СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 511

КУРС ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА

В. И. Игошин

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012 г. Саратов ул. Астраханская, 83;
e-mail: igoshinvi@mail.ru

Системы чисел — натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных, гиперкомплексных — рассматриваются как модели соответствующих аксиоматических теорий. Характеризуются сами эти аксиоматические теории.

Ключевые слова: система натуральных чисел, кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, поле действительных чисел, поле комплексных чисел, аксиоматическая теория.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Названный в заглавии курс занимает особое место в системе подготовки будущих учителей математики в педагогическом вузе. Как известно, в процессе обучения математике происходит неизбежное дидактическое взаимодействие логики и математики. Логика выступает при этом как мощный инструмент дидактического воздействия, по существу, она становится скелетом всей педагогики математики. Это воздействие основывается на следующих четырёх принципах логики обучения математике: 1) принцип обучения строению (структуре) математических утверждений; 2) принцип обучения понятию доказательства математической теоремы; 3) принцип обучения методам доказательства математических теорем; 4) принцип обучения строению математических теорий. Эти принципы имеют фундаментальное значение для методики обучения математике, которое состоит в том, что при нарушении их в процессе обучения математике последняя предстаёт без тех качеств, которые, собственно, и выделяют её из системы всех наук. В итоге обучаемый получает искажённое представление как об общей картине математики, так и об отдельных её деталях. Эти принципы указывают также основные направления проникновения логики в педагогику математики, служат дополнением к общедидактическим принципам педагогики применительно к педагогике математики, уточняют структуру той части педагогической науки, которая связана с преподаванием математики.

Чтобы дидактическое взаимодействие логики и математики при обучении математике было эффективным, необходимо, чтобы будущий учитель математики был к этому целенаправленно подготовлен в процессе обучения в педагогическом вузе. Его подготовка в области логики должна состоять из двух составляющих этапов — логическая подготовка и логико-дидактическая подготовка. Ядром логической подготовки будущего учителя математики является профессионально-педагогически ориентированный курс математической логики. Пособиями по логической подготовке будущих учителей математики могут служить книги [1, 2].

Профессионально-педагогически направленная логическая подготовка будущих учителей математики органично перерастает в их логико-дидактическую подготовку. Это означает, что от основополагающего курса математической логики идеи и методы, обобщённые в принципах 1)–4), проникают во все математические курсы педвуза — геометрии, алгебры и теории чисел, математического анализа, числовых систем, дискретной математики, теории вероятностей, теории алгоритмов, а также в курсы психолого-педагогических основ обучения математике, методики преподавания математики, истории и методологии математики, в которых внимание студентов акцентируется на вопросах, имеющих принципиальное логическое значение. В методических же курсах педвуза демонстрируется, как именно знания логики используются в процессе преподавания конкретных разделов и тем школьного курса математики. Пособием по логико-дидактической подготовке будущих учителей математики призвана служить книга [3].

Таким образом, логическая и логико-дидактическая подготовки призваны стать системообразующим фактором в системе всей подготовки будущих учителей математики.

Курс “Числовые системы”, читаемый будущим учителям математики в педагогическом вузе, прекрасно служит их логико-дидактической подготовке. После формализованных исчислений высказываний и предикатов, рассматриваемых в рамках курса математической логики, теории числовых систем являют собой уникальный образец, на котором методы математической логики и аксиоматического построения математической теории могут быть представлены студентам исключительно наглядно и с полными доказательствами. Подобными методическими возможностями не обладает даже курс геометрии.

Курс “Числовые системы” имеет ярко выраженное аксиоматическое построение. С чётких первоначальных понятий и аксиом Пеано начинается построение теории натуральных чисел. Доказательства теорем о натуральных числах имеют строгую логическую структуру, непременно опираются на сформулированные аксиомы. После того, как аксиоматическая теория натуральных чисел достаточно развита, приступают к изучению свойств этой теории, т. е. к её метатеории. Здесь строго доказываются метатеоремы о непротиворечивости этой теории (с помощью построения её модели), о её категоричности, о независимости системы её аксиом. Аналогичным образом строятся аксиоматические теории целых, рациональных, действительных и комплексных чисел, исследуется вопрос о возможностях дальнейшего расширения систем чисел.

В данной статье предлагается краткий, но в то же время достаточно подробный конспект лекций по данному курсу, который призван помочь преподавателю правильно расставить математические и логические акценты при его изложении студентам.

ВВЕДЕНИЕ

Древняя история. Понятие числа — пожалуй, фундаментальнейшее понятие математической науки. Его возникновение относят к 3 тысячелетию до н. э. и связывают с потребностями людей в измерениях и счёте. К началу 2 тысячелетия до н. э. в двух центрах человеческой цивилизации того времени, в Египте и Вавилоне, сформировалось абстрактное понятие натурального числа; числа из именованных превратились в отвлечённые: не “три барана”, не “три бочки” и т. д., а просто “три”. Вслед за натуральными числами в разных концах света, в Египте, Вавилоне, Индии, Китае, Средней Азии, возникло понятие дробного (рационального) числа. Оно было вызвано к жизни потребностями более точного измерения величин (в частности, длин отрезков). Возникновение отрицательных (целых и дробных) чисел связано с потребностями самой математики: появилась необходимость решать линейные и квадратные уравнения, вычитать положительные числа. Это произошло в Китае, Индии, Древней Греции, но вплоть до XVII в. отрицательные числа не могли получить прав гражданства в европейской математике. Множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, отрицательных целых чисел и ноль вместе составляют множество $\mathbb{Z}$ целых чисел. Объединение множества целых чисел с множеством дробных чисел называют множеством $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. (Латинское слово *ratio* означает “отношение”, “дробь”). Процесс измерения отрезков привёл к представлениям не только о дробных числах, но и к необходимости введения новых чисел, не являющихся рациональными. Они получили название иррациональных. Толчком к их открытию послужило доказательство древними греками знаменитой теоремы о несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, т. е. о невозможности какими бы то ни было частями стороны квадрата измерить его диагональ. Объединение множества рациональных и множества иррациональных чисел называют множеством $\mathbb{R}$ действительных (или вещественных) чисел. Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел появилось в математике в XVI веке в связи с необходимостью решать кубические уравнения. Окончательно понятие комплексного числа оформилось лишь в XIX веке.

