$, объявив, что $a \sim b \iff (a \precsim b$ и $b \precsim a)$. Далее можно построить отношение линейного порядка $\le$ на фактор-множестве, положив $K_a \le K_b \iff$ $\iff a \precsim b$. Если в фактор-множестве при этом будет наибольший элемент K, то K называется *аргмаксимумом предпочтений*.

6. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Говорят, что у множеств A и B *одинаковая мощность*, или что A и B *равномощны*, и пишут $|A| = |B|$, если между A и B можно установить биекцию. Если X — множество, то символом $|X|$ (или $\#X$, или $\mathrm{card}\,(X)$) обозначается *мощность* (синоним: кардинальное число) множества X. Неформально говоря, мощность — это то общее, что есть у равномощных множеств.

Интуитивно ясное понятие *конечного множества* может быть описано различными способами[9]: множество A называется конечным, если выполняется любое из трех условий:

— A не равномощно никакому своему собственному подмножеству;

— A равномощно множеству $\{n \in \mathbb{N} \colon n < n_0\}$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$;

— A не имеет подмножества, равномощного множеству $\mathbb{N}$.

Множество называется *бесконечным*, если оно не является конечным.

Если множество X конечно, то по определению $|X|$ — это число элементов в множестве X. В частности, пустое множество конечно и $|\varnothing| = 0$.

Если множество X бесконечно, то говорят, что у множества X:

— *счётная* мощность, если можно установить биекцию между X и $\mathbb{N}$;

— мощность *континуум*, если можно установить биекцию между X и $\mathbb{R}$;

— мощность *гиперконтинуум*, если существует биекция между X и $2^{\mathbb{R}}$.

Все указанные выше мощности различны, т. е., например, нельзя установить биекцию между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$, хотя оба множества бесконечны — это можно

[9] В статье [1] приводится восемь определений конечного множества. Аксиома выбора (о ней речь пойдет далее) позволяет доказать, что все они эквивалентны.

показать, например, с помощью *диагональной процедуры Кантора*; этот пример показывает, что конечно/бесконечно — весьма грубая характеризация количества содержащихся во множестве элементов.

Примеры счётных множеств: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\cap[a,b]$, множество всех многочленов от переменной x с рациональными коэффициентами.

Примеры множеств мощности континуум: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $[a,b]$, (a,b), $(-\infty,a)$, (a,∞), $C[a,b]$, $2^{\mathbb{N}}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\{0,1,2,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *множество Кантора*.

Примеры множеств мощности гиперконтинуум: $2^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{[a,b]}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Следующие три условия логически эквивалентны между собой.

1. Множество B имеет подмножество, равномощное A.

2. Существует инъективная функция, отображающая A в B.

3. Существует сюръективная функция, отображающая B на A.

Если выполняется любое из этих трех условий, то говорят, что *мощность множества A не больше мощности множества B*, и пишут $|A|\le|B|$. Если $|A|\le|B|$, но $|A|\ne|B|$, то говорят, что мощность множества A меньше мощности множества B, и пишут $|A|<|B|$.

Теорема Кантора – Шрёдера – Бернштейна. *Если $|A|\le|B|$ и $|A|\ge\ge|B|$, то $|A|=|B|$.*

Если множество A конечно или счётно, т. е. если $|A|\le|\mathbb{N}|$, то говорят, что A *не более чем счётно*[10]. Если множество A не конечно и не счётно, т. е. если $|A|>|\mathbb{N}|$, то A называют *несчётным*.

Пусть $1\le n<k$, $|A_n|=n$, $|A_k|=k$. Пусть множество B счётно, множество C имеет мощность континуума, множество D имеет мощность гиперконтинуума. Тогда: 1) $|\varnothing|<|A_n|<|A_k|<|B|<|C|<|D|$; 2) множества $\varnothing$, A_n, A_k, B не более чем счётны; 3) множества C и D несчётны.

Верны следующие утверждения.

1) Для конечных множеств A и B выполняются соотношения: $|A\times B|==|A|\cdot|B|$, $|A^B|=|A|^{|B|}$ и $\left|2^A\right|=2^{|A|}$.

2) Для любых множеств A, B, C имеет место $\left|\left(A^B\right)^C\right|=\left|A^{B\times C}\right|$.

3) Если множество A бесконечно, то для каждого непустого множества B выполняется соотношение $|A\times B|=\max(|A|,|B|)$.

4) Если множество X таково, что существует такое множество Y, что $X==Y^{\mathbb{N}}$, то $|X|=|X^{\mathbb{N}}|$. Иными словами, если множество X реализовано как множество последовательностей элементов некоторого множества, то множество последовательностей элементов множества X имеет ту же мощность, что и множество X.

5) Если множество A бесконечно и $n\in\mathbb{N}$, то $|A|=|A^n|$.

