СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 510.22

ТРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ КАНТОРА – БЕРНШТЕЙНА

А. В. Бегунц

МГУ имени М. В. Ломоносова
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские Горы, д. 1;
e-mail: ab@mech.math.msu.su

Заметка содержит изложение одного из фундаментальных утверждений теории множеств — теоремы Кантора – Бернштейна; приводятся три подробных доказательства, снабжённые иллюстрациями. Рассматриваются примеры применения теоремы и обсуждается её история.

Ключевые слова: теория множеств, мощность множества, теорема Кантора – Бернштейна.

Тема настоящей работы относится к основам теории множеств. Целью является разностороннее исследование и иллюстрирование примерами одного из фундаментальных утверждений теории множеств — теоремы Кантора – Бернштейна. Материал рассчитан на студентов первого курса, изучающих основы высшей математики в рамках различных специальностей, а приведённые примеры доступны и старшеклассникам.

Начнём с разбора одной задачи, предлагавшейся на Московской математической олимпиаде (LXV ММО, 3 марта 2002 г., 10 класс, [1]).

1. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в чёрный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек также были подобны друг другу (возможно, с различными коэффициентами подобия)?

Решение. Зафиксируем произвольный квадрат, впишем в него круг и раскрасим в чёрный цвет все точки квадрата, лежащие вне круга (рис. 1). Затем впишем в полученный круг квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата, и раскрасим в белый цвет все точки круга, лежащие вне вписанного квадрата. Точки вписанного квадрата раскрасим по тому же правилу, что и точки исходного квадрата и т. д. При этом мы каждый раз будем считать, что граница квадрата покрашена чёрным, за исключением четырёх точек касания вписанного в квадрат круга, а граница круга — белым, за исключением четырёх вершин квадрата, вписанного в этот круг. Центр квадрата раскрасим в чёрный цвет.

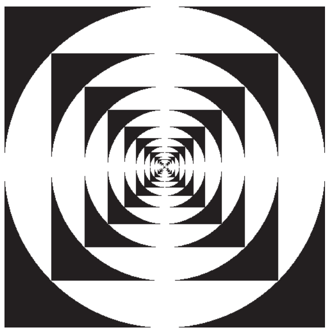

Рис. 1. Раскраска

Покажем, что мы раскрасили все точки исходного квадрата. Пусть его сторона равна $2a$, тогда радиус вписанного круга равен a и сторона первого вписанного квадрата равна $\sqrt{2}a$ (рис. 2). Следовательно, сторона n-го вписанного квадрата, равная $2a/(\sqrt{2})^n$, стремится к нулю при неограниченном увеличении n. Поскольку все квадраты вложены друг в друга, любая точка исходного квадрата, отличная от его центра, при увеличении n окажется вне достаточно малого вписанного квадрата, а поэтому будет раскрашена.

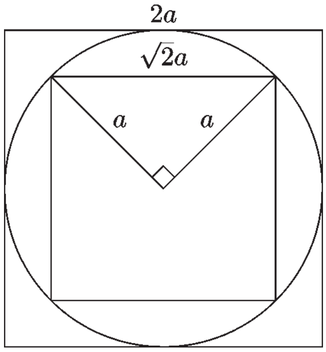

Рис. 2. Стороны фигур

Заметим, что гомотетия[1] с центром в центре квадрата и коэффициентом $1/\sqrt{2}$ переводит множество чёрных точек квадрата в множество чёрных точек круга, вписанного в этот квадрат, а значит, эти множества подобны. Наконец, множество белых точек квадрата просто совпадает с множеством белых точек вписанного в него круга.

Таким образом, построенный нами пример позволяет дать утвердительный ответ на вопрос, поставленный в условии задачи (конечно, возможны и иные способы раскраски). ■

Прежде чем продолжить, условимся о некоторых обозначениях и понятиях. Будем говорить, что на множестве A задано *отображение* f во множество B (пишут $f\colon A \to B$), если каждому элементу a множества A поставлен в соответствие ровно один элемент b множества B (пишут $f(a) = b$). Если отображение $f\colon A \to B$ обладает тем свойством, что каждый элемент множества B поставлен в соответствие ровно одному элементу множества A, то такое отображение называют *взаимно однозначным*, *биекцией*, а также *взаимно однозначным соответствием*. Запись $A = B \sqcup C$ будет означать, что множество A есть объединение непересекающихся множеств B и C.

Очевидно, что между конечными множествами можно установить биекцию в том и только том случае, если эти множества содержат одинаковое количество элементов. Для бесконечных множеств количественной характеристикой служит *мощность*: множества A и B называются *равномощными*, если между ними можно установить биекцию (обозначение: $|A| = |B|$). Если же множество A равномощно некоторому подмножеству множества B, то будем писать так: $|A| \leqslant |B|$.

Вернёмся к фигурам, рассмотренным при решении задачи. Пусть A — множество точек исходного квадрата, а B — множество точек вписанного в него круга. С одной стороны, поскольку круг вписан в квадрат, получаем $|B| \leqslant |A|$. С другой стороны, исходный квадрат можно «сжать» в $\sqrt{2}$ раз (биекция!), получив множество A', и вписать его в круг, так что $|A| = |A'| \leqslant \leqslant |B|$.

[1] Напомним, что *гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом k называется такое преобразование плоскости, при котором каждая её точка P переходит в точку P', определяемую из векторного равенства $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$.

Заметим теперь, что описанная в решении задачи конструкция позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и вписанного в него круга. В самом деле, поскольку множества белых точек квадрата и круга совпадают, каждой белой точке квадрата поставим в соответствие её саму (но уже как точку круга), а каждой чёрной точке квадрата — чёрную точку круга, являющуюся её образом при описанной выше гомотетии с коэффициентом $1/\sqrt{2}$ (в частности, центры квадрата и круга будут соответствовать друг другу). Здесь мы снова воспользовались тем очевидным соображением, что гомотетия устанавливает взаимно однозначное соответствие между подобными фигурами[2]. Итак, мы доказали, что $|A| = |B|$.

Оказывается, что рассмотренный пример является частным случаем универсального теоретико-множественного утверждения — теоремы Кантора–Бернштейна [2–10], к рассмотрению которой мы и переходим.

Теорема Кантора – Бернштейна (первая формулировка). *Если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B, а множество B равномощно некоторому подмножеству множества A, то множества A и B равномощны.*

Во введённых обозначениях теорема принимает следующий вид.

Теорема Кантора – Бернштейна (вторая формулировка). *Пусть A и B — множества. Тогда если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.*

Первое доказательство [3, гл. 1, § 3, п. 5]. Обозначим биекцию множества A на подмножество множества B через f, а биекцию множества B на подмножество множества A — через g. Возьмём произвольный элемент a множества A и построим цепь, начинающуюся с этого элемента, следующим образом. Если найдётся такой элемент b множества B, что $g(b) = a$, то запишем:

$$b \overset{g}{\mapsto} a,$$

если же такого элемента b нет, то построение закончено и цепь имеет длину 1. Далее, если найдётся такой элемент a' множества A, что $f(a') = b$, то запишем (рис. 3):

$$a' \overset{f}{\mapsto} b \overset{g}{\mapsto} a$$

(элементы a и a' не обязаны быть различными), если же такого элемента a' нет, то построение закончено и цепь имеет длину 2. Продолжая этот процесс далее, получим цепь, длину которой обозначим через l_a, где l_a — натуральное число, если цепь конечна, или символ ∞ в противном случае. Отметим, что процесс построения может «зацикливаться», приводя к бесконечной цепи, содержащей лишь конечное число попарно различных элементов; в этом случае длине l_a также приписывается значение ∞.

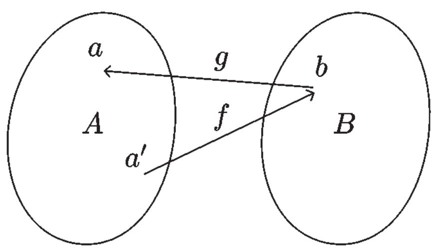

Рис. 3. Построение цепи

[2] Например, можно установить биекцию между квадратом с любой положительной стороной и квадратом со стороной единица.

Таким образом, для каждого элемента $a \in A$ мы определили величину l_a, что позволяет представить множество A в виде объединения трёх непересекающихся множеств:

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_\infty,$$

где

$$A_1 = \{a : a \in A, \quad l_a \text{ — нечётное число}\},$$

$$A_2 = \{a : a \in A, \quad l_a \text{ — чётное число}\},$$

$$A_\infty = \{a : a \in A, \quad l_a = \infty\}.$$

Построив аналогичным образом цепь вида $\ldots \overset{f}{\mapsto} b' \overset{g}{\mapsto} a \overset{f}{\mapsto} b$ для каждого элемента $b \in B$, получим аналогичное представление множества B в виде объединения трёх непересекающихся множеств:

$$B = B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_\infty,$$

где

$$B_1 = \{b : b \in B, \quad l_b \text{ — нечётное число}\},$$

$$B_2 = \{b : b \in B, \quad l_b \text{ — чётное число}\},$$

$$B_\infty = \{b : b \in B, \quad l_b = \infty\}.$$

Покажем теперь, что $|A_1| = |B_2|$, $|A_2| = |B_1|$ и $|A_\infty| = |B_\infty|$. Для этого установим, что отображения $f\colon A_1 \to B_2$, $g\colon B_1 \to A_2$ и $f\colon A_\infty \to B_\infty$ являются биекциями.

В самом деле, если $b \in B_2$, то найдётся единственный элемент $a \in A$, для которого $f(a) = b$, причём $l_a = l_b - 1$, а значит, $a \in A_1$. С другой стороны, если $a \in A_1$ и $f(a) = b \in B$, то $l_b = l_a + 1$, поэтому $b \in B_2$. Аналогичным образом можно показать, что $g\colon B_1 \to A_2$ есть биекция. Наконец, легко видеть, что если $a \in A_\infty$, то $f(a) = b \in B_\infty$, и наоборот, для каждого $b \in B_\infty$ найдётся единственный элемент $a \in A$, для которого $f(a) = b$, причём $l_a = \infty$.

Таким образом, $|A| = |B|$. ■

Следующее доказательство является более абстрактным и требует владения такими теоретико-множественными понятиями, как образ множества при отображении, а также знания основных свойств операций объединения, пересечения и вычитания множеств. По данным вопросам можно рекомендовать классические учебники [2–4], а также книги [5, 6] и [11], которые будут доступны и учащимся старших классов.

Второе доказательство [7, гл. 1, § 1]. Снова обозначим биекцию множества A на подмножество множества B через f, а биекцию множества B на подмножество множества A — через g. Определим на подмножествах множества A операцию $*$ так:

$$\text{если } \; C \subset A, \quad \text{то } \; C^* = A \setminus \Big(g\big(B \setminus f(C)\big)\Big).$$

Очевидно, $C^* \subset A$. Отметим свойство монотонности операции $*$: если $D \subset C \subset A$, то $D^* \subset C^*$. В самом деле,

$$\begin{aligned}
D \subset C \subset A \quad &\Rightarrow \quad f(D) \subset f(C) \subset B \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad B \setminus f(D) \supset B \setminus f(C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad g(B \setminus f(D)) \supset g\big(B \setminus f(C)\big) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad A \setminus \Big(g\big(B \setminus f(D)\big)\Big) \subset A \setminus \Big(g\big(B \setminus f(C)\big)\Big) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad D^* \subset C^*.
\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство множеств

$$M = \{C : C \subset A, \quad C \subset C^*\}.$$

Семейство M непусто, так как $\varnothing \in M$. Положим

$$S = \bigcup_{C \in M} C.$$

Поскольку $S \subset S^*$, множество S входит в семейство M. По свойству монотонности получаем $S^* \subset S^{**}$, так что S^* также входит в семейство M, а значит, $S^* \subset S$. Таким образом,

$$S = S^* = A \setminus \Big(g\big(B \setminus f(S)\big)\Big),$$

поэтому $A \setminus S = g\big(B \setminus f(S)\big)$. Поскольку отображения

$$f : S \to f(S) \quad \text{и} \quad g : B \setminus f(S) \to A \setminus S,$$

взаимно однозначны, а

$$A = (A \setminus S) \sqcup S \quad \text{и} \quad B = \big(B \setminus f(S)\big) \sqcup f(S),$$

получаем, что множества A и B равномощны. ■

Перед тем как привести третье доказательство, укажем ещё одну формулировку обсуждаемой теоремы. Пусть множество A равномощно некоторому подмножеству B_1 множества B, а множество B равномощно некоторому подмножеству A_1 множества A. Тогда при взаимно однозначном соответствии множеств B и A_1 подмножеству B_1 будет соответствовать некоторое подмножество A_2 множества A_1, причём $|A| = |B_1| = |A_2|$. Поскольку $A \supset A_1 \supset A_2$ и $|A_1| = |B|$, получаем, что равномощность множеств A и B равносильна равномощности множеств A и A_1. Значит, упоминание о множестве B в формулировке теоремы можно исключить следующим образом.

Теорема Кантора – Бернштейна (третья формулировка). *Пусть* $A \supset A_1 \supset A_2$ *и* $|A| = |A_2|$. *Тогда* $|A| = |A_1|$.

Третье доказательство [2, гл. 2, § 5; 4, гл. 1, § 6; 5, 6, 10]. Пусть $f\colon A \to A_2$ — биекция, и положим $A_3 = f(A_1) \subset A_2$, $A_4 = f(A_2) \subset A_3$ и т. д. Обозначив $A_0 = A$, получим систему вложенных множеств

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \ldots,$$

в которой A_{2n} есть результат n-кратного применения отображения f к множеству A_0, а A_{2n+1} есть результат n-кратного применения отображения f к множеству A_1.

Представим множество A_0 в виде объединения непересекающихся слоёв $C_k = A_k \setminus A_{k+1}$ и сердцевины $C = \bigcap\limits_k A_k$ (рис. 4):

$$A_0 = C_0 \sqcup C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 \sqcup \ldots \sqcup C$$

(элемент a принадлежит сердцевине тогда и только тогда, когда он принадлежит каждому из множеств $A_0, A_1, \ldots$).

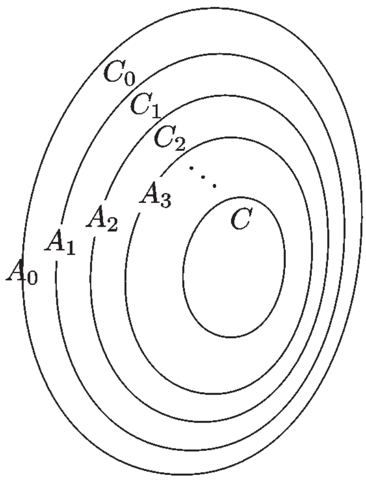

Рис. 4. Вложенные множества и слои

Поскольку

$$C_0 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{f} C_4 \xrightarrow{f} \ldots$$

и f — биекция, слои $C_0, C_2, C_4, \ldots$ равномощны. Поэтому мы можем построить биекцию между множествами A_0 и A_1 следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} A_0 & = & C_0 & \sqcup & C_1 & \sqcup & C_2 & \sqcup & C_3 & \sqcup & C_4 & \sqcup & \ldots & \sqcup & C \\ & & \searrow & & \downarrow & & \searrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow \\ A_1 & = & & & C_1 & \sqcup & C_2 & \sqcup & C_3 & \sqcup & C_4 & \sqcup & \ldots & \sqcup & C\,. \end{array}$$

Если элемент a множества A принадлежит слою с чётным номером, поставим ему в соответствие элемент $f(a)$, а если он принадлежит слою с нечётным номером или сердцевине, то оставим его на месте (поставив ему в соответствие его же, но как элемент множества A_1). Это означает, что множества $A = A_0$ и A_1 равномощны. ■

Рассмотрим два примера применения теоремы Кантора – Бернштейна.

Сначала докажем, что отрезок равномощен квадрату (этот факт весьма важен). С этой целью построим биекцию отрезка в подмножество квадрата и биекцию квадрата в подмножество отрезка, а затем воспользуемся рассматриваемой теоремой. Для первой биекции можно просто взять гомотетию с подходящим коэффициентом, чтобы длина отрезка совпала с длиной стороны квадрата, и установить взаимно однозначное соответствие наложением отрезка на любую сторону квадрата (мы считаем, что квадрат содержит свою границу). Биекцию квадрата в подмножество отрезка построить несколько сложнее. Достаточно рассмотреть, например, случай квадрата $[0; 0{,}5]^2$ и отрезка $[0; 1]$. Каждой точке Q квадрата соответствует пара координат (x_Q, y_Q), причём это соответствие взаимно однозначно, если в десятичных записях чисел x_Q, y_Q не допускать «зацикливания девяток», а брать конечную десятичную дробь (например, записи $0{,}4999\ldots = 0{,}4(9)$ мы предпочтём $0{,}5$). Если

$$x_Q = \overline{0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}, \quad y_Q = \overline{0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots},$$

то отобразим точку Q квадрата в точку a отрезка $[0; 1]$, положив

$$a = \overline{0, \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\ldots}.$$

Очевидно, разные точки квадрата перейдут в разные точки отрезка, а значит, нами построена биекция квадрата $[0; 0{,}5]^2$ в некоторое подмножество отрезка $[0; 1]$. Отметим, что мы не взяли квадрат $[0; 1]^2$, чтобы не решать проблемы с отображением части его границы (на ней координаты могут равняться 1). Итак, обе биекции построены, а значит, по теореме Кантора – Бернштейна отрезок и квадрат равномощны.

В качестве второго примера докажем, что если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку (под частями здесь имеются в виду подмножества произвольного вида). Воспользуемся доказанным результатом о равномощности отрезка и квадрата. При существующей между ними биекции любому разбиению отрезка на две части отвечает разбиение квадрата на два подмножества, равномощных соответствующим частям отрезка. Иными словами, если отрезок представлен в виде объединения непересекающихся множеств A и B, то и квадрат будет являться объединением непересекающихся множеств X и Y, причём $|X| = |A|$ и $|Y| = |B|$. Значит, достаточно доказать наше утверждение для квадрата. Если одна из частей квадрата содержит некоторый отрезок, то, поскольку отрезок и квадрат равномощны, по теореме Кантора – Бернштейна эта часть равномощна квадрату (и отрезку). Если же ни одна из частей квадрата отрезка не содержит, то поступим следующим образом. Пусть это квадрат $[0; 1]^2$. Для каждого числа $a \in [0; 1]$ рассмотрим сечение квадрата прямой $x = a$. Полученный в сечении отрезок содержит хотя бы одну точку M_a первой части разбиения. Рассмотрим множество[3] $\{M_a : a \in [0; 1]\}$. Это множество равномощно отрезку, а

[3] При построении множества мы пользуемся *аксиомой выбора*, согласно которой для каждого семейства непустых непересекающихся множеств существует по меньшей мере одно множество, которое имеет ровно один общий элемент с каждым из множеств данного семейства. Отметим, что эта аксиома принимается не всеми математиками. Её неприятие связано, главным образом, с тем, что она лишь утверждает существование множества, но никак его не определяет, в частности, не позволяя указать явно ни одного элемента этого множества. Более того, применяя эту аксиому, можно доказать немало утверждений, которые кажутся неправдоподобными, парадоксальными и даже вызывают интуитивный протест (по этому вопросу см., например, [3, 6, 12]. Подчеркнём, что приведённые нами доказательства теоремы Кантора – Бернштейна на аксиому выбора не опираются.

значит, существует биекция отрезка в подмножество первой части разбиения. Поэтому опять же по теореме Кантора – Бернштейна эта часть равномощна отрезку.

В заключение автор приносит искренную благодарность всем коллегам, внимательно прочитавшим рукопись статьи и поделившимся своими соображениями по её усовершенствованию.

Замечания

1. Нетрудно видеть, что приведённые доказательства теоремы Кантора-Бернштейна не являются логически независимыми. Например, сердцевина C из третьего доказательства состоит из всех элементов множества A, у которых можно любое число раз найти прообраз при отображении f, а это очень напоминает множество A_∞, построенное в первом доказательстве. Тем не менее, предложенные подходы методически различны и позволяют учащимся более полно и разносторонне усвоить содержание утверждения.

2. Подход к сравнению бесконечных множеств путём установления взаимно однозначного соответствия принадлежит Г. Кантору, который поставил задачу классификации актуально бесконечных множеств [8; 9, гл. IX]. Г. Кантор доказал, что $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ и $|\mathbb{Z}| < |\mathbb{R}|$ (то есть $|\mathbb{Z}| \leqslant |\mathbb{R}|$ и $|\mathbb{Z}| \neq |\mathbb{R}|$).

3. Вопрос об авторстве теоремы и оригинальных доказательствах весьма интересен. По этой проблеме можно рекомендовать переписку Г. Кантора с Р. Дедекиндом [8]. В письме от 5 ноября 1882 г. Г. Кантор пишет:

Вы помните, что в Гарцбурге я говорил Вам, что не могу доказать следующую теорему:

«*Если M' является составной частью многообразия M, а M'' — составной частью M' и если M и M'' могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие друг с другом, то есть M и M'' имеют одинаковую мощность, то и M' имеет ту же мощность, что и M и M''.*»

Теперь я нашёл исток этой теоремы и могу доказать её строго и в нужной общности, что восполняет существенный пробел в теории многообразий.

Однако Г. Кантор доказательства не привёл, а 30 августа 1899 г. в ответ на письмо Р. Дедекинда он пишет:

Большое спасибо за ... набросок простого доказательства, данного Вами теореме ... моей работы. Если отвлечься от формы, то оно совпадает (если я не ошибаюсь) с доказательством Шрёдера, сообщённым впервые осенью 1896 г. ..., которое осенью 1897 г. самостоятельно повторил г-н Феликс Бернштейн на семинаре в Галле.

Письмо Р. Дедекинда содержало утверждение: *если система U является частью системы T, последняя — частью системы S, и S подобна U, то и*

S подобна T, доказательство которого осуществлялось с помощью дедекиндовской теории цепей[4].

Третье доказательство настоящей работы восходит к доказательству Ф. Бернштейна, впервые опубликованному в 1898 г. в книге Э. Бореля [10, с. 102–107]. Отметим, что в некоторых отечественных книгах (например, [7]) можно встретить рассматриваемое утверждение под именем теоремы Шрёдера – Бернштейна, а за рубежом теорему обычно называют, перечисляя фамилии всех трёх учёных.

4. Задача, с которой начато рассмотрение обсуждаемого вопроса, не только иллюстрирует третье доказательство, но и является ещё одним примером того, как научные знания, облечённые в доступную школьникам форму, распространяются на интеллектуальных соревнованиях, привлекая молодёжь к научно-исследовательской деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Московские математические олимпиады 1993–2005 гг. / Федоров Р. М. и др. Под ред. В. М. Тихомирова. 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2008. 464 с.
2. Хаусдорф Ф. Теория множеств: Пер. с нем. Н. Б. Веденисова под редакцией и с дополнениями П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова. 4-е изд. — М.: УРСС, 2007. 304 с.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. — М.: Физматлит, 2006. 572 с.
4. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977. 368 с.
5. Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2008. 128 с.
6. Ященко И. В. Парадоксы теории множеств. 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2009. 40 с.
7. Архангельский А. В. Канторовская теория множеств. — М.: Изд-во МГУ, 1988. 112 с.
8. Кантор Г. Труды по теории множеств: Пер. с нем. Ф. А. Медведева и А. П. Юшкевича, отв. редакторы А. Н. Колмогоров и А. П. Юшкевич. — М.: Наука, 1985. 431 с.
9. Клайн М. Математика. Утрата определенности: Пер. с англ. / Под ред., с предисл. и примеч. И. М. Яглома. — М.: Мир, 1984. 434 с.
10. Borel E. Leçons sur la théorie des fonctions. — Paris: Gauthier-Villars et fils, 1898. 137 p. Издание доступно для бесплатного чтения на сайте `http://www.archive.org`.
11. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. 4-е изд. — М.: МЦНМО, 2007. 152 с.
12. Кановей В. Г. Аксиома выбора и аксиома детерминированности. — М.: Наука, 1984. 64 с.

Поступила 06.09.2011

[4] Здесь хорошо видно, как создатели новой теории пользуются разными терминами, например, для множества (многообразие, система) и равномощности (подобие).

THREE PROOFS OF THE CANTOR – SCHRÖDER THEOREM

A. V. Begunts

We discuss the Cantor – Bernstein – Schröder theorem, a fundamental statement in set theory. Three detailed proofs supplied with illustrations are given. We consider a number of the theorem's applications and sketch its history.

Keywords: set theory, cardinal number, Cantor – Bernstein – Schröder theorem.