Аксиоматический метод. В школьном курсе математики числа вводятся нестрогим, описательным образом. В настоящей статье мы посмотрим, каков подход к понятию числа в современной математике. Этот подход основан на *аксиоматическом методе* построения математических теорий. Суть такого построения состоит в том, что сначала выбирается ряд *первоначальных понятий*, которые не определяются и используются без объяснения их смысла. Далее, формулируется ряд первоначальных утверждений об этих первоначальных понятиях, которые принимаются без доказательства и которые называются *аксиомами*. Наконец, исходя из выбранной системы аксиом, доказывают новые утверждения о первоначальных понятиях, а также о понятиях, которые определяются в процессе развития аксиоматической теории. Эти доказываемые утверждения называются *теоремами*, а совокупность всех теорем, выводимых (доказываемых) из данной системы аксиом, называется *аксиоматической теорией*, построенной на базе этой системы аксиом.

Каждой аксиоматической теории может быть дана *интерпретация*. Это означает, что в качестве первоначальных неопределяемых понятий теории рассматриваются конкретные математические объекты; отношения между понятиями интерпретируются как отношения между соответствующими объектами. Если при этом интерпретация такова, что все аксиомы теории превращаются в истинные утверждения об этих объектах и об отношениях между ними, то такая интерпретация называется *моделью* данной аксиоматической теории. Если каждая аксиома системы аксиом аксиоматической теории представляет собой формулу, записанную на некотором логико-математическом языке, в сигнатуру которого входят константы, предикатные символы и функциональные символы, то при интерпретации они превращаются соответственно в элементы, отношения и алгебраические операции на интерпретирующем множестве, которое становится носителем алгебраической системы соответствующей сигнатуры. Таким образом, моделями аксиоматической теории являются алгебраические системы, т. е. множества, наделённые отношениями и алгебраическими операциями. (С основными понятиями современной (абстрактной, или общей) алгебры можно познакомиться по книгам [4, 5]).

Что касается чисел, то задача состоит в том, чтобы для каждой из систем чисел (натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных) найти такие аксиоматические описания (системы аксиом), которые бы полностью характеризовали данную систему чисел. Это означает, что данная числовая система должна быть единственной (с точностью до изоморфизма) моделью соответствующей аксиоматической теории. Такие аксиоматические теории называются *категоричными*.

Важнейшим требованием, предъявляемым ко всякой аксиоматической теории, является её непротиворечивость. Аксиоматическая теория называется *непротиворечивой*, если ни для какого утверждения A, сформулированного в терминах этой теории, само утверждение A и его отрицание $\neg A$ не могут быть одновременно теоремами этой теории. В противном случае аксиоматическая теория называется *противоречивой*. Доказать такую — абсолютную — непротиворечивость аксиоматической теории подчас бывает исключительно трудно. Поэтому нередко ограничиваются доказательством относительной непротиворечивости изучаемой теории, т. е. непротиворечивости её относительно некоторой уже изученной непротиворечивой теории. Для этого строится модель системы аксиом исследуемой теории в терминах теории известной. Если бы исследуемая теория содержала противоречащие друг другу теоремы A и $\neg A$, то эти теоремы превратились бы в построенной модели в два истинных и противоречащих друг другу утверждения A^* и $\neg A^*$ непротиворечивой известной теории, что невозможно. Таким образом, предъявление указанной модели служит доказательством относительной непротиворечивости исследуемой теории: она будет непротиворечива, если непротиворечива теория, в которой построена её модель. Классический пример: геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива геометрия Евклида, которая, в свою очередь, непротиворечива, если непротиворечива теория действительных чисел.

Новая история. Аксиоматический подход к понятию числа был выработан в XIX в., когда математиков перестали удовлетворять доказательства в анализе, основанные на наглядности или геометрических представлениях, и возникла необходимость строгого обоснования основ анализа — теории пределов. Г. Грассман (1809–1877) в 1861 г., К. Вейерштрасс (1815–1897) в 1878 г. и Дж. Пеано (1858–1932) в 1891 г. на основе разных подходов построили аксиоматические теории натуральных чисел. К. Вейерштрасс в 1894 г. построил теорию целых чисел как пар натуральных чисел, Ж. Таннери в 1894 г. — теорию рациональных чисел как пар целых чисел. Основной целью являлась теория действительных чисел, которая и была построена независимо Ш. Мере в 1869 г. и Г. Кантором (1845–1918) в 1879 г. с помощью фундаментальных последовательностей рациональных чисел, Р. Дедекиндом (1831–1916) в 1872 г. — с помощью сечений в поле рациональных чисел *)[1], К. Вейерштрассом в 1872 г. — с помощью бесконечных десятичных дробей. Теорию комплексных чисел как пар действительных чисел ещё в 1837 г. построил У. Гамильтон (1805–1865). Он же предпринял первую попытку обобщения понятия комплексного числа, создав теорию кватернионов. В 1877 г. Ф. Фробениус (1849–1917) доказал, что при определённых разумных ограничениях система комплексных чисел и система кватернионов являются единственно возможными расширениями системы действительных чисел.

Итак, числовые системы образовали увеличивающуюся (расширяющуюся) последовательность: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. В настоящей статье рассматриваются основные идеи построения аксиоматических теорий этих числовых систем.