6) Если множество A бесконечно, то множество всех конечных подмножеств множества A имеет ту же мощность, что и множество A.

7) Объединение не более чем счётного множества не более чем счётных множеств является не более чем счётным множеством.

8) **Теорема Кантора.** *Для каждого множества X имеет место неравенство $\left|2^X\right|>|X|$.*

[10] В иностранной литературе иногда счётные и не более чем счётные множества называют одним словом countable.

Для конечных множеств это очевидно, поскольку $2^n > n$; в случае бесконечных множеств это означает, что X в 2^X можно отобразить инъективно (например, так: $X \ni x \longmapsto \{x\} \in 2^X$), но нельзя сюръективно.

Из теоремы Кантора следует, что не существует множества, имеющего самую большую мощность. Различных мощностей бесконечных множеств существует бесконечно много; в частности, в последовательности множеств $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{R}}$, $2^{2^{\mathbb{R}}}, \ldots$ равномощных множеств нет.

Пусть $\Psi = \{\ldots, A, \ldots, B, \ldots\}$ — некоторое множество множеств. (Как мы увидим далее, «множество всех множеств» — некорректный объект.) На Ψ можно задать отношение эквивалентности $\sim$, объявив, что $A \sim B \iff \iff |A| = |B|$. Можно задать на Ψ отношение порядка $\preccurlyeq$, объявив, что $A \preccurlyeq B \iff |A| \leq |B|$. При этом получится, что $A \prec B \iff |A| < |B|$.

Одна из аксиом теории множеств (аксиома выбора) позволяет доказать, что для каждого Ψ порядок $\preccurlyeq$ линеен, т. е. что каждые два множества сравнимы между собой по мощности. Однако та же аксиома выбора позволяет доказать, что можно шар в $\mathbb{R}^3$ разделить на пять частей так, что из получившихся частей можно сложить два шара такого же радиуса (*разбиение Банаха – Тарского* [36]).

Осуществимость данного разбиения кажется парадоксальной, поскольку противоречит нашей повседневной интуиции. В самом деле, ведь нельзя же из одного апельсина сделать два только с помощью ножа! Поэтому в середине XX века некоторые математики даже думали отказаться от аксиомы выбора и не опираться на неё в своей работе.

Однако вскоре выяснилось, что отказ от аксиомы выбора чрезвычайно обедняет математические построения. В частности, даже при доказательстве эквивалентности определений непрерывности функции по Коши и по Гейне не обойтись без аксиомы выбора. Она позволяет строить изящные примеры, в том числе с её помощью устанавливается существование неизмеримого по Лебегу множества вещественных чисел (см. [16, 36]), алгебраического базиса (синоним: базиса Гамеля) в векторном пространстве и некоторых других полезных в математической работе объектов. На лемме Цорна явным образом основывается доказательство одной из центральных теорем функционального анализа — теоремы Хана – Банаха [21], без которой теория линейных операторов в бесконечномерных пространствах будет выглядеть, образно говоря, как ощипанная курица.

Оказалось, что следующие утверждения — аксиома выбора, лемма Цорна, теорема Цермело, теорема Хаусдорфа — логически эквивалентны друг другу. Доказательство этих эквивалентностей имеется в [25, гл. 1]. Кроме того, почти очевидно, что аксиома выбора логически эквивалентна утверждению о том, что декартово произведение произвольного непустого множества непустых множеств является непустым множеством.

Аксиома выбора утверждает «всего лишь» следующее: для каждого непустого набора непустых непересекающихся множеств набор элементов, содержащий ровно по одной точке каждого из этих множеств, образует множество (даже если не указан конкретный способ выбора этих элементов).

Подчеркнём, что аксиома выбора не даёт алгоритма построения того или иного множества, а лишь утверждает его существование. В частности, нет явной последовательности действий, позволившей бы осуществить разбиение Банаха – Тарского.

В самом начале XX века выяснилось, что если под множествами понимать «слишком большие» совокупности, то возникают неприятности — так называемые парадоксы теории множеств. Парадокс — это такая ситуация, когда кажутся доказанными два противоречащих друг другу утверждения. Например, парадоксы возникают, если считать множеством объект «множество всех множеств». Обозначим этот объект M. Тогда каждое его подмножество должно также быть и его элементом, т. е. $2^M \subset M$, следовательно, $|2^M| \le |M|$, что противоречит теореме Кантора. Кроме того, в M можно выделить подмножество $R = \{x \in M\colon x \notin x\}$. Содержит ли R себя в качестве элемента? *Парадокс Рассела*: неверны оба утверждения $R \in R$ и $R \notin R$. Это непосредственно следует из определения множества R.

Бывает так, что относительно совокупности объектов не уточняется, можно ли её называть множеством или же это приведёт к возникновению парадокса типа парадокса Рассела. Такую совокупность называют «*классом*». Классом можно назвать и множество, но не каждый класс является множеством. Применительно, например, к топологии это означает, что «класс всех топологических пространств» — корректное понятие, а «множество всех топологических пространств» — некорректное понятие. Попытка строить утверждения о *множествах* неопределенно большой мощности чревата возникновением разновидности парадокса Рассела. Подробнее о классах см. в приложении к книге [19].

При построении теории множеств следует разделять два подхода: *аксиоматический* (явно вводятся аксиомы) и *наивный* (на первый взгляд аксиомы будто бы не используются). Существует несколько вариантов систем аксиом теории множеств. Самые популярные — это «аксиомы Цермело – Френкеля плюс аксиома выбора», обозначается ZFC, см. [17], и «аксиоматика Гёделя – Бернайса». Аксиомы «сдерживают» математика, не позволяя ему «строить» «слишком большие» множества, и тем самым уберегают его от парадокса Рассела, но все же при этом «разрешенных» множеств оказывается достаточно для того, чтобы доказывать содержательные теоремы. По состоянию на 2011 г. непротиворечивость ни одной из известных систем аксиом теории множеств не доказана (и в некотором смысле не может быть доказана в принципе — в связи с этим см. теоремы Гёделя о логической полноте [14] и неполноте [11]), однако до сих пор никаких противоречий при оперировании в рамках этих систем аксиом не выявлено.

Наивная теория множеств противоречива, потому что в ней нет препятствий для рассмотрения «множества всех множеств». Однако можно применить следующий трюк: в начале рассуждения фиксировать некоторое множество U, в существовании которого нет сомнений. Если после этого делать любые утверждения о подмножествах множества U, то парадокс Рассела не возникнет.

Континуум-гипотеза: континуум — самая маленькая среди всех несчётных мощностей, то есть нет такого множества A, что $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$.

В середине XX века математики доказали [22], что континуум-гипотеза логически независима от аксиом теории множеств. Поэтому нельзя сказать, «верна» она или «неверна»: можно принять за аксиому либо её саму, либо её логическое отрицание.

Обобщенная континуум-гипотеза: для каждого бесконечного множества X не существует такого множества A, что $|X| < |A| < \left|2^X\right|$.

Оказывается, из обобщенной континуум-гипотезы можно вывести аксиому выбора.

В заключение опишем формальное определение понятий «мощность» и «порядковый тип». Ранее мы неформально сказали, что мощность — это то общее, что есть у равномощных множеств. Теперь мы готовы сказать, что же представляет из себя это самое «то общее». *Мощность* (синоним: *кардинал*) множества A — это класс всех таких множеств B, что существует биекция между A и B.

Для наиболее часто используемых кардиналов в математической литературе используются следующие обозначения:

$\mathbf{0} = |\varnothing|$ — нулевой кардинал;

$\mathbf{n} = |\{1, \ldots, n\}|$ — конечный ненулевой кардинал (кардинал мощности n), причем для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ свой кардинал $\mathbf{n}$;

$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ — счётный кардинал, он же первый (самый маленький) бесконечный кардинал. Символ $\aleph_0$ читается «алеф-ноль». Алеф — первая буква древнееврейского алфавита;

$\mathbf{c} = |\mathbb{R}| = \left|2^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$ — кардинал «континуум»;

$\aleph_1$ — первый (самый маленький) несчётный кардинал. Из определения $\aleph_1$ следует, что $\aleph_1 \le \mathbf{c}$. Континуум-гипотеза утверждает, что $\aleph_1 = \mathbf{c}$;

$2^{\mathbf{c}} = \left|2^{\mathbb{R}}\right|$ — кардинал «гиперконтинуум». Иногда гиперконтинуумом называют всякий кардинал, больший континуума.

Порядковый тип $\operatorname{Ord} A$ упорядоченного множества $\langle A, \le_A \rangle$ формально определяется как класс всех таких упорядоченных множеств $\langle B, \le_B \rangle$, что между $\langle A, \le_A \rangle$ и $\langle B, \le_B \rangle$ можно установить порядковый изоморфизм. Выше было отмечено, что каждое множество ординалов можно вполне упорядочить. Следовательно, среди ординалов, соответствующих счётным вполне упорядоченным множествам, существует наименьший; это $\omega = \operatorname{Ord} \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ рассмотрено с обычным отношением порядка. Иногда (см. [21]) для $\operatorname{Ord} \mathbb{N}$ используют обозначение ω_0, а не ω. Наименьший среди ординалов, соответствующих несчётным вполне упорядоченным множествам, обозначается ω_1.

Кроме того, дабы не плодить слишком много обозначений, часто используется следующее соглашение: всякий кардинал τ обозначают тем же символом, что и наименьший среди ординалов, задающих порядковый тип на множествах мощности τ. В соответствии с этим, в частности, мощность множества натуральных чисел часто обозначают символом ω вместо $\aleph_0$. Иногда ординалом данного упорядоченного множества называют не класс порядково изоморфных ему упорядоченных множеств, а какого-то яркого представителя этого класса. При таком подходе получаем, в частности, что $\aleph_0 = |\mathbb{N}| = \operatorname{Ord}(\mathbb{N}) = \omega = \mathbb{N}$. Дальнейшие подробности см. в [3, 4, 6, 9, 19].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Желающим продолжить знакомство с элементарной теорией множеств и началами математики рекомендуется посмотреть книги [34, 10, 23] и [26], сборник [14] (особенно ч. 1), а также гл. 1 в [21] и гл. 1 в [25]. Отметим и ориентированное на неспециалистов в области теории множеств приложение к книге [19], где обсуждается одна из возможных аксиоматик теории множеств.

Подробное изложение теории множеств как самостоятельной дисциплины можно найти в классических книгах [13, 22, 24] и [30], а также в вышедших позднее учебниках [3, 4, 5]. Следует быть готовым к тому, что при сфокусированном изучении теории множеств некоторые понятия будут введены в рассмотрение не так, как это сделано в настоящем пособии, предназначенном лишь для первичного ознакомления с предметом.

Кроме перечисленных выше, в список литературы включены дополнительно книги [2, 8, 15, 18, 20, 31, 35].

ЛИТЕРАТУРА[11]

1. De la Cruz O. Finiteness and choice // Fundamenta Mathematicae. 2002. № 173. P. 57–76.
2. Ferreirys J. Labyrinth of Thought: A history of set theory and its role in modern mathematics. — Basel: Birkhauser, 2007.
3. Foreman M., Kanamori A. Handbook of Set Theory. — Springer, 2010.
4. Hrbacek K., Jech T. Introduction to Set Theory. — Marcel Dekker, 1999.
5. Jech Th. Set Theory: Third Millennium Edition. — Springer Monographs in Mathematics, Berlin, New York: Springer-Verlag, 2003.
6. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Физматлит, 2009.
7. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979.
8. Архангельский А. В. Канторовская теория множеств. — М.: МГУ, 1988.
9. Барвайс Дж. Справочная книга по математической логике. Часть 2: теория множеств. — М.: Наука, 1982.
10. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика // Математика в техническом университете. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.
11. Беклемишев Л. Д. Теоремы Гёделя о неполноте и границы их применимости. I // УМН. 2010. Т. 65, вып. 5 (395). С. 61–106.
12. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.
13. Бурбаки Н. Теория множеств. — М.: Мир, 1965.
14. Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. — М.: МЦНМО, 2002. В трех частях.
15. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. — М.: МЦНМО, 2007.
16. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. — УРСС, 2010.
17. Зорич В. А. Математический анализ. Том 1. — М.: МЦНМО, 2007.
18. Кантор Г. Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985.

[11] Большинство из указанных выше книг можно бесплатно скачать с сайта http://www.mccme.ru/free-books/ или бесплатно читать на сайте http://lib.mexmat.ru/

19. Келли Дж. Общая топология. — М.: Наука, 1982.
20. Клайн М. Математика. Утрата определённости. — М.: Римис, 2007.
21. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2006.
22. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. — УРСС, 2010.
23. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2001.
24. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970.
25. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — СПб.: Лань, 2007.
26. Маклейн С. Категории для работающего математика. — М.: Физматлит, 2004.
27. Ремизов И. Д. Стандартные обозначения и факты теории множеств. — М.: Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011.
28. Тихомиров В. М., Успенский В. В. Десять доказательств основной теоремы алгебры // Матем. просв. №1. С. 50–70. — М.: МЦНМО, 1997.
29. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. — М.: Физматлит, 2007.
30. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. — М.: Либроком, 2010.
31. Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М: ЛКИ, 2010.
32. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — Эдиториал УРСС, 2004.
33. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. В 2 частях. Часть 1. Функции одного переменного. — СПб.: Лань, 2004.
34. Шиханович Ю. А. Введение в современную математику. Начальные понятия. — М.: Наука, 1965.
35. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
36. Ященко И. В. Парадоксы теории множеств. — М.: МЦНМО, 2002.

Поступила 20.05.2011

STANDARD FACTS AND NOTATIONS OF THE SET THEORY

I. D. Remizov

The article is the slightly modified text of the primer for the first-year students of the Department of Mechanics and Mathematics of the Lomonosov Moscow State University. It gives a brief introduction to some general facts and notations of the Set Theory widely used in Higher Mathematics. The concise style of narration allowed to touch upon a variety of topics within a rather short paper. The text does not dwell upon proofs, but a bibliography list is given for those interested in a more detailed discussion.

Keywords: mathematics, set-theoretical approach, terminology, standard facts, first-year students.