

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СПЕЦИАЛИСТОВ РАЗЛИЧНОГО ПРОФИЛЯ

УДК 519.237.5

**ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО
КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННОМУ АНАЛИЗУ С
МОМЕНТА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПО НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ****Д. Е. Красильников**

*Государственный университет – Высшая школа экономики (Нижегород),
Россия, 603155, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12;
e-mail: Crass1984@mail.ru*

Статья представляет собой обзор литературы по корреляционно-регрессионному анализу в историческом развитии, начиная с XIX века по настоящее время.

Ключевые слова: корреляционный анализ, регрессионный анализ, метод наименьших квадратов.

Основной задачей корреляционно-регрессионного анализа является оценка наиболее существенных количественных характеристик причинно-следственных связей между различными процессами и явлениями. Эта задача рассматривается в основном в учебном курсе “Эконометрика”, который с конца XX века вошёл в учебный план многих экономических специальностей.

На мой взгляд, основной ошибкой в формировании учебных планов по этой дисциплине является её отрыв от курсов “Математическая статистика и теория вероятностей” и “Линейная алгебра”, в то время как за рубежом “Эконометрика” считается их логическим продолжением. По этой причине представляется необходимым начать этот обзор с рекомендаций по преподаванию вышеуказанных дисциплин.

С сожалением приходится отметить, что объем часов, выделяемых на преподавание предмета “Математическая статистика и теория вероятностей”, ежегодно сокращается. Если в Советском Союзе на некоторых экономических специальностях этот курс занимал два семестра, то в наше время в большинстве учебных заведений он сокращен до одного семестра. По этой причине важнейшей задачей повышения качества преподавания “Эконометрики” является восстановление курса “Математическая статистика и теория вероятностей” в прежнем объеме. Тем более, что в нашей стране этот курс читался лучше, чем за рубежом.

В качестве учебных пособий по данному курсу можно рекомендовать книги [7, 8, 14]. Алгоритмы решения задач в первых двух из них составлены для вычислительной техники середины XX века, из-за чего изложение материала в них более громоздко, чем можно было бы сделать, ориентируясь на современную вычислительную технику. Другим недостатком этих книг является различие подходов к решению одних и тех же задач. Если применять алгоритмы, соответствующие современному уровню вычислительной техники, и убрать из этих книг не нужный экономистам раздел “Случайные функции”, то их объем можно сократить в два раза. Про третью книгу можно сказать,

что в ней сделана довольно удачная попытка совместить курсы “Математическая статистика и теория вероятностей” и “Эконометрика”. В принципе, эти три книги прекрасно дополняют друг друга и лучше всего формировать учебный план на основе всех трёх, а не каждой по отдельности. Также следует отметить, что эти книги переведены на несколько иностранных языков и пользуются популярностью за рубежом.

На мой взгляд, объем курса “Линейная алгебра” на экономических специальностях недостаточен для полноценного освоения эконометрики. В большинстве учебных заведений читается односеместровый курс, близкий к принятому в технических вузах нашей страны. В него не входят такие темы, как ортогональное проектирование в МНК, не рассматриваются свойства положительно определённых и симметричных матриц, ортогональных матриц и разложение симметричной матрицы на ортогональную и диагональную. Вообще, принятый на экономических специальностях курс “Линейная алгебра” в основном ставит целью изучение систем линейных уравнений и методов их решения, что, как было отмечено выше, недостаточно для эконометрики, для понимания которой необходимы некоторые элементы трёхсеместрового курса линейной алгебры, читаемого студентам математических специальностей, в котором предмет рассматривается как раздел математики, изучающий свойства векторных пространств и их линейных отображений.

Необходимые для эконометрике сведения из линейной алгебры можно найти в книге [32], специально написанной для экономистов. Помимо этого, в ней представлены матричные способы решения задач математической физики, линейное программирование и теория игр. На более подготовленного читателя рассчитана книга [21].

Другой проблемой изучения эконометрики является отсутствие таблиц статистических функций. Последний раз такие таблицы издавались в нашей стране в 1983 году [6].

Приступая к обзору учебников по эконометрике, следует отметить, что 60–70% материала в них идентичны. В нашей стране этот курс появился сравнительно недавно и пришёл из-за рубежа, по этой причине своих фундаментальных трудов по этой дисциплине у нас нет. Для лучшего ознакомления с этим курсом следует читать английскую литературу, например [47, 48, 51, 55]. Отрицательной чертой таких книг является отсутствие примеров из российской экономики. Также можно порекомендовать книгу [42]. Она интересна тем, что в ней акцент делается на геометрии регрессионного анализа.

На мой взгляд, лучшим учебником по эконометрике, изданным в нашей стране, является [20]. К положительным его сторонам можно отнести связь с курсом “Теория вероятностей и математическая статистика”, примеры из российской экономики, матричная запись формул и доказательств теорем. К отрицательным — сложность изложения материала, что делает его труднодоступным для понимания студентов, еще только приступающих к изучению дисциплины “Эконометрика”.

На более простом уровне курс “Эконометрика” изложен в книгах И. И. Елисевой и М. М. Юзбашева [11, 12]. К недостаткам этих книг можно отнести отсутствие доказательств теорем и концентрация на парной регрессии.

В качестве дополнительной литературы можно порекомендовать книги [9, 10, 25].

Для интересующихся использованием корреляционно-регрессионного анализа и математической статистики в экономике Советского Союза будут интересны книги [1–4]. В них приведены эконометрические исследования самих авторов. Все они стилистически написаны очень небрежно и их довольно тяжело читать. В формулах, приведенных авторами, много ошибок, кроме того, в тексте книг есть ряд неверных формулировок.

Для интересующихся связью между корреляционно-регрессионным анализом и другими разделами МНК будет полезна книга [19].

Если мы хотим рассматривать корреляционно-регрессионный анализ без отрыва от других разделов математической статистики, то нам следует обратиться к, вероятно, наиболее полному курсу математической статистики, изданному в нашей стране, — трехтомнику М. Дж. Кендалла, А. Стьюарта [15–17]. На языке оригинала он называется “The Advanced Theory of Statistics” и в первом издании занимал всего один том. В нем очень хорошо изложены вопросы, касающиеся частных и множественных коэффициентов корреляции; большое внимание уделено выборочному методу. К сожалению, этот курс далеко выходит за рамки принятого в нашей стране курса “Теория вероятностей и математическая статистика” и по этой причине будет полезен лишь специалистам. В нем есть богатый исторический и библиографический материал, но нет достаточного количества примеров.

В этом обзоре под регрессионным анализом понимается нахождение и исследование свойств функции, построенной в результате аппроксимации эмпирических значений теоретическими по МНК. Другие методы аппроксимации не рассматриваются, поскольку они являются либо менее точными, либо не до конца разработанными.

Под корреляционным анализом понимается набор статистик (функций от выборочной совокупности), необходимых для нахождения структуры связей между переменными.

Под корреляционно-регрессионным анализом понимается метод нахождения параметров линейной функции при неизвестной структуре связей между переменными.

Фундаментальным трудом по регрессионному анализу является книга индийского ученого С. Р. Рао [29]. Она переведена на 6 основных языков мира, содержит в себе богатый материал по математической статистике, охватывающий период с конца XIX века по 70-е годы XX века. В первой главе рассматриваются разделы матричной алгебры, необходимые для изучения математической статистики. Четвертая глава посвящена МНК в линейных моделях. Глава 8 кратко раскрывает теорию многомерного нормального и выборочного распределений, используя при этом теорему Крамера – Вольда. Положительной чертой книги является внушительный список литературы.

Тем не менее, книга написана довольно сложным языком и рассчитана на специалистов в области математической статистики. Студентам, только начинающим знакомство с этим разделом математики, она покажется сложной. К тому же пространное доказательство теорем усугубляется множеством опе-

чаток. Для дальнейшего изучения эконометрики будет интересна книга того же автора [52].

На менее подготовленного читателя рассчитана книга [33], содержание которой доступно даже студентам, только начинающим изучение математической статистики. В предисловии к книге (с. 3–5) сказано: “Круг вопросов, охватываемых книгой, можно разбить на три части. Во-первых, в книге излагается ряд приемов и правил по оформлению результатов опытов или наблюдений в виде таблиц и по нахождению эмпирических формул для представленных данных. . . Во-вторых, в книге содержится изложение ряда простейших средств прикладного анализа — приемы численного и графического дифференцирования и интегрирования и гармонический анализ. Авторы излагают лишь наиболее простые приемы и в большинстве случаев рекомендуют жертвовать точностью ради простоты. . . Третий круг вопросов, рассматриваемых в книге, — это различные статистические приемы обработки данных. Они включают в себя обширный материал из области теории ошибок и основных задач математической статистики. Большое внимание уделено методам обработки неравноточных измерений, уравниванию условных измерений, корреляции. . . Читатели, которые в своей работе столкнутся с необходимостью использовать более точные и более тонкие приемы обработки численных данных или заинтересуются обоснованием изложенных методов, могут обратиться к списку литературы в конце книги”. Монография содержит множество примеров использования корреляционно-регрессионного анализа в химии и физике. К сожалению, все они ограничиваются функцией одного переменного и не затрагивают множественный корреляционно-регрессионный анализ.

Из современных изданий интерес представляет книга [9]. Это уже третье издание на русском языке. В книге описываются методы подбора и исследования линейных и нелинейных регрессионных моделей различной степени сложности, а также рассматриваются практические аспекты их применения, в том числе с использованием специальных компьютерных программ. Также в книге есть небольшой исторический очерк. Помимо стандартного набора тем, составляющих ядро курса регрессионного анализа, в это издание включены отдельные главы, посвященные мультиколлинеарности, обобщенным линейным моделям, геометрическим свойствам регрессии, робастной регрессии и процедурам тиражирования выборки (бутстрепа).

Все приведенные выше книги, в основном, рассматривают случай парной линейной связи и соответствующие разделы корреляционно-регрессионного анализа. Многомерный корреляционно-регрессионный анализ принято выделять в отдельный предмет. За рубежом этот предмет входит в курс “Эконометрика”, а в Советском Союзе его называли “Корреляционно-регрессионный анализ и моделирование”.

К сожалению, большинство примеров использования многомерного корреляционно-регрессионного анализа, описанных в литературе, базируется на макроэкономических показателях. По этой причине, не зная экономической теории на уровне высшего образования, понять этот метод весьма сложно. К тому же отсутствие привязки к реальной экономике делает этот раздел эко-

номического анализа практически бесполезным для представителей бизнеса, не занимающихся изучением экономической теории.

Тем не менее, этому методу уже около 200 лет и он имеет богатую историю. Происхождение термина регрессия таково: “создатели корреляционного анализа Ф. Гальтон (1822–1911) и К. Пирсон (1857–1936) интересовались связью между ростом отцов и сыновей. Ф. Гальтон изучил более 200 семей и обнаружил, что в группе семей с высокорослыми отцами сыновья в среднем ниже ростом, чем их отцы, а в группе семей с низкорослыми отцами сыновья в среднем выше отцов. Таким образом, отклонение роста от среднего в следующем поколении уменьшается — регрессирует. Причина в том, что на рост сыновей влияет не только рост отцов, но и рост матерей и много других факторов, и эти факторы, случайно направленные как в сторону увеличения, так и снижения роста, приближают рост сыновей к среднему росту” ([12, с. 201–202]).

По другой версии (смотри [9, с. 64]) считается, что Гальтон использовал сначала термин “реверсия” (reversion — обращение), а чуть позже начал использовать термин “регрессия” (regression). Слово regression означает также попятное движение и может иметь смысл движения назад не только по переменным, но и по времени.

Вообще авторы современных английских книг по эконометрике склонны занижать роль немецких ученых в открытии корреляционно-регрессионного анализа, особенно К. Пирсона, и не указывают на связь между корреляционно-регрессионным анализом и генетикой. В более ранних изданиях большую роль в изобретении этого метода отводили К. Пирсону, чем Ф. Гальтону. Большинство своих работ К. Пирсон публиковал в основанных им журналах *Biometrika* и *Annals of Eugenics*. В наше время в них публикуются статьи по биологии и по этой причине они не относятся к математическим. Права собственности на них принадлежат компании JSTOR, которая разрешает пользоваться ими лишь научным учреждениям в строго оговоренном объеме. В нашей стране к базе данных этой компании имеет доступ лишь несколько институтов, например ГУ-ВШЭ.

Основным методом регрессионного анализа и в наше время остается МНК. Он основан на минимизации суммы квадратов отклонений теоретических значений от эмпирических.

Краткий исторический обзор развития МНК приведён в книгах [19] и [27]. Первое изложение элементов МНК дано в 1806 г. А. М. Лежандром (1752–1833) в [50] в связи с вопросом о вычислениях кометных орбит. Ему же принадлежит название “метод наименьших квадратов”.

В 1809 г. К. Ф. Гаусс (1777–1833) в [46] дал первое вероятностное обоснование МНК, а в 1810 г. он же в [44] глубоко разработал вычислительную сторону вопроса и ввел символы и обозначения, сохранившиеся и поныне. Новые важные результаты найдены им в 1821 г. [45]. В 1812 г. П. С. Лаплас (1749–1827) в своём фундаментальном трактате по теории вероятностей [49] получил ряд важных результатов и применил их к МНК.

Дальнейшее развитие МНК связано с П. Л. Чебышевым (1821–1894), который в 1859 г. разработал теорию интерполирования по методу наименьших квадратов с помощью ортогональных полиномов, носящих его имя.

Способ Чебышева представляет собой как бы связующее звено между старым способом наименьших квадратов и обширным полем современного анализа, относящимся к разложениям по ортогональным функциям. Желающие ознакомиться подробнее с проблемами ортогональных разложений могут обратиться к известному учебнику В. И. Смирнова [30] и к первым главам “Основных задач математической физики” В. А. Стеклова [31]. Для статистических приложений особенно важны многочлены Чебышева – Эрмита (см. [18] и [53]).

А. А. Марков (1856–1922) в 1898 г. в работе [23] и в § 1 книги [22] внес в математическую статистику ряд весьма важных идей, пояснивших суть МНК, в частности, методические сведения к “правилу наибольшего веса”.

В книге С. Н. Бернштейна [5] изложена теорема Муавра – Лапласа как для независимых наблюдений, так и для наблюдений, связанных марковской зависимостью.

Много сделано для развития применений МНК в астрономии и геодезии Ф. Гельмертом (1843–1917) в конце XIX века.

После работ А. А. Маркова с двадцатых годов нынешнего века МНК вошёл в математическую статистику как важная и естественная часть теории оценивания параметров.

МНК при наличии ограничений (Constrained Least Squares) рассмотрен Ю. Нейманом [24]. Дальнейшее развитие его идей было связано с трудами его ученицы Ф. Дэвид. В её работе [41] приводится детальное доказательство теорем теории вероятностей и математической статистики, показана их связь с генетикой.

А. Айткен [37] рассмотрел спектральное представление матрицы ковариации. Он показал, как с помощью спектрального представления схема Гаусса – Маркова с общей и известной ковариационной матрицей приводится к схеме Гаусса – Маркова с некоррелированными наблюдениями и равноточными измерениями. Способ Айткена — это, по сути, приведение к главным компонентам, поскольку спектральное представление использует собственные числа и собственные векторы, то есть фактически всё сводится к методу главных компонент, другими словами, к факторному анализу. Считается, что метод главных компонент изобретен К. Пирсоном (1901 г.), но еще в 1889 г., сингулярное разложение матриц было разработано Дж. Сильвестром.

В 1946 г. А. Н. Колмогоров [13] дал изящное геометрическое изложение МНК.

Со второй половины двадцатого века в МНК и его применения стало проникать матричное изложение, которое позволяет вести удобную и короткую запись выкладок и результатов. Важную роль в развитии МНК сыграл Ю. В. Линник. В его работах этот метод рассматривается с позиций аналитической теории чисел, функций комплексного переменного и асимптотических методов [19].

В это же время начинает развиваться обобщенный МНК (Generalised Least Squares), предполагающий неоднородность пространства (так называемая теорема Айткена), призванный решить проблемы гетероскедастичности (heteroscedasticity) и автокорреляции (autocorrelation). Для использования этого

метода разрабатываются специальные двухшаговые процедуры оценки (Two-step Estimation): на первом этапе оценивается модель без учета авторегрессии или гетероскедастичности, а на втором в нее вносятся поправки на авторегрессию или гетероскедастичность. Для знакомства с этой проблемой можно порекомендовать статьи [38–40, 43, 57, 58].

Другим важным ответвлением МНК являются системы одновременных уравнений (Simultaneous Equations), необходимые для оценки сложных экономических объектов. Для этого раздела разработаны двухшаговые методы оценки (Two Stage Least Squares): на первом этапе определяют, какие переменные к каким уравнениям относятся, а на втором этапе происходит оценка регрессий.

К системам уравнений относятся также внешне не связанные между собой уравнения (Seemingly Unrelated Regression, SUR) [20, с. 220–223]. Они связаны лишь благодаря наличию слабой корреляции (см. [12, с. 205]) между остатками¹ в разных уравнениях (коэффициент корреляции Пирсона менее 0,5).

Следует отметить, что с математической точки зрения системы одновременных уравнений — это лишь пример ситуации МНК, когда переменные наблюдаются с ошибкой. Так, в книге [16] есть глава “Структурные уравнения”, в которой излагаются способы оценки неизвестных параметров. Аналогичные схемы используются при фильтрации случайных процессов.

Изучение этих систем уравнений традиционно входит в перечень тем, включенных в большинство учебников по эконометрике. Для ознакомления с этой проблемой можно порекомендовать главу 5 учебника [11], главу 9 [20]. Из зарубежных учебников следует отметить [55]. К сожалению, все примеры использования систем одновременных уравнений (по крайней мере, в открытых источниках) базируются на экономической теории, имеющей лишь опосредованное отношение к современной экономике. Чаще всего они разбираются на моделях спроса и предложения, IS-LM и Кейнсианского креста. Следует отметить, что, например, модель IS-LM в последние годы потеряла свою привлекательность: “When The Economist’s economics editor studied macroeconomics in the 1970s, the basic model for understanding swings in demand was the so-called IS-LM framework, invented by Sir John Hicks in 1937 as an interpretation of Keynes’s “General Theory”. In recent years it has gone out of fashion, dismissed as too simplistic. . .” (Saving versus liquidity / The Economist, Aug 11th 2005, p. 63)². По этой причине относиться к моделям подобного рода следует с изрядной долей скепсиса. О модели IS-LM, помимо вышеуказанной статьи, можно прочитать практически в любом учебнике по макроэкономике для высших учебных заведений. На более простом уровне она описана в книге [26], в главе 11.

¹ Под остатком понимается разность между значением, полученным по выборке, и значением, полученным по регрессии.

² “Когда редактор экономического раздела журнала The Economist изучал макроэкономику в 1970-е годы, основной моделью для объяснения резких изменений спроса была так называемая модель IS-LM, изобретенная сэром Джоном Хиксом в 1937 как интерпретация “Общей теории” Кейнса. В последние годы она вышла из моды, исключена как слишком большое упрощение экономических законов. . .” (перевод автора). На русский язык название цитируемой статьи [56] можно перевести как “Сбережения против ликвидности”. Полный текст статьи доступен на сайте журнала The Economist: <http://www.economist.com>

Некоторым исключением из общей концепции изложения проблемы одновременных уравнений, сложившейся в литературе, можно считать учебник [12], где присутствуют примеры из реальной экономики. Так, в главах 8.11 и 8.12 этого учебника описано использования системы регрессионных уравнений для оценки доходности сельского хозяйства, но, к сожалению, не приводится методика расчетов прогнозных значений.

Не менее интересным методом, получившим свое развитие, начиная с 50-х годов XX века, стала теория робастных оценок. Двумя основными книгами по этому вопросу являются [34] и [35]. Робастность в статистике представляет собой подходы, направленные на снижение ошибок в моделях.

Современный период развития МНК характеризуется широким использованием компьютеров. Расчеты, которые раньше занимали несколько недель, теперь можно провести за несколько минут.

Корреляционный анализ (особенно многомерный) описан довольно плохо. В отечественной литературе даже не сложилось общепринятых обозначений для коэффициентов множественной и частной корреляции. По этой причине я рекомендую использовать обозначения для этих коэффициентов из книги [51], поскольку считаю их наиболее удобными. Из литературы, изданной в нашей стране, можно порекомендовать учебник [14] и монографию [2], а также книгу [33].

«Само слово “корреляция” ввел в статистику английский биолог и статистик Френсис Гальтон в конце XIX в. Тогда оно писалось как “correlation” (соответствие), но не просто “связь” (relation), а “как бы связь”, т. е. связь, но не в привычной в то время функциональной форме.

В науке, а именно в палеонтологии, термин “корреляция” применил еще раньше, в конце XVIII в., знаменитый французский палеонтолог (специалист по ископаемым останкам животных и растений прошлых эпох) Жорж Кювье. Он ввел даже “закон корреляции” частей и органов животных. “Закон корреляции” помогает восстановить по найденным в раскопках черепу, костям и прочим останкам облик всего животного и его место в системе: если череп с рогами, то это было травоядное животное, а его конечности имели копыта; если же лапа с когтями — то хищное животное без рогов, но с крупными клыками.

Известен следующий рассказ о Кювье и “законе корреляции”. В дни университетского праздника студенты решили подшутить над профессором Кювье. Они вырядили одного в козлиную шкуру с рогами и копытами и посадили его в окно спальни Кювье. Ряженный загремел копытами и завопил: “Я тебя съем!” Кювье проснулся, увидел силуэт с рогами и спокойно отвечал: “Если у тебя рога и копыта, то по закону корреляции ты травоядное и съесть меня не можешь, а за то, что не знаешь закона корреляции, получишь двойку!”» ([12, с. 192–193]).

“В современном понимании корреляционный анализ — это проверка гипотез о связях между переменными с использованием коэффициентов корреляции, двумерной описательной статистики, количественной меры взаимосвязи (совместной изменчивости) двух переменных. Таким образом, это совокупность методов обнаружения корреляционной зависимости между случайными величинами или знаками.

Основное назначение корреляционного анализа — выявление связи между двумя или более изучаемыми переменными, которая рассматривается как совместное согласованное изменение двух исследуемых характеристик. Данная изменчивость обладает тремя основными характеристиками: формой, направлением и силой” ([36, с. 98–107].

Мне удалось найти только одну книгу, в которой описано одновременное использование многомерного корреляционного и регрессионного анализа, — учебник [12], где в главах 8.11 и 8.12 дан пример использования этой методики для оценки доходности сельского хозяйства.

В последние годы корреляционный анализ проник и в нечисловую статистику в виде ранговой корреляции (так называемый коэффициент корреляции Спирмена). Первой статьёй по этому вопросу принято считать [54]. Ранговая корреляция оценивает взаимосвязь двух величин не на основе совместного математического ожидания, а на основе центромасса. Ранговая корреляция используется, когда между двумя величинами заведомо отсутствует функциональная связь. Например, связь между возрастом человека и его настроением. Ранговую корреляцию не следует отделять от других нечисловых методов [28].

Другими примерами корреляции служит корреляция временных рядов (коэффициенты корреляции Кендалла и Яла). Подробнее о них можно прочитать в трехтомнике [15–17].

При большом числе переменных для выяснения их значимости используют канонические корреляции. Каноническая корреляция является обобщением парной корреляции. Канонический анализ, т. е. метод нахождения канонической корреляции, основан на построении таких линейных комбинаций признаков одной и другой группы, что обычный коэффициент парной корреляции между этими комбинациями достигает наибольшего значения. Такой максимальный коэффициент называется первым каноническим коэффициентом корреляции, а соответствующие линейные комбинации двух групп признаков называют первыми каноническими величинами. Вторая и последующие канонические корреляции определяются линейными комбинациями, не коррелированными с предыдущими комбинациями и имеющими следующий наибольший по величине коэффициент, объясняющий оставшуюся межгрупповую корреляцию. Подробную информацию по этому разделу математической статистики можно найти в книге [17].

Другой важной задачей корреляционного анализа является оценка степени подгонки прямой. Для этого используется специальная статистика — коэффициент детерминации, основанная на разложении суммы отклонений от средней на объяснённую и остаточную. Эта статистика включена во все статистические пакеты, включая MS-Excel. Подробнее о её свойствах можно прочитать в любом учебнике по эконометрике.

Если эмпирические значения разделены на страты, то для оценки степени подгонки кривой можно использовать корреляционное отношение. Оно основано на разложении дисперсии на групповую и межгрупповую. В зарубежной литературе эта статистика упоминается редко. Для более подробного знакомства с ней следует читать работы [1–4, 12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. — М.: Финансы и статистика, 1983.
2. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: исследование зависимостей. — М.: Финансы и статистика, 1985.
3. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989.
4. Айвазян С. А., Мхитаряна В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. — М.: Юнити, 1998.
5. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. — М.—Л.: Госиздат, 1927.
6. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983.
7. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика (12-е изд., исп.). — М.: Высшее образование, 2006.
8. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики (12-е изд., исп.). — М.: Высшее образование, 2006.
9. Дрейпер Н. Р., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. 3-е изд. — М.: Вильямс, Диалектика, 2007.
10. Доугерти К. Введение в эконометрику. — М.: ИНФРА-М, 1999.
11. Елисеева И. И. Эконометрика. — М.: Финансы и статистика, 2005.
12. Елисеева И. И., Юзбашев М. М. Общая теория статистики. — М.: Финансы и статистика, 1995.
13. Колмогоров А. Н. Обоснование метода наименьших квадратов // УМН. 1946. Т. 1, вып. 1. С. 57–70.
14. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика (2-е изд., исп., доп.). — М.: Юнити, 2004.
15. Кендалла М. Дж., Стьюарт А. Теория распределений. — М.: Наука, 1966.
16. Кендалла М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.
17. Кендалла М. Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. — М.: Наука, 1976.
18. Лахтин Л. К. Кривые распределения и построение для них интерполяционных формул по способам Пирсона и Брунса. — М., Госиздат, 1922.
19. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений (2-е изд., исп., доп.). — М.: Физматгиз, 1962.
20. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика: начальный курс., 6-е изд., исп., доп. — М.: Дело, 2004.
21. Магнус Я. Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление. — М.: Физматлит, 2002.
22. Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей. Серия: Классики науки. — М.: Изд-во АН СССР, 1951.
23. Марков А. А. Закон больших чисел и метод наименьших квадратов. В кн: Марков А. А., Избранные труды. — Изд. АН СССР, 1951. С. 233–251.
24. Нейман Ю. Статистическая оценка как проблема классической теории вероятностей // УМН. 1944. Вып. 10. С. 207–229.
25. Ниворожкина Л. И., Арженовский С. В. Многомерные статистические методы в экономике (учебник). — М.: Дашков и К°; Ростов н/Д: Наука-Спектр, 2008.

26. Иванов С. И., Шереметова В. В., Скляр М. А., Табачник Б. И. Основы экономической теории в 2 томах (4-е изд.). — М: Вита Пресс, 2001.
27. Идельсон Н. Способ наименьших квадратов (2-е изд., доп.). — Л.: Гостехиздат, 1932.
28. Орлов А. И. Нечисловая статистика. — М.: МЗ-Пресс, 2004.
29. Рао С. Р. Линейные методы и их применение. — М.: Наука, 1968.
30. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. — М., Наука, 1974.
31. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. 2-е изд. — М.: Наука, Главное издательство физико-математической литературы, 1983.
32. Стренг Г. Линейная алгебра и ее приложения. — М.: Наука, 1980.
33. Уорсинг А., Геффнер Дж. Методы обработки экспериментальных данных. — М.: Издательство иностранной литературы, 1953.
34. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. — М.: Мир, 1989.
35. Хьюбер П. Робастность в статистике. — М.: Мир, 1984.
36. Шишлянникова Л. М. Применение корреляционного анализа в психологии // Психологическая наука и образование. 2009. № 1. С. 98–107.
37. Aitken A. C. On least squares and linear combination of observations // Proc. Roy. Soc. Edin. 1935. V. 55. P. 42–48.
38. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity // Journal of Econometrics. 1986. V. 31. P. 307–327.
39. Box G. E. P., Pierce D. A. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models // Journal of the American Statistical Association. 1970. V. 65. P. 1509–1526.
40. Breush T. S., Pagan A. R. A simple test for hetroscedasticity and random coefficient variation // Econometrica. 1979. V. 47. P. 1287–1294.
41. David F. N. Probability theory for statistical methods. — Cambridge, 1951.
42. Russel Davidson, James MacKinon G. Econometric Theory and Methods. — Oxford University Press, 2004.
43. Engle R. F. Autoregressive conditional heteroscedastiity with estimates of variance of United Kingdom inflation // Econometrica. 1982. V. 50. P. 987–1008.
44. Gauss C. F. Disquisitio de la elements ellipticus Palladis. — Hamburg, 1810.
45. Gauss C. F. Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. — Hamburg, 1821.
46. Gauss C. F. Theoria motus corporum coelestium. — Hamburg, 1809.
47. Greene W. Econometric analysis, 6th ed. — Prentice-Hall, 2008.
48. Gujarati D. N. Basic Econometrics. — McGrawHill, 1995.
49. Laplace P. S. Theorie analytique des probabilities. — Paris, 1812.
50. Legendre A. M. Nouvelles methods pour la determination des orbites des cometes. Appendice sur la methode des moindrescarres. — Paris, 1806.
51. Maddala G. S. Introduction to Econometrics, 2nd edition. — Wiley, 1992.
52. Rao C. R. Advanced Statistical Methods in Biometric Research. — N. Y., 1952.
53. Riemann–Weber. Differential und Integral Gleichungen // Diarium mathematical Physik. 1925. Cap. 8 und 9.
54. Spearman C. General Intelligence, Objectively Determined and Measured // The American Journal of Psychology. 1904. V. 15, № 2. P. 201–292.
55. Thomas R. L. Modern Econometrics: an Introduction. — Longman, 1997.

56. Saving versus liquidity // The Economist, Aug 11th 2005.
57. White H. A heteroscedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroscedasticity // Econometrica. 1980. V. 48, № 4. P. 817–838.
58. Whitney K. Newey, Kenneth D. West. A simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix // Econometrica. 1987. V. 55, № 3. P. 700–708.

Поступило 25.05.2010

**THE REVIEW OF REFERENCES ON CORRELATION AND
REGRESSION ANALYSIS (ECONOMETRICS) SINCE ITS
APPEARANCE TILL NOWADAYS**

D. E. Krasilnikov

The article investigates the development of correlational and regression analysis (econometrics) from the beginning of 19-th century till present as it is reflected in scientific literature.

Keywords: correlational analysis, regression analysis, method of least squares.