СИСТЕМА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Аксиоматическая теория натуральных чисел, созданная итальянским математиком Джузеппе Пеано (1858–1932), исходит из следующих *первоначальных понятий*: непустое множество $\mathbb{N}$, бинарное отношение $'$ на нём (называемое отношением следования) и выделенный элемент $1 \in \mathbb{N}$. *Аксиомы* выбираются следующие:

$(P1)$ $(\forall x)(x' \neq 1)$,

$(P2)$ $(\forall x, y)(x = y \to x' = y')$,

$(P3)$ $(\forall x, y)(x' = y' \to x = y)$

$(P4)$ (*Аксиома индукции*) $(1 \in M \wedge (\forall x)(x \in M \to x' \in M)) \to M = \mathbb{N}$.

Алгебраическая система $< \mathbb{N}; ', 1 >$ с одной унарной операцией $'$ и одной нульарной операцией 1, в которой выполняются все аксиомы Пеано, называется *системой Пеано* или *натуральным рядом*. Говорят также, что она является моделью системы аксиом Пеано $(P1)$–$(P4)$. Элементы системы Пеано называются *натуральными числами*.

Приведём две теоремы, непосредственно вытекающие из этих аксиом.

Теорема 1. $(\forall x)(x' \neq x)$.

[1] Отметим, что Евдокс в IV в до н. э. построил теорию, по существу эквивалентную теории Дедекинда.

Доказательство. Рассмотрим множество: $M = \{x \in \mathbb{N} : x' \neq x\}$. Покажем, используя аксиому индукции ($P4$), что $M = \mathbb{N}$.

А) $1 \in M$, так как $1' \neq 1$ по аксиоме $P1$.

Б) Пусть $x \in M$, т. е. $x' \neq x$. Тогда по аксиоме $P3$, $(x')' \neq x'$. Следовательно, по определению , $x' \in M$.

Условия аксиомы $P4$ выполнены. Тогда, по аксиоме $P4$, $M = \mathbb{N}$. Это и означает, что $(\forall x)(x' \neq x)$.

Теорема 2. $(\forall x)\big(x = 1 \vee (\exists y)(x = y')\big)$.

Доказательство. Рассматривается множество: $M = \{1\} \cup \{x \in \mathbb{N} : (\exists y)(x = y')\}$ и показывается с использованием аксиомы индукции $P4$, что $M = \mathbb{N}$.

2. *Сложением* в системе Пеано $< \mathbb{N};\ ', 1 >$ называется бинарная операция $+$, заданная на множестве $\mathbb{N}$ и удовлетворяющая двум условиям (аксиомы сложения): 1^+) $x + 1 = x'$; 2^+) $x + y' = (x + y)'$. Такое определение требует доказательства существования и единственности определяемого объекта. Существование такой операции доказывается в конструктивном духе: операция строится как некоторое тернарное отношение на множестве $\mathbb{N}$. Доказательство единственности такой операции более просто. Допустим, что в системе Пеано $< \mathbb{N};\ ', 1 >$, кроме операции сложения $+$, имеется ещё одна бинарная операция $\oplus$, удовлетворяющая аксиомам сложения: $1^{\oplus}$) $x \oplus 1 = x'$; $2^{\oplus}$) $x \oplus y' = (x \oplus y)'$. Рассмотрим множество $M = \{y : (\forall x)(x + y = x \oplus y)\}$ и покажем, опираясь на аксиому $P4$, что $M = \mathbb{N}$. Проверим выполнимость условий этой аксиомы.

А) $1 \in M$, т. к. $x + 1 = x' = x \oplus 1$ на основании условий 1^+ и $1^{\oplus}$.

Б) Пусть $y \in M$, т. е. $x + y = x \oplus y$, откуда по аксиоме $P2$, $(x + y)' = (x \oplus y)'$. Тогда, используя это равенство и условия 2^+ и $2^{\oplus}$, находим: $x + y' = (x + y)' = (x \oplus y)' = x \oplus y'$, т. е. $y' \in M$.

Следовательно, по аксиоме $P4$, $M = \mathbb{N}$. Это и означает, что $(\forall x)(\forall y)(x + y = x \oplus y)$, т. е. операции $+$ и $\oplus$ одинаковы.

Итак, во всякой системе Пеано существует и притом единственная операция сложения. В следующих теоремах устанавливаются свойства этой операции.

Теорема 3. (*Ассоциативность сложения.*) $(\forall x, y, z)[(x+y)+z = x+(y+z)]$.

Теорема 4. (*Коммутативность сложения.*) $(\forall x, y)[x + y = y + x]$.

Теорема 5. $(\forall x, y)(x \neq x + y)$.

Теорема 6. (*Закон трихотомии.*) *Для любых x, y выполняется одно и только одно из следующих трех соотношений*: (I) $x = y$, (II) $(\exists u)(x = y + u)$, (III) $(\exists v)(y = x + v)$.

Теорема 7. $(\forall x, y, u)(x + u = y + u \iff x = y)$.

Докажем, например, первую из этих теорем. Основной инструмент доказательства — аксиома индукции $P4$. Индукция ведётся по переменной z, т. е. рассматривается множество $M = \{z : (\forall x, y)[(x + y) + z = x + (y + z)]\}$ и доказывается (с использованием аксиомы $P4$), что $M = \mathbb{N}$. Проверим выполнимость условий этой аксиомы. В самом деле,

А) $1 \in M$, так как $(x + y) + 1 = (x + y)' = x + y' = x + (y + 1)$.

Б) Пусть $z \in M$, т. е. $(x + y) + z = x + (y + z)$. Тогда $(x + y) + z' = \big((x + y) + z\big)' = \big(x + (y + z)\big)' = x + (y + z)' = x + (y + z')$, т. е. $z' \in M$.

Следовательно, по аксиоме $P4$, $M = \mathbb{N}$. Это и означает, что $(\forall\, x, y, z)\big((x + y) + z = x + (y + z)\big)$.

3. *Умножением* в системе Пеано $< \mathbb{N};\ ', 1 >$ называется бинарная операция $\cdot$, заданная на множестве $\mathbb{N}$ и удовлетворяющая двум условиям (аксиомы умножения): $1^{\times})$ $x \cdot 1 = x$; $2^{\times})$ $x \cdot y' = x \cdot y + x$. Существование такой операции также доказывается в конструктивном духе: операция строится как некоторое тернарное отношение на множестве $\mathbb{N}$. Доказательство единственности абсолютно аналогично доказательству единственности операции сложения. В следующих теоремах устанавливаются совместные свойства операций сложения и умножения.

Теорема 8. (*Дистрибутивность умножения относительно сложения.*) $(\forall\, x, y, z)\big((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\big)$, $(\forall\, x, y, z)\big(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\big)$.

Теорема 9. (*Коммутативность умножения.*) $(\forall\, x, y)(x \cdot y = y \cdot x)$.

Теорема 10. (*Ассоциативность умножения.*) $(\forall\, x, y, z)\big((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\big)$.

Для доказательства, например, первой из этих теорем рассматривается множество $M = \{z : (\forall x, y)[(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z]\}$ и показывается, что $M = \mathbb{N}$.

4. *Отношение порядка* в системе Пеано вводится посредством следующих определений: $x < y \Longleftrightarrow (\exists\, z)(x + z = y)$, $x \le y \Longleftrightarrow x < y$ или $x = y$.

Доказывается, что отношение $\le$ действительно является отношением порядка в системе Пеано, т. е. рефлексивно: $x \le x$, антисимметрично: $x \le y$ и $y \le x \Longrightarrow x = y$, транзитивно: $x \le y$ и $y \le z \Longrightarrow x \le z$.

В следующих теоремах устанавливаются свойства отношения порядка.

Теорема 11. (*Закон трихотомии.*) Для любых x, y выполняется одно и только одно из следующих трёх соотношений: (I) $x = y$, (II) $y < x$, (III) $x < y$.

Теорема 12. (*Монотонность сложения.*) $x < y \Longleftrightarrow x + z < y + z$.

Следствие. $x < y$ и $u < v \Longrightarrow x + u < y + v$.

Теорема 13. (*Монотонность умножения.*) $x < y \Longleftrightarrow x \cdot z < y \cdot z$.

Следствие. $x < y$ и $u < v \Longrightarrow x \cdot u < y \cdot v$.

Теорема 14. (*Теорема Архимеда.*) $(\forall\, x)(\forall\, y)(\exists\, z)(x \cdot z > y)$.

Теорема 15. *Для любых* x, y, z: а) $1 \le x$; б) $x < y \Longrightarrow x + 1 \le y$; в) $x < y + 1 \Longrightarrow x \le y$; г) $x \le z \le x + 1 \Longrightarrow z = x$ или $z = x + 1$.

5. Положительно решается вопрос о *категоричности* аксиоматической теории натуральных чисел, построенной на базе системы аксиом Пеано: любые две системы Пеано $< \mathbb{N};\ ', 1 >$ и $< \mathbb{N}^*;\ '^*, 1^* >$ (т. е. любые две модели этой системы аксиом) изоморфны, т. е. существует изоморфизм этих систем, т. е. такое взаимно однозначное отображение φ множества $\mathbb{N}$ на множество $\mathbb{N}^*$, что: а) $\varphi(1) = 1^*$, б) $\varphi(x') = [\varphi(x)]'^*$.

6. Наряду с аксиоматикой Пеано существуют и другие аксиоматические подходы к теории натуральных чисел. Каждая из таких аксиоматик освещает понятие натурального числа со своей стороны, но все они эквивалентны друг другу, поскольку все они, как и аксиоматика Пеано, категоричны и фактически описывают один и тот же объект.

Примером может служить аксиоматика, основанная на операциях сложения и умножения. При таком подходе система натуральных чисел $< \mathbb{N};\ ', 1 >$ рассматривается как алгебраическая система $< \mathbb{N};\ +,\ \cdot >$ и определяется как минимальное полукольцо (ассоциативность и коммутативность сложения, сократимость по сложению: $x + u = y + u \Longrightarrow x = y$, ассоциативность умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения) с нейтральным элементом по умножению $(\exists\, 1)(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x)$ и без нейтрального элемента по сложению $(\forall\, x, y)(x \neq x + y)$. Отметим, что в силу последнего свойства полукольцо $< \mathbb{N};\ +,\ \cdot >$ натуральных чисел не является кольцом.

Ещё один пример: за основу берутся свойства системы натуральных чисел как упорядоченного множества. Система натуральных чисел $< \mathbb{N};\ \leq >$ характеризуется как бесконечное (линейное) вполне упорядоченное множество, всякое подмножество которого, имеющее максимальный элемент, конечно. (Упорядоченное множество — это множество вместе с заданным на нём отношением порядка $\leq$. Линейность отношения порядка $\leq$ означает, что $(\forall\, x, y)(x \leq y\ \vee\ y \leq x)$. Линейно упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, если оно удовлетворяет условию минимальности: всякое непустое подмножество этого множества имеет хотя бы один минимальный элемент, т. е. элемент, меньше которого элементов нет.)

7. Важнейший вопрос о *непротиворечивости* аксиоматической теории натуральных чисел (построенной на основе системы аксиом Пеано) решается на относительном уровне. Может быть построена модель этой теории в рамках другой аксиоматической теории — теории множеств, базирующейся на системе аксиом Цермело – Френкеля (об этой системе аксиом см. [3] и [6]), что доказывает непротиворечивость аксиоматической теории натуральных чисел при условии непротиворечивости аксиоматической теории множеств Цермело – Френкеля.

8. Наконец, доказывается *независимость системы аксиом Пеано*, т. е. невозможность доказательства ни одной из них, исходя из трёх оставшихся. Доказательство также осуществляется с помощью построения соответствующих моделей. Например, для доказательства независимости аксиомы ($P3$) от остальных нужно построить такую модель (алгебраическую систему), в которой выполнялись бы аксиомы ($P1$), ($P2$), ($P4$), но аксиома ($P3$) не выполнялась бы. Примером такой модели может служить множество $N = \{a, b, c, d\}$, в котором отношение следования $'$ определяется так: $a' = b$, $b' = c$, $c' = d$, $d' = b$. В этой модели аксиома $P1$ выполняется, т. к. $(\forall\, x)(x' \neq a)$, т. е. a — единица. Аксиома $P2$ выполняется: за каждым элементом следует точно один. Аксиома $P3$ не выполняется, т. к. $a' = d'$, но $a \neq d$, т. е. отношение $'$ не взаимно однозначно. Аксиома $P4$ очевидно выполняется.

КОЛЬЦО ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

9. *Кольцом целых чисел* называется наименьшее кольцо $< \mathbb{Z};\ +,\ \cdot >$, содержащее систему (полукольцо) натуральных чисел $< \mathbb{N};\ +,\ \cdot >$ в качестве алгебраической подсистемы. Элементы этого кольца называются *целыми числами*.

Это определение позволяет доказать *лемму о строении кольца целых чисел*, утверждающую, что если кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел существует, то оно имеет следующее строение: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$, т. е. состоит из натуральных чисел, нулевого элемента и элементов, противоположных натуральным числам. Идея доказательства основана на том, что такая совокупность образует в кольце целых чисел подкольцо, содержащее систему $\mathbb{N}$ натуральных чисел, которое, в силу минимальности кольца целых чисел, обязано совпасть с последним.

10. Вопрос о *существовании* такого кольца решается его конструктивным построением на основе системы натуральных чисел. На множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ всех упорядоченных пар натуральных чисел вводится бинарное отношение $\sim$: $(m,n) \sim (m',n') \iff m + n' = n + m'$.

Без труда доказывается, что это отношение является отношением эквивалентности, и, следовательно, множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ распадается на классы эквивалентных пар, совокупность которых образует фактор-множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$. Обозначим через $\overline{(m,n)}$ класс, содержащий пару (m,n). Таким образом, $\overline{(m,n)} = \overline{(m',n')} \iff (m,n) \sim (m',n')$.

Введём на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ две бинарные операции: $\overline{(m,n)} + \overline{(u,v)} = \overline{(m+u, n+v)}$, $\overline{(m,n)} \cdot \overline{(u,v)} = \overline{(mu+nv, mv+nu)}$. Можно доказать корректность этих определений, т. е. независимость результатов операций над классами от выбора представителей в этих классах, через которые определяется результат. Это означает, что мы приходим к алгебраической системе $< \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim; +, \cdot >$.

Доказывается, что эта алгебра есть кольцо, т. е. её операции удовлетворяют аксиомам кольца. В частности, роль нейтрального элемента по сложению играет класс $\overline{(u,u)}$, а противоположным элементом для $\overline{(m,n)}$ будет $\overline{(n,m)}$, т. к.

$$\overline{(m,n)} + \overline{(n,m)} = \overline{(m+n, n+m)} = \overline{(m+n, m+n)}.$$

Наконец, доказывается, что кольцо $< \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim; +, \cdot >$ есть кольцо целых чисел. (Подсистему, изоморфную системе натуральных чисел, образуют в нём такие классы $\overline{(m,n)}$, для которых $m > n$.)

Построение этой модели означает доказательство непротиворечивости аксиоматической теории целых чисел относительно аксиоматической теории натуральных чисел: первая непротиворечива, если непротиворечива вторая.

11. Единственность с точностью до изоморфизма системы натуральных чисел позволяет доказать изоморфность любых двух колец целых чисел, т. е. *единственность* с точностью до изоморфизма кольца целых чисел, которое обозначается $< \mathbb{Z};\ +,\ \cdot >$.

Наглядно процесс построения кольца целых чисел можно представить себе следующим образом. Каждое целое число представляется фактически как разность двух натуральных чисел. Но, как известно, каждое целое число может быть бесконечным числом способов представлено в виде разности двух натуральных. Так вот, все такие пары натуральных чисел, которые в разности дают одно и то же целое число, собираются в один класс (посредством введённого отношения эквивалентности), который и олицетворяет это целое число. При этом, если уменьшаемое больше вычитаемого, то получается “старый” объект — натуральное число, а если уменьшаемое меньше вычитаемого, то получается некий “новый” объект, которого не было среди натуральных чисел.

12. Операция вычитания вводится в кольце целых чисел, как и в произвольном кольце. *Разностью* двух целых чисел x и y называется новое целое число, обозначаемое $x-y$ такое, что $(x-y)+y=x$. Легко доказывается, что $x-y=x+(-y)$, где $-y$ — элемент, противоположный элементу y в кольце целых чисел.

13. В кольце $\mathbb{Z}$ вводится бинарное отношение $<$: $x<y \Longleftrightarrow y-x\in\mathbb{N}$. Доказывается, что оно есть отношение (строгого) порядка. В самом деле, если $x<y$ и $y<z$, т. е. $y-x\in\mathbb{N}$ и $z-y\in\mathbb{N}$, то $(y-x)+(z-y)\in\mathbb{N}$, или $z-x\in\mathbb{N}$, т. е. $x<z$. Доказывается, что порядок $<$ линеен, т. е. для любых $x,y\in\mathbb{Z}$ имеет место одно и только одно из следующих утверждений: $x=y$, $x<y$, $x>y$. В самом деле, если $x\neq y$, то $x-y\neq 0$ и, по лемме о строении кольца $\mathbb{Z}$, $x-y\in\mathbb{N}$ или $-(x-y)\in\mathbb{N}$, т. е. $x-y\in\mathbb{N}$ или $y-x\in\mathbb{N}$, т. е. $x>y$ или $x<y$. Кроме того, порядок обладает следующими свойствами: $(\forall\, x)(x\in\mathbb{N}\to x>0)$, $(\forall\, x)(x\neq 0\wedge x\notin\mathbb{N}\to x<0)$.

Подобно теоремам 12, 13, доказываются следующие теоремы аксиоматической теории целых чисел.

Теорема 16. (*Монотонность сложения.*) $x<y \Longleftrightarrow x+z<y+z$.

Следствие. $x<y$ и $u<v \Longrightarrow x+u<y+v$.

Теорема 17. (*Монотонность умножения.*) 1) $x<y$, $z>0 \Longrightarrow x\cdot z<y\cdot z$, 2) $x<y$, $z<0 \Longrightarrow x\cdot z>y\cdot z$.

Следствие. 1) $0<x<y$, $0<u<v \Longrightarrow x\cdot u<y\cdot v$, 2) $x<y<0$, $u<v<0 \Longrightarrow x\cdot u>y\cdot v$.

Теорема 18. (*Обратная для теоремы 17.*)

1) $x\cdot z<y\cdot z$, $z>0 \Longrightarrow x<y$, 2) $x\cdot z<y\cdot z$, $z<0 \Longrightarrow x>y$.

Для завершения представления о структуре кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел доказываются следующие две теоремы.

Теорема 19. (*О дискретности кольца целых чисел.*) *Кольцо целых чисел является дискретным, т. е. в нём выполняется свойство*:

$$(\forall\, x)\big[(\exists\, u)\big(u<x \;\wedge\; (\forall\, t)(u\leq t\leq x \;\to\; t=u \;\vee\; t=x)\big)\wedge \\ \wedge\; (\exists\, v)\big(x<v \;\wedge\; (\forall\, t)(x\leq t\leq v \;\to t=x \;\vee\; t=v)\big)\big].$$

При этом u называется соседним слева, а v — соседним справа для элемента x.

Нетрудно доказать, что для любого $x\in\mathbb{Z}$ соседним слева для него будет число $x-1$, а справа — $x+1$.

Теорема 20. (*Теорема Архимеда.*) *Кольцо целых чисел является архимедовски упорядоченным, т. е. в нём выполняется свойство*: $(\forall\, x\in\mathbb{N})(\forall\, y\in \in\mathbb{Z})(\exists\, z\in\mathbb{N})(x\cdot z>y)$.

Если $y\in\mathbb{N}$, то по теореме 14, $(\exists\, z\in\mathbb{N})(x\cdot z>y)$. Если же $y\leq 0$, то $x\cdot 1=x>y$, что и доказывает теорему Архимеда.

14. Систему *целых чисел* можно охарактеризовать с помощью следующих условий. Кольцо целых чисел — это кольцо с единицей e, не содержащее отличного от него подкольца с единицей и обладающее тем свойством, что

$ne \neq 0$ для любого натурального числа n. В самом деле, нетрудно показать, что множество всех элементов вида ne изоморфно системе $< \mathbb{N};\ +,\ \cdot >$ натуральных чисел. Следовательно, данное кольцо содержит подкольцо $\mathbb{Z}_0$, изоморфное кольцу $\mathbb{Z}$ целых чисел, поскольку кольцо $\mathbb{Z}$ — минимальное из таких колец. Но так как $\mathbb{Z}_0$ содержит единицу e, то, по условию, $\mathbb{Z}_0$ должно совпасть с данным кольцом, которое, следовательно, будет кольцом целых чисел.

Кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел не является полем, и операция деления является в нём частичной, т. е. применимой не к любым двум его ненулевым элементам, т. е. не для любых целых a и $b \neq 0$ найдётся такое целое x, что $a \cdot x = b$. В связи с этим возникает проблема расширения этого кольца до поля, желательно, до наименьшего поля. Так приходят к системе (полю) рациональных чисел.

ПОЛЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

15. *Полем рациональных чисел* называется наименьшее поле $< \mathbb{Q};\ +,\ \cdot >$, содержащее кольцо $< \mathbb{Z};\ +,\ \cdot >$ целых чисел в качестве подкольца. Элементы этого поля называются *рациональными числами*. Это определение позволяет доказать лемму о строении поля рациональных чисел, утверждающую, что если поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел существует, то оно имеет следующее строение: $\mathbb{Q} = \{a/b : a,\, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$, т. е. состоит из всевозможных частных от деления целых чисел. (Напомним, что *частным* a/b двух элементов a и b поля при $b \neq 0$ называется решение уравнения $bx = a$). Идея доказательства основана на том, что такая совокупность образует в поле рациональных чисел подполе, содержащее кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел в качестве подкольца, которое, в силу минимальности поля рациональных чисел, обязательно должно совпасть с последним.

16. Вопрос о существовании поля рациональных чисел решается его конструктивным построением на основе кольца целых чисел. Идея его построения абсолютно аналогична идее построения кольца целых чисел на основе системы натуральных чисел. Построение осуществляется *методом пар*. Каждое рациональное число представляется как частное двух целых чисел. Но, как известно, каждое рациональное число может быть бесконечным числом способов представлено в виде частного двух целых. Так вот, все такие пары целых чисел, которые в частном дают одно и то же рациональное число, собираются в один класс посредством следующего отношения эквивалентности на множестве $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ (из множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ исключены все пары вида $(a, 0)$): $(a, b) \sim (a', b') \Longleftrightarrow ab' = ba'$.

Без труда проверяется, что это отношение действительно является отношением эквивалентности, и, следовательно, множество $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ распадается на классы эквивалентных пар, совокупность которых образует фактормножество $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\sim$. Через $\overline{(a, b)}$ обозначается класс, содержащий пару (a, b), так что $\overline{(a, b)} = \overline{(a', b')} \Longleftrightarrow (a, b) \sim (a', b')$.

Введём на множестве $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\sim$ две бинарные операции: $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(ad + bc, bd)}$, $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac, bd)}$. Можно доказать корректность этих определений. Это означает, что мы приходим к алгебраической системе $< \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim ; \ +, \ \cdot >$.

Доказывается, что эта алгебра есть поле, т. е. её операции удовлетворяют всем аксиомам поля. В частности, роль нейтрального элемента по сложению играет класс $\overline{(0,c)}$, противоположным элементом для $\overline{(a,b)}$ будет $\overline{(-a,b)}$, решением уравнения $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(c,d)}$, при условии, что $\overline{(a,b)}$ — ненулевой элемент, будет класс $\overline{(bc,ad)}$. Наконец, доказывается, что поле $< \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \sim ; \ +, \ \cdot >$ есть поле рациональных чисел. (Подкольцо, изоморфное кольцу целых чисел, образуют в нём такие классы $\overline{(a,b)}$, в которых a делится на b, т. е. $a = qb$).

Построение этой модели означает доказательство того, что аксиоматическая теория рациональных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория целых чисел.

17. Единственность с точностью до изоморфизма кольца целых чисел позволяет доказать изоморфность любых двух полей рациональных чисел, т. е. *единственность* с точностью до изоморфизма поля рациональных чисел, которое обозначается $< \mathbb{Q}; \ +, \ \cdot >$.

18. *Операция деления* в поле рациональных чисел вводится как в произвольном поле. *Частным* от деления двух рациональных чисел a и b $(b \neq 0)$ называется новое рациональное число, обозначаемое a/b, такое, что $(a/b) \cdot b = a$. Легко доказывается, что $a/b = a \cdot b^{-1}$, где b^{-1} — элемент обратный элементу b в поле рациональных чисел. Нетрудно понять, что, представляя каждый элемент поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел в виде частного a/b двух целых чисел $a, b \in \mathbb{Z}$, можно считать, что $b \in \mathbb{N}$.

19. В поле $\mathbb{Q}$ вводится бинарное отношение $<$: $a/b < c/d \iff ad < bc$. Доказывается, что оно есть линейное отношение (строгого) порядка, продолжающее отношение порядка в $\mathbb{Z}$, т. к. $a/1 < c/1 \iff a < c$.

Далее доказываются теоремы 21, 22, 23, формулировки которых совпадают с формулировками теорем 16, 17, 18 соответственно с той разницей, что в них $x, y, z, u, v \in \mathbb{Q}$.

Свойства, сформулированные в теоремах 21(16), 22(17) показывают, что поле рациональных чисел $< \mathbb{Q}; \ +, \cdot >$ является *упорядоченным полем*, т. е. таким полем, в котором имеется линейное отношение порядка $<$, удовлетворяющее двум условиям: $(\forall\, x, y, z)(x < y \to x + z < y + z)$, $(\forall\, x, y, z)(x < y \wedge 0 < z \to xz < yz)$.

Обычным образом вводится понятие *абсолютной величины* или *абсолютного значения* элемента поля рациональных чисел:

$$|x| = \begin{cases} \ \ x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \ \ -x > 0. \end{cases}$$

Доказывается теорема о свойствах этого понятия.

Теорема 24. 1) $|-x| = |x|$; 2) $|x + y| \leq |x| + |y|$; 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; 4) $|y| \leq x \iff -x \leq y \leq x$.

Для завершения представления о строении поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел доказываются следующие две теоремы.

Теорема 25. (*О плотности поля рациональных чисел.*) *Поле рациональных чисел является плотным, т. е. в нем выполняется свойство*: $(\forall\, x, y)\big(x < y \to (\exists\, t)(x < t < y)\big)$.

Теорема 26. (*Теорема Архимеда.*) *Поле рациональных чисел является архимедовски упорядоченным, т. е. в нем выполняется свойство*: $(\forall\, x)(\forall\, y > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(n \cdot y > x)$.

20. Систему *рациональных чисел* можно охарактеризовать с помощью следующих условий. Поле рациональных чисел — это простое поле характеристики нуль. (Поле называется *простым* если оно не имеет подполей, отличных от него самого. Говорят, что поле имеет *характеристику нуль*, если $na \neq 0$ для любого его элемента $a \neq 0$ и любого целого числа $n \neq 0$.) Можно показать, что любое такое поле совпадает со своим подполем частных и, значит, изоморфно полю рациональных чисел.

ПОЛЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

21. Если построение кольца целых чисел и поля рациональных чисел обусловлено необходимостью выполнять достаточно элементарные арифметические действия — вычитание и деление, то расширение поля рациональных чисел до поля действительных чисел вызвано, в частности, необходимостью выполнять неэлементарную операцию — операцию предельного перехода, важнейшую операцию математического анализа.

22. Элемент a поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$ элементов этого поля (а сама последовательность называется *сходящейся в* $\mathbb{Q}$), если

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon).$$

Обозначение: $\lim a_n = a$.

Последовательность $\{a_n\}$ элементов поля $\mathbb{Q}$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, p, q > n_0)(|a_p - a_q| < \varepsilon).$$

Нетрудно доказать, что *всякая сходящаяся последовательность элементов упорядоченного поля фундаментальна*.

Возникает естественный вопрос, всякая ли фундаментальная последовательность элементов поля $\mathbb{Q}$ сходится в этом поле? Оказывается, нет. Примером могут служить последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, являющиеся последовательностями рациональных приближений по недостатку и по избытку к числу $\sqrt{2}$. Каждая из этих последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, будучи фундаментальной, не будет иметь предела в поле $\mathbb{Q}$, т. к. не существует, как известно, рационального числа m/n такого, что $(m/n)^2 = 2$.

Упорядоченное поле называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его элементов имеет в нём предел. Итак, поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не полное. (В поле действительных чисел утверждение о сходимости в этом поле всякой фундаментальной последовательности действительно выполняется и известно под названием *признак Коши сходимости последовательности*).

Теперь мы можем сформулировать определение поля действительных (вещественных) чисел: это — полное архимедовски упорядоченное поле $< \mathbb{R};\ +,\ \cdot >$, содержащее поле $< \mathbb{Q};\ +,\ \cdot >$ рациональных чисел в качестве подполя. Его элементы называются *действительными числами*.

23. Вопрос о существовании поля действительных чисел, как и кольца целых и поля рациональных, решается его конструктивным построением, в данном случае — из элементов поля рациональных чисел. Рассматриваемый здесь способ построения был предложен Г. Кантором (1845–1918) и называется *методом фундаментальных последовательностей*.

Рассматривается множество Φ всех фундаментальных последовательностей элементов из поля $\mathbb{Q}$. На этом множестве вводится бинарное отношение: $\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \lim(a_n - b_n) = 0$.

Без труда проверяется, что это отношение является отношением эквивалентности, и, следовательно, множество Φ распадается на классы эквивалентных последовательностей, образующие фактор-множество $\Phi/\sim$. Через $\overline{\{a_n\}}$ обозначается класс, содержащий последовательность $\{a_n\}$, так что $\overline{\{a_n\}} = \overline{\{b_n\}} \iff \{a_n\} \sim \{b_n\}$.

Введём на множестве $\Phi/\sim$ две бинарные операции: $\overline{\{a_n\}} + \overline{\{b_n\}} = \overline{\{a_n + b_n\}}$, $\overline{\{a_n\}} \cdot \overline{\{b_n\}} = \overline{\{a_n \cdot b_n\}}$. Можно доказать корректность этих определений, так что мы приходим к алгебраической системе $< \Phi/\sim; +, \cdot >$, которая и является полем действительных чисел.

Таким образом, теория действительных чисел непротиворечива, если непротиворечива теория рациональных чисел.

Можно составить следующее интуитивное представление о системе действительных чисел. Действительные числа непрерывным образом заполняют все промежутки между рациональными числами, они образуют некую непрерывную среду, в которую помещены рациональные числа. В результате этого к списку неотъемлемых атрибутов чисел (наряду с алгебраическими операциями сложения, вычитания, умножения и деления) добавляется операция предельного перехода, т. е. становится до конца ясным, что означает сходимость последовательности чисел к данному числу. В немалой степени эта ясность обуславливается тем, что в поле действительных чисел начинает действовать критерий Коши сходимости последовательности: последовательность сходится в этом поле тогда и только тогда, когда она фундаментальна (удовлетворяет условию Коши). Условие фундаментальности последовательности, бывшее в поле рациональных чисел лишь необходимым условием сходимости последовательности (оно следовало из сходимости), в поле действительных чисел становится и достаточным условием сходимости (сходимость следует из этого условия). Этот факт чрезвычайно важен для оснований математики. Он делает поле действительных чисел фундаментом для всего математического анализа и для приложений математики к решению технических задач практики.

24. Доказывается, что любые два поля действительных чисел изоморфны, т. е. аксиоматическая теория действительных чисел категорична.

25. Для системы *действительных чисел* известно довольно много разнообразных аксиоматических характеризаций, т. е. таких систем аксиом, для которых система действительных чисел является единственной с точностью до изоморфизма моделью. Одна из них утверждает что система действительных чисел и только она является плотным в себе полным по Дедекинду линейно упорядоченным множеством без наименьшего и наибольшего элементов, в котором существует счётное всюду плотное подмножество. (*Плотность* означает, что между любыми двумя элементами множества расположен ещё хотя бы один его элемент. *Полнота по Дедекинду*: всякое непустое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань. Существование всюду плотного подмножества, называемое свойством *сепарабельности* (отделимости), означает, что для каждого элемента множества существует как угодно близкий к нему элемент этого подмножества.)

С этой характеристикой системы действительных чисел связана одна из знаменитых математических проблем XX века — *проблема М. Я. Суслина*. М. Я. Суслин (1894–1919) прожил короткую жизнь (см. [7]), а его проблема была опубликована уже после его смерти, в 1920 г. Эта проблема состоит в том, что требуется узнать, сохранится ли указанная характеристика системы действительных чисел, если в ней условие сепарабельности заменить более слабым требованием, называемым *условием Суслина*: любая система из попарно не пересекающихся не пустых интервалов не более чем счётна.

Судьба этой проблемы оказалась поистине исторической и на её решение потребовалось более 40 лет [7]. Эта проблема встала в один ряд с континуум-проблемой Кантора, и полное решение их обеих было получено лишь в начале 60-х годов, когда американский математик П. Коэн открыл принципиально новый метод доказательства, получивший название *метода форсинга* (вынуждения). (За это открытие он был удостоен в 1966 году на Международном математическом конгрессе в Москве Филдсовской премии — одной из престижных международных наград, которых удостаиваются учёные-математики.) Выяснилось, что проблему Суслина, как и континуум-проблему Кантора, вообще невозможно решить в обычном смысле этих слов, т. е. дать определённый ответ "да" или "нет" на поставленный вопрос. Гипотеза Суслина, как и континуум-гипотеза Кантора, оказалась не зависящей от остальных аксиом теории множеств. Другими словами, возможна теория множеств, в которой гипотеза Суслина справедлива, и возможна теория множеств, в которой эта гипотеза не выполняется. (Кроме того, была также установлена взаимная независимость и самих этих гипотез — гипотезы Суслина и континуум-гипотезы Кантора.) Ситуация здесь оказалась сходной с проблемой доказательства пятого постулата Евклида, которая была разрешена в первой половине XIX века, в результате чего была не просто открыта новая, воображаемая, геометрия, получившая название геометрии Лобачевского, а была открыта новая эпоха в развитии всей математической науки.

ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

26. Расширяя последовательно системы чисел, мы расширяем наши возможности действий с ними: мы научились применять операции вычитания и деления к любым двум натуральным числам. По аналогичной причине происходит и дальнейшее расширение систем чисел. В поле действительных чисел не всегда выполнима операция извлечения квадратного корня, обратная к операции возведения в квадрат: нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа. В новой системе чисел мы хотели бы приобрести возможность извлекать корень квадратный из отрицательных чисел. Ясно, что для того, чтобы уