СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.537.3 + 378.147

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СТЕПЕННЫХ И ДВУСТОРОННИХ СТЕПЕННЫХ РЯДАХ

С. В. Костин

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)
Россия, 119454, г. Москва, пр. Вернадского, 78;
e-mail: kostinsv77@mail.ru

Обсуждается ряд вопросов, связанных со степенными и двусторонними степенными рядами. Предложено несколько нововведений, которые должны сделать учебный материал более логичным и доступным для студентов.

Ключевые слова: ТФКП, степенной ряд, двусторонний степенной ряд, ряд Тейлора, ряд Лорана.

§ 1. Введение

Понятия «степенной ряд» и «двусторонний степенной ряд» являются одними из важнейших понятий теории функций комплексной переменной (ТФКП). Изучение литературы показало, что некоторые вопросы, связанные с этими понятиями, трактуются в части книг и учебников по ТФКП, по нашему мнению, не совсем корректно или не совсем удачно. Целью данной статьи является уточнение ряда определений и формулировок.

В нашей статье мы рассматриваем следующие ряды[1]:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \quad (\text{ряд } \ \Sigma_1), \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \quad (\text{ряд } \ \Sigma_2), \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad (\text{ряд } \ \Sigma_3). \tag{3}$$

Здесь z_0 и c_n $(n \in \mathbb{Z})$ — фиксированные комплексные числа, а z — переменная, принимающая комплексные значения. Число z_0 называется *центром* рядов (1), (2) и (3), а числа c_n $(n \in \mathbb{Z})$ называются *коэффициентами* рядов (1), (2) и (3).

[1] Для краткого обозначения рядов мы используем прописную греческую букву Σ («сигма»), возможно, с верхними и (или) нижними индексами. Использование для обозначения рядов буквы Σ вполне логично, так как она служит в математике для компактной записи рядов и конечных сумм. Отметим, что краткое обозначение рядов с помощью прописной греческой буквы Σ можно встретить, в частности, в книге [1].

Символом[2] $K_R(z_0)$ $(0 < R \leqslant +\infty)$ мы обозначаем множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$. Множество $K_R(z_0)$ называется *кругом* радиуса R с центром в точке z_0.

Символом[3] $K_{r,\,R}(z_0)$ $(0 \leqslant r < R \leqslant +\infty)$ мы обозначаем множество $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$. Множество $K_{r,\,R}(z_0)$ называется *кольцом* с внутренним радиусом r, внешним радиусом R и центром в точке z_0.

Отметим, что наша статья носит методический характер. Форма статьи может показаться несколько необычной: в заголовок параграфа мы выносим тот вопрос, который обсуждается в этом параграфе.

§ 2. Является ли ряд (1) функциональным рядом?

В некоторых книгах (см., например, [2, 3]) написано, что ряд (1) является функциональным рядом. По нашему мнению, это не совсем точно. Говорить, что (1) — это функциональный ряд, можно лишь в том случае, если функциональный ряд был определен как ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(z)$, тогда как обычно функциональный ряд определяется как ряд вида $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} u_n(z)$. Здесь p — целое число, с которого начинается нумерация членов функционального ряда (обычно $p = 1$ или $p = 0$).

По нашему мнению, правильнее говорить, что (1) — это *двусторонний*[4] функциональный ряд. При этом, естественно, надо дать определение двустороннего функционального ряда, а также определение того, что значит, что двусторонний функциональный ряд сходится (абсолютно сходится, условно сходится, расходится) в данной точке $z_1 \in \mathbb{C}$. Отметим, что обычный (то есть не двусторонний) функциональный ряд логично называть односторонним функциональным рядом (см., например, [4]).

Односторонний функциональный ряд $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} u_n(z)$ иногда записывают в виде $\sum\limits_{n=-\infty}^{-p} u_{-n}(z)$. В частности, ряд (3) иногда записывают в виде $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n$. Мы считаем, что это, по существу, тот же самый односторонний функциональный ряд, правда, по другому записанный (а именно изменен знак у индекса суммирования).

Двусторонний функциональный ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(z)$ называется сходящимся в точке $z_1 \in \mathbb{C}$, если в точке z_1 сходятся два односторонних функциональных

[2] Использование в символе $K_R(z_0)$ прописной латинской буквы K связано с тем, что эта буква является первой буквой немецкого слова der Kreis — круг.

[3] Использование в символе $K_{r,\,R}(z_0)$ прописной латинской буквы K обусловлено соображениями единообразия с символом $K_R(z_0)$.

[4] В русском языке существует как прилагательное «двусторонний», так и прилагательное «двухсторонний». Сколько-нибудь заметного семантического или стилистического различия между этими прилагательными нет. По традиции в математике обычно используется прилагательное «двусторонний» («двусторонний ряд», «двусторонняя поверхность», «двустороннее преобразование Лапласа» и т. д.).

ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{-n}(z)$. При этом суммой двустороннего функционального ряда называется сумма сумм этих двух односторонних функциональных рядов.

Равносильное определение: двусторонний функциональный ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(z)$ называется сходящимся в точке $z_1 \in \mathbb{C}$, если в точке z_1 определены все члены этого ряда (то есть все функции $u_n(z)$, $n \in \mathbb{Z}$) и если существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty \\ n\to+\infty}} \sum\limits_{k=-m}^{n} u_k(z_1)$, где натуральные числа m и n стремятся к $+\infty$ независимо друг от друга. При этом суммой двустороннего функционального ряда называется значение этого предела[5].

По нашему мнению, для того чтобы понятие двустороннего функционального ряда лучше воспринималось студентами, изучению двусторонних функциональных рядов должно предшествовать изучение двусторонних числовых рядов. К сожалению, в подавляющем большинстве учебников высшей математики и математического анализа (как действительного, так и комплексного) двусторонние числовые ряды вообще не рассматриваются. Это приводит к тому, что студенты психологически и интеллектуально не готовы к знакомству с двусторонними функциональными рядами и, как следствие, плохо усваивают эту тему.

Отметим, что одной из немногочисленных книг, в которых рассматриваются двусторонние числовые ряды, является книга [4].

§ 3. Как следует называть ряд (1)?

В некоторых книгах (см., например, [2, 3, 5–8]) двусторонний функциональный ряд (1) называют рядом Лорана. Такая терминология представляется нам не очень удачной. Дело в том, что понятие «ряд Лорана» тесно связано с понятием «ряд Тейлора». Поскольку произвольный ряд (2) называют не «ряд Тейлора», а «степенной ряд», то и произвольный ряд (1) лучше называть не «ряд Лорана», а как-то иначе.

По нашему мнению, наиболее удачным термином для двустороннего функционального ряда (1) является термин «двусторонний степенной ряд». Что касается функционального ряда (3), то для него мы предлагаем использовать термин «степенной ряд по отрицательным степеням» (в отличие от обычного степенного ряда (2), который можно называть также «степенной

[5] Отметим, что наряду с приведенным определением сходимости двустороннего функционального ряда, когда натуральные числа m и n стремятся к $+\infty$ независимо друг от друга, существует также понятие сходимости двустороннего функционального ряда в смысле главного значения. Суммой двустороннего функционального ряда в смысле главного значения называется число V. P. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=-n}^{n} u_k(z)$, если предел в правой части равенства существует и конечен. Заметим, что в книге [4] вместо термина «сумма двустороннего ряда в смысле главного значения» используется термин «симметричная сумма двустороннего ряда».

ряд по неотрицательным степеням»). Такая терминология, по нашему мнению, лучше подчеркивает тесную связь рядов (1), (2) и (3).

Отметим, что термин «двусторонний степенной ряд» применительно к ряду (1) используется, например, в книге [9]. В книге [10] используется термин «обобщенный степенной ряд».

Нам представляется, что прилагательное «двусторонний» в данном случае предпочтительнее, чем прилагательное «обобщенный». Дело в том, что слово «обобщенный» предполагает, что одно понятие входит в состав другого как частный случай. Здесь же это не совсем так. Степенной ряд, если подходить абсолютно формально, не является частным случаем двустороннего степенного ряда хотя бы потому, что степенной ряд (2) имеет множество определения[6] $V(\Sigma_2) = V_{\mathbb{C}}(\Sigma_2) = \mathbb{C}$, а двусторонний степенной ряд (1) имеет множество определения $V(\Sigma_1) = V_{\mathbb{C}}(\Sigma_1) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Ситуация остается такой, даже если все коэффициенты c_n, $n < 0$, равны нулю. Поясняющий пример: $f(x) = 0$ и $g(x) = \dfrac{0}{x}$ — это разные функции (поскольку они имеют разные множества определения), хотя эти функции и совпадают при всех $x \neq 0$.

В заключение этого параграфа отметим, что если в степенном ряде по отрицательным степеням (3) сделать замену переменной $w = \dfrac{1}{z - z_0}$, то ряд (3) превратится в степенной ряд относительно переменной w с центром в точке $w_0 = 0$. Однако надо иметь в виду, что множество определения $V(\Sigma)$ полученного степенного ряда Σ совпадает не со всей комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, а с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ с выколотой точкой $w = 0$, поскольку переменная w не может принимать значение 0.

§ 4. Является ли ряд (1) суммой рядов (2) и (3)?

В некоторых книгах (см., например, [6–8]) написано, что ряд (1) является суммой рядов (2) и (3). По нашему мнению, это не совсем точно. Если формально исходить из определения суммы рядов, то суммой функциональных рядов (2) и (3) является функциональный ряд

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \right) \quad (\text{ряд } \Sigma_4). \tag{4}$$

[6] Множество определения функционального (или двустороннего функционального) ряда Σ мы обозначаем символом $V(\Sigma)$. Множество $V(\Sigma)$, по определению, является пересечением множеств определения всех членов ряда Σ.

Если члены ряда Σ заданы с помощью формул и множество определения $V(\Sigma)$ ряда Σ не указано явно, то обычно считают, что множество определения $V(\Sigma)$ ряда Σ совпадает либо с естественным множеством определения $V_{\mathbb{R}}(\Sigma)$ ряда Σ над полем действительных чисел, либо с естественным множеством определения $V_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ ряда Σ над полем комплексных чисел. Множество $V_{\mathbb{R}}(\Sigma)$ ($V_{\mathbb{C}}(\Sigma)$), по определению, является пересечением естественных множеств определения над полем действительных (комплексных) чисел всех членов ряда Σ.

Отметим, что об определении естественного множества определения функции, заданной формулой, а также о том, почему для обозначения множества определения мы используем латинскую букву V, можно прочитать в нашей статье [11].

Функциональный ряд (4) не совпадает с двусторонним степенным рядом (1). Можно привести пример, когда в некоторой точке $z_1 \in \mathbb{C}$ функциональный ряд (4) сходится, а двусторонний степенной ряд (1) расходится. Дело в том, что двусторонний степенной ряд (1), по определению, сходится в точке z_1 тогда и только тогда, когда в точке z_1 сходится каждый из рядов (2) и (3). В то же время функциональный ряд (4) может сходиться в точке z_1 и в том случае, когда каждый из рядов (2) и (3) в точке z_1 расходится.

Пусть, например, $z_0 = 0$, $c_n = (-1)^n$, если $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $c_{-n} = (-1)^{n+1}$, если $n \in \mathbb{N}$. Ряды (2), (3) и (4) в этом случае имеют следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n}, \qquad 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right).$$

Ряд (2) имеет множество сходимости[7] $E_c(\Sigma_2) = K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Ряд (3) имеет множество сходимости $E_c(\Sigma_3) = K_{1,+\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$. Отсюда следует, что двусторонний степенной ряд (1) имеет множество сходимости $E_c(\Sigma_1) = E_c(\Sigma_2) \cap E_c(\Sigma_3) = \varnothing$. В то же время функциональный ряд (4), как несложно доказать, имеет множество сходимости $E_c(\Sigma_4) = \{-1, 1\}$.

Видимо, сознавая эту проблему, авторы ряда книг (см., например, [6, 7]) пишут: «Ряд (1) понимается как сумма рядов (2) и (3) и считается сходящимся, если сходится каждый из рядов (2) и (3)». К сожалению, это уточнение не спасает ситуацию. Суммой рядов (2) и (3), как мы уже писали, является ряд (4). Не совсем понятно, почему приведенное определение сходимости функционального ряда (4) («ряд (4) считается сходящимся, если сходится каждый из рядов (2) и (3)») отличается от обычного определения сходимости функционального ряда.

Получается, что, говоря о сходимости (или расходимости) ряда (4) в некоторой точке $z_1 \in \mathbb{C}$, мы должны отдельно специально указывать, рассматриваем ли мы в данный момент ряд (4) как «обычный» функциональный ряд или как двусторонний степенной ряд.

Всего этого можно было бы избежать, если бы авторы книг и учебников по ТФКП точнее формулировали свою мысль. На самом деле не ряд (1) является суммой рядов (2) и (3), а сумма ряда (1) равна сумме сумм рядов (2) и (3), причем этот факт целесообразно рассматривать не как определение суммы ряда (1), а как частный случай определения суммы произвольного двустороннего функционального ряда (§ 2). Что касается самого ряда (1), то он, повторим еще раз, не равен сумме рядов (2) и (3).

[7] Множество сходимости функционального (или двустороннего функционального) ряда Σ мы обозначаем символом $E_c(\Sigma)$. Использование в символе $E_c(\Sigma)$ строчной латинской буквы c связано с тем, что эта буква является первой буквой английского слова convergence — сходимость.

Отметим, что для обозначения множества абсолютной сходимости функционального (или двустороннего функционального) ряда Σ мы предлагаем использовать символ $E_a(\Sigma)$. Использование в символе $E_a(\Sigma)$ строчной латинской буквы a связано с тем, что эта буква является первой буквой английского словосочетания absolute convergence — абсолютная сходимость.

§ 5. Можно ли сформулировать аналог первой теоремы Абеля для степенных рядов для двустороннего степенного ряда?

В этом параграфе для упрощения формулировок мы будем рассматривать ряды (1), (2) и (3) с центром в точке $z_0 = 0$, то есть следующие ряды:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad (\text{ряд } \ \Sigma_1'), \tag{1'}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \quad (\text{ряд } \ \Sigma_2'), \tag{2'}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \quad (\text{ряд } \ \Sigma_3'). \tag{3'}$$

Как известно, имеет место следующая важная теорема.

Теорема 1 (первая теорема Абеля для степенного ряда). *Пусть степенной ряд* $(2')$ *сходится в точке* $z_1 \neq 0$*. Тогда ряд* $(2')$ *сходится, и притом абсолютно, в каждой точке* z *такой, что* $|z| < |z_1|$.

Иначе говоря, если степенной ряд $(2')$ сходится в точке $z_1 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, в круге $K_{|z_1|}(0)$.

Можно доказать, что существуют аналоги этой теоремы для степенного ряда по отрицательным степеням $(3')$ и для двустороннего степенного ряда $(1')$.

Теорема 2 (первая теорема Абеля для степенного ряда по отрицательным степеням). *Пусть степенной ряд по отрицательным степеням* $(3')$ *сходится в точке* z_1*. Тогда ряд* $(3')$ *сходится, и притом абсолютно, в каждой точке* z *такой, что* $|z| > |z_1|$.

Иначе говоря, если степенной ряд по отрицательным степеням $(3')$ сходится в точке z_1, то он сходится, и притом абсолютно, в кольце $K_{|z_1|,\,+\infty}(0)$.

Теорема 3 (первая теорема Абеля для двустороннего степенного ряда). *Пусть двусторонний степенной ряд* $(1')$ *сходится в точках* z_1 *и* z_2*, причем* $|z_1| < |z_2|$*. Тогда ряд* $(1')$ *сходится, и притом абсолютно, в каждой точке* z *такой, что* $|z_1| < |z| < |z_2|$.

Иначе говоря, если двусторонний степенной ряд $(1')$ сходится в точках z_1 и z_2, где $|z_1| < |z_2|$, то он сходится, и притом абсолютно, в кольце $K_{|z_1|,\,|z_2|}(0)$.

§ 6. В чем заключается различие между понятиями «множество сходимости» и «область сходимости»?

В этом параграфе мы хотели бы определить и четко разграничить два понятия: «множество сходимости» и «область сходимости» функционального (или двустороннего функционального) ряда.

Пусть Σ — произвольный функциональный (или двусторонний функциональный) ряд и пусть a — произвольный элемент из множества определения $V(\Sigma)$ ряда Σ (то есть $a \in V(\Sigma)$). Символом $\Sigma(a)$ мы будем обозначать числовой (или двусторонний числовой) ряд, который получается в результате замены всех функций, являющихся членами ряда Σ, на значения этих функций на элементе a.

Определение 1. *Множество всех элементов $a \in V(\Sigma)$ таких, что ряд $\Sigma(a)$ сходится (абсолютно сходится), называется* ***множеством сходимости*** *(**множеством абсолютной сходимости**) ряда Σ и обозначается символом $E_c(\Sigma)$ ($E_a(\Sigma)$).*

Для любого функционального (или двустороннего функционального) ряда Σ имеет место включение $E_a(\Sigma) \subset E_c(\Sigma) \subset V(\Sigma)$. Отметим, что множество $E_c(\Sigma) \setminus E_a(\Sigma)$ является множеством условной сходимости ряда Σ.

Приведенное выше определение 1 справедливо для функционального (или двустороннего функционального) ряда Σ, множество определения $V(\Sigma)$ которого состоит из элементов совершенно произвольной природы.

Пусть теперь множество определения $V(\Sigma)$ ряда Σ является подмножеством некоторого топологического пространства T (наиболее важными для нас, естественно, являются случаи $T = \mathbb{C}$ и $T = \mathbb{R}$).

Рассмотрим внутренность (то есть множество всех внутренних точек) $\operatorname{Int} E_c(\Sigma)$ множества $E_c(\Sigma)$. Как известно, внутренность любого множества является открытым множеством. Поэтому если множество $\operatorname{Int} E_c(\Sigma)$ является линейно связным, то оно будет областью[8]. В этом и только в этом случае мы предлагаем называть это множество областью сходимости ряда Σ.

Таким образом, мы предлагаем следующее определение.

Определение 2. *Если множество $\operatorname{Int} E_c(\Sigma)$ является линейно связным, то это множество называется* ***областью сходимости*** *ряда Σ и обозначается символом $D_c(\Sigma)$.*

Аналогичное определение мы предлагаем для области абсолютной сходимости.

Определение 2′. *Если множество $\operatorname{Int} E_a(\Sigma)$ является линейно связным, то это множество называется* ***областью абсолютной сходимости*** *ряда Σ и обозначается символом $D_a(\Sigma)$.*

Использование в символах $D_c(\Sigma)$ и $D_a(\Sigma)$ прописной латинской буквы D связано с тем, что эта буква является первой буквой английского слова domain — область.

Степенной ряд (2), степенной ряд по отрицательным степеням (3) и двусторонний степенной ряд (1) обладают следующим замечательным свойством: у каждого из этих рядов всегда существует область сходимости и всегда существует область абсолютной сходимости, причем для указанных рядов эти области совпадают.

Пусть Σ — это один из рядов (1), (2) или (3). Общую область сходимости и область абсолютной сходимости ряда Σ мы будем обозначать симво-

[8] Область — это открытое линейно связное множество. Пустое множество мы тоже считаем областью.

лом[9] $K(\Sigma)$. Таким образом, по определению, $K(\Sigma) = D_c(\Sigma) = D_a(\Sigma)$. Область $K(\Sigma)$ мы будем называть *областью сходимости* ряда Σ (при этом надо иметь в виду, что область $K(\Sigma)$ является также областью абсолютной сходимости ряда Σ).

Пусть Σ — это степенной ряд (2). Используя теорему 1 (§ 5), можно доказать, что имеет место одна из следующих двух ситуаций: 1) $K(\Sigma) = \varnothing$; 2) $K(\Sigma) = K_R(z_0)$ $(0 < R \leqslant +\infty)$. Таким образом, область сходимости $K(\Sigma)$ ряда Σ является либо пустым множеством, либо кругом. Поэтому область сходимости $K(\Sigma)$ ряда (2) называют также *кругом сходимости*.

Пусть Σ — это степенной ряд по отрицательным степеням (3) или двусторонний степенной ряд (1). Используя теоремы 2 и 3 (см. § 5), можно доказать, что имеет место одна из следующих двух ситуаций: 1) $K(\Sigma) = \varnothing$; 2) $K(\Sigma) = K_{r,\,R}(z_0)$ $(0 \leqslant r < R \leqslant +\infty)$. Таким образом, область сходимости $K(\Sigma)$ ряда Σ является либо пустым множеством, либо кольцом. Поэтому область сходимости $K(\Sigma)$ ряда (3) или ряда (1) называют также *кольцом сходимости*.

Таким образом, термин «круг сходимости» является синонимом термина «область сходимости» для степенных рядов, а термин «кольцо сходимости» является синонимом термина «область сходимости» для степенных рядов по отрицательным степеням и для двусторонних степенных рядов.

Круг сходимости (кольцо сходимости) $K(\Sigma)$ ряда Σ может быть пустым множеством. Если $K(\Sigma) \neq \varnothing$, то имеет место включение $K(\Sigma) \subset E_c(\Sigma) \subset \subset E_a(\Sigma) \subset \overline{K(\Sigma)}$. Здесь $\overline{K(\Sigma)}$ — замыкание области $K(\Sigma)$.

Объясним, почему, по нашему мнению, целесообразно вводить и разграничивать два понятия: «множество сходимости» и «область сходимости» функционального (или двустороннего функционального) ряда.

Прежде всего отметим, что первичным и более фундаментальным является, разумеется, понятие «множество сходимости». Оно применимо к любому функциональному (или двустороннему функциональному) ряду.

Понятие «область сходимости» носит вспомогательный характер и служит прежде всего учебным целям. Дело в том, что ряды (1), (2) и (3) далеко не всегда легко исследовать на сходимость (абсолютную сходимость) на границе круга (или кольца) сходимости. Поэтому задача «Найти множество сходимости (абсолютной сходимости) ряда Σ» может оказаться совсем не простой. Замена в формулировке этой задачи слова «множество» на слово «область» позволяет заметно упростить задачу.

Сказанное, естественно, не означает, что мы призываем никогда не исследовать ряды (1), (2) и (3) на сходимость (абсолютную сходимость) в граничных точках области сходимости. Наша позиция заключается в том, что в задачниках по ТФКП должны присутствовать как задачи на нахождение множества сходимости (абсолютной сходимости), так и задачи на нахождение области сходимости (или, что то же самое, области абсолютной сходимости) рядов (1), (2) и (3).

[9] Использование в символе $K(\Sigma)$ прописной латинской буквы K обусловлено соображениями единообразия с символами $K_R(z_0)$ и $K_{r,\,R}(z_0)$. Дело в том, что область $K(\Sigma)$ является либо пустым множеством, либо кругом, либо кольцом.

В некоторых книгах термин «область сходимости» используется как синоним термина «множество сходимости». Это, по нашему мнению, не совсем удачно, поскольку слово «область» обозначает в математике открытое линейно связное множество. В то же время множество сходимости ряда далеко не всегда является открытым и линейно связным. Для того чтобы у студентов не возникло ложной корреляции между понятиями «область» и «область сходимости», мы предлагаем использовать не вызывающий неправильных ассоциаций термин «множество сходимости». (См. по этому поводу также нашу статью [11].)

Отметим, что при нашем понимании термина «область сходимости» обозначаемое этим термином множество всегда является открытым и линейно связным, то есть всегда является областью.

§ 7. Что такое ряд Лорана?

Если функция $f(z)$ регулярна в круге $K_R(z_0)$ $(0 < R \leqslant +\infty)$, то, согласно теореме Тейлора, она разлагается в этом круге в степенной ряд (2). Этот степенной ряд называется *рядом Тейлора функции* $f(z)$ *в круге* $K_R(z_0)$ (если $R = +\infty$, то $K_R(z_0) = \mathbb{C}$, и поэтому надо уточнять: «в круге $K_R(z_0)$ с центром в точке z_0»).

Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $K_{r,\,R}(z_0)$ $(0 \leqslant r < R \leqslant +\infty)$, то, согласно теореме Лорана, она разлагается в этом кольце в двусторонний степенной ряд (1). Этот двусторонний степенной ряд логично называть *рядом Лорана функции* $f(z)$ *в кольце* $K_{r,\,R}(z_0)$.

Таким образом, мы предлагаем вообще не использовать термин «ряд Лорана», а использовать лишь термин «ряд Лорана функции $f(z)$ в кольце $K_{r,\,R}(z_0)$» (по аналогии с термином «ряд Тейлора функции $f(z)$ в круге $K_R(z_0)$»). Отметим, что именно так поступают некоторые авторы (см., например, [9, 10, 12]).

Если степенной ряд (2) сходится в круге $K_R(z_0)$ к некоторой функции $f(z)$, то ряд (2) является рядом Тейлора функции $f(z)$ в круге $K_R(z_0)$. Аналогично, если двусторонний степенной ряд (1) сходится в кольце $K_{r,\,R}(z_0)$ к некоторой функции $f(z)$, то ряд (1) является рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце $K_{r,\,R}(z_0)$.

Подобно тому как степенной ряд не является частным случаем двустороннего степенного ряда (§ 3), ряд Тейлора не является частным случаем ряда Лорана. Это вытекает из того, что ряд Тейлора — это ряд в круге, а ряд Лорана — это ряд в кольце (а также из того, что ряд Тейлора — это степенной ряд, а ряд Лорана — это двусторонний степенной ряд).

Наряду с понятием «ряд Лорана функции $f(z)$ в кольце $K_{r,\,R}(z_0)$» существует также понятие «ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки (ИОТ) функции $f(z)$».

Если точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является ИОТ функции $f(z)$, то ряд Лорана функции $f(z)$ в кольце $K_{0,\,R}(z_0)$ $(0 < R \leqslant +\infty)$ называется рядом Лорана функции $f(z)$ *в окрестности* точки z_0. Если точка $z = \infty$ является ИОТ функции

$f(z)$, то ряд Лорана функции $f(z)$ в кольце[10] $K_{r,+\infty}(z_0)$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < +\infty$) называется рядом Лорана функции $f(z)$ *в окрестности* точки $z = \infty$.

§ 8. Надо ли вводить понятия «главная часть» и «правильная часть» для произвольного ряда (1)?

В некоторых книгах (см., например, [1–3, 6, 10]) написано, что ряд (3) называется главной частью ряда (1), а ряд (2) называется правильной частью ряда (1).

Разумеется, какие давать определения и какую использовать терминологию — это в значительной степени дело вкуса того или иного автора. И всё-таки, по нашему мнению, нет никакой необходимости вводить понятия «главная часть» и «правильная часть» для произвольного двустороннего степенного ряда и даже для произвольного ряда Лорана.

Эти понятия, как мы считаем, целесообразно вводить лишь для ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности той или иной ИОТ функции $f(z)$, поскольку именно в этом случае на основании главной части ряда Лорана можно определить тип данной ИОТ. При этом главной частью ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = \infty$ является не ряд (3), а ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{5}$$

Соответственно, правильной частью ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = \infty$ является не ряд (2), а ряд

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \tag{6}$$

Рассмотрим, например, функцию $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$. Функция $f(z)$ регулярна в кольце $K_{0,+\infty}(0)$. Поэтому, согласно теореме Лорана, функция $f(z)$ разлагается в кольце $K_{0,+\infty}(0)$ в двусторонний степенной ряд. Это разложение имеет следующий вид:

$$f(z) = \ldots + \frac{0}{z^4} + \frac{0}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{6} + \frac{z^2}{24} + \frac{z^3}{120} + \ldots \tag{7}$$

Двусторонний степенной ряд (7) является рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце $K_{0,+\infty}(0)$. Этот ряд является рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = 0$ и одновременно он является рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = \infty$.

Если ряд (7) рассматривать как ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = 0$, то главной частью этого ряда является ряд

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z^3} + \frac{0}{z^4} + \ldots$$

[10] Центр z_0 кольца $K_{r,+\infty}(z_0)$ не обязан находиться в точке $z = 0$. Подробнее об этом см. ниже § 10.

Отсюда следует, что ИОТ $z = 0$ является полюсом второго порядка (П2) функции $f(z)$.

Если ряд (7) рассматривать как ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = \infty$, то главной частью этого ряда является ряд

$$\frac{z}{6} + \frac{z^2}{24} + \frac{z^3}{120} + \ldots$$

Отсюда следует, что ИОТ $z = \infty$ является существенно особой точкой (СОТ) функции $f(z)$.

Таким образом, выделение в ряде Лорана функции $f(z)$ главной (и соответственно правильной) части производится с учетом того, в окрестности какой ИОТ рассматривается этот ряд Лорана.

В случае произвольного двустороннего степенного ряда и в случае произвольного ряда Лорана функции $f(z)$, как мы считаем, нет особой пользы от введения понятий главной и правильной частей ряда. Кроме того, непонятно, что называть главной и правильной частью ряда вида (7), который одновременно является рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = 0$ и в окрестности ИОТ $z = \infty$.

Поэтому для произвольного двустороннего степенного ряда и для произвольного ряда Лорана функции $f(z)$, по нашему мнению, вообще не надо вводить понятия главной и правильной частей. В частности, эти понятия не надо вводить для ряда Лорана функции $f(z)$ в кольце $K_{r,R}(z_0)$, где $0 < r < R < +\infty$, так как этот ряд заведомо не является рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности какой-либо ИОТ функции $f(z)$ (поскольку внутренний радиус r кольца $K_{r,R}(z_0)$ отличен от нуля, а внешний радиус R кольца $K_{r,R}(z_0)$ отличен от $+\infty$).

В качестве примера книг, в которых понятия главной и правильной частей вводятся только для ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности некоторой ИОТ функции $f(z)$, мы можем привести [5, 7, 9].

§ 9. Главная часть и правильная часть ряда Лорана — это ряды или функции?

В некоторых книгах (см., например, [12]) главной и правильной частями ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ z_0 называют не ряды, а функции, являющиеся суммами этих рядов.

Естественно, автор каждого учебника и каждого учебного пособия вправе использовать ту терминологию, которая ему представляется более удобной или более понятной для студентов. Однако в данном случае мы рискнем поставить под сомнение целесообразность указанного терминологического новшества. По нашему мнению, главной и правильной частями ряда Лорана лучше называть односторонние функциональные ряды, а не суммы этих рядов.

Приведем два довода в пользу нашей точки зрения.

1. При традиционном подходе, когда главной и правильной частями ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ называются ряды, проще формулируются некоторые важные теоремы и утверждения курса ТФКП. Например:

«ИОТ z_0 функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное (и отличное от нуля) число ненулевых членов».

Если главная и правильная части ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ — это не ряды, а функции, являющиеся суммами этих рядов, то это же утверждение придется формулировать так: «ИОТ z_0 функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть $g(z)$ ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет следующий вид: $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$, где среди коэффициентов c_{-n} $(n \in \mathbb{N})$ конечное (и отличное от нуля) число ненулевых коэффициентов».

Первая формулировка значительно короче и поэтому, по нашему мнению, имеет больше шансов быть усвоенной студентами.

2. Второй довод в пользу того, что главной и правильной частями ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ следует называть ряды, а не функции, носит чисто лингвистический характер. В состав терминов «главная часть» и «правильная часть» входит слово «часть». Вполне логично и естественно считать, что главной и правильной «частями» ряда Лорана являются ряды. Представляется нелогичным и неестественным считать, что «частями» ряда Лорана являются функции.

§ 10. Что следует называть рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = \infty$?

Пусть функция $f(z)$ регулярна в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Тогда, по определению, точка $z = \infty$ является ИОТ функции $f(z)$.

Какой двусторонний степенной ряд следует называть рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = \infty$?

В подавляющем большинстве книг и учебников по ТФКП (см., например, [5, 8–10]) рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = \infty$ называется ряд Лорана функции $f(z)$ в кольце $K_{r,+\infty}(0)$ $(0 \leqslant r < +\infty)$, центр которого находится в точке $z = 0$.

Однако можно доказать, что разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K_{r,+\infty}(z_0)$ $(z_0 \in \mathbb{C},\ z_0 \neq 0,\ 0 \leqslant r < +\infty)$, «ничем не хуже», чем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K_{r,+\infty}(0)$. Это означает, что из разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K_{r,+\infty}(z_0)$ можно стандартным образом (то есть по числу ненулевых членов в главной части ряда Лорана) правильно определить тип ИОТ $z = \infty$, а также стандартным образом (то есть по формуле $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$) правильно найти вычет функции $f(z)$ в точке $z = \infty$.

Поэтому, по нашему мнению, как разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K_{r,+\infty}(0)$, так и разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K_{r,+\infty}(z_0)$ $(z_0 \in \mathbb{C},\ z_0 \neq 0)$ следует считать разложениями функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ИОТ $z = \infty$.

Существуют задачи, в которых функцию $f(z)$ значительно проще разложить в ряд Лорана в кольце $K_{r,+\infty}(z_0)$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$), чем в кольце $K_{r,+\infty}(0)$.

Рассмотрим, например, функцию $f(z) = (z-2)^2 e^{\frac{1}{z-2}}$. Функцию $f(z)$ достаточно легко разложить в ряд Лорана в кольце $K_{0,+\infty}(2)$. Это разложение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(z) \quad = \quad & \ldots + \frac{1}{120}\,\frac{1}{(z-2)^3} + \frac{1}{24}\,\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} + \\ & + (z-2) + (z-2)^2 + 0 \cdot (z-2)^3 + 0 \cdot (z-2)^4 + \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Из разложения (8) видно, что точка $z = \infty$ является полюсом второго порядка (П2) функции $f(z)$, причем вычет функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ равен $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -\dfrac{1}{6}$. Естественно, эту информацию можно получить также из разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K_{2,+\infty}(0)$, однако получить это разложение значительно сложнее.

Мы считаем недостаточно мотивированным приводимое в большинстве книг и учебников по ТФКП определение ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = \infty$ как ряда Лорана функции $f(z)$ в кольце $K_{r,+\infty}(0)$ (то есть в кольце, центр которого обязательно находится в точке $z = 0$). Отметим, что одной из немногих известных нам книг, где под рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности ИОТ $z = \infty$ понимается ряд Лорана функции $f(z)$ в произвольном кольце $K_{r,+\infty}(z_0)$ ($z_0 \in \mathbb{C}$), является книга [13].

§ 11. Что следует называть рядом Тейлора в случае функции действительной переменной?

В завершение нашей статьи мы хотели бы сделать несколько замечаний относительно ряда Тейлора. Этот вопрос относится не только к комплексному, но и к действительному анализу.

В комплексном анализе (то есть в ТФКП) существует понятие «ряд Тейлора функции $f(z)$ в круге $K_R(z_0)$». Это понятие аналогично понятию «ряд Лорана функции $f(z)$ в кольце $K_{r,R}(z_0)$».

В действительном анализе существует несколько иное понятие, а именно «ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0».

Таким образом, в действительном анализе ряд Тейлора определяется как ряд в точке, причем этот ряд не всегда сходится (а если сходится, то не обязательно к функции $f(x)$). В комплексном анализе ряд Тейлора определяется как ряд в круге (по аналогии с рядом Лорана в кольце), причем этот ряд всегда сходится и его сумма равна данной регулярной в круге функции $f(z)$.

Мы видим, что отсутствует симметрия (параллелизм) между понятием «ряд Тейлора» в действительном и в комплексном анализе. Отсутствие этой симметрии, как показывает наш опыт преподавания высшей математики, затрудняет восприятие и усвоение учебного материала. Студенты с трудом понимают, почему в действительном случае ряд Тейлора не обязательно сходится к данной функции, а в комплексном случае такая сходимость имеет место.

По нашему мнению, одной из причин, затрудняющих восприятие материала, является использование одного и того же термина «ряд Тейлора» как в действительном, так и в комплексном случае. В связи с этим мы предлагаем следующее терминологическое нововведение.

Определение 3. *Пусть функция $f(x)$ действительной переменной x бесконечно дифференцируема в точке x_0. Тогда степенной ряд*

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \tag{9}$$

называется ***формальным рядом Тейлора функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0.

Тот факт, что степенной ряд (9) является формальным рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0, можно записывать следующим образом:

$$f(x) \sim f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n. \tag{10}$$

Знак $\sim$ («тильда») показывает, что функции $f(x)$ соответствует формальный ряд Тейлора, стоящий справа от этого знака. Использование в формуле (10) знака $\sim$ вполне аналогично использованию этого знака при записи ряда Фурье, соответствующего данной функции. Отметим, что знак $\sim$ как знак соответствия между функцией и её формальным рядом Тейлора используется, в частности, в книге [14].

Определение 4. *Если существует δ $(0 < \delta \leqslant +\infty)$ такое, что в δ-окрестности $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ точки x_0 степенной ряд* (9) *сходится и его сумма равна функции $f(x)$, то степенной ряд* (9) *называется* ***рядом Тейлора функции*** $f(x)$ ***на открытом промежутке*** $U_\delta(x_0)$.

Таким образом, мы предлагаем в действительном случае различать два понятия: «формальный ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0» и «ряд Тейлора функции $f(x)$ на открытом промежутке $U_\delta(x_0)$» (если $\delta = +\infty$, то $U_\delta(x_0) = \mathbb{R}$, и поэтому надо уточнять: «на открытом промежутке $U_\delta(x_0)$ с центром в точке x_0»).

При использовании этой терминологии исчезает различие между действительным и комплексным случаем, а именно ряд Тейлора функции f на области D всегда сходится на области D и притом к функции f. Здесь D — либо открытый промежуток действительных чисел (в действительном анализе), либо круг на комплексной плоскости (в комплексном анализе).

По нашему мнению, использование предложенной здесь терминологии должно снять ряд вопросов студентов и сделать учебный материал более доступным.

§ 12. Заключение

Мы надеемся, что наша работа еще раз показывает, как важно соблюдать четкость и аккуратность при написании математических текстов. Использование логичной и продуманной терминологии, а также удачной системы обозначений, по нашему мнению, значительно улучшает восприятие материала и способствует его более глубокому пониманию и более прочному усвоению.

Автор будет благодарен читателям за любые комментарии или замечания по затронутым в данной статье вопросам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функции одного переменного. 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1985. 336 с.
2. Ефимов А. В. Математический анализ (специальные разделы). Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложение. — М.: Высш. шк., 1980. 279 с.
3. Лорана ряд // Мат. энциклопед. слов.: Гл. ред. Ю. В. Прохоров. — М.: Сов. энцикл., 1988. С. 332.
4. Шилов Г. Е. Математический анализ (функции одного переменного). Ч. 1–2. — М.: Наука, 1969. 528 с.
5. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1989. 480 с.
6. Лорана ряд // Мат. энцикл.: Гл. ред. И. М. Виноградов. Т. 3. — М.: Сов. энцикл., 1982. С. 450–451.
7. Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. — М.: Просвещение, 1977. 320 с.
8. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. и др. Вся высшая математика. Т. 4. 2-е изд., испр. — М.: Едиториал УРСС, 2005. 352 с.
9. Морозова В. Д. Теория функций комплексного переменного / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. 2-е изд., стер. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 520 с.
10. Колягин С. Ю. Теория функций комплексного переменного / Моск. пед. гос. ун-т. Под ред. В. Л. Матросова. — М.: Изд-во МПГУ, 2009. 222 с.
11. Костин С. В. Система обозначений для основных многозначных функций комплексной переменной и для их значений // Математика в высшем образовании. 2009. № 7. С. 39–80. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2009.
12. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1989. 464 с.
13. Шварц Л. Анализ. Т. 2. — М.: Мир, 1972. 528 с.
14. Уваренков И. М., Маллер М. З. Курс математического анализа. Т. 2. — М.: Просвещение, 1976. 479 с.

Поступила 06.04.2011

SEVERAL REMARKS ON POWER AND TWO-SIDED POWER SERIES

S. V. Kostin

Several questions concerning power and two-sided power series are discussed. Innovations that should made the educational material more logical and easier for students are proposed.

Keywords: complex analysis, power series, two-sided power series, Taylor series, Laurent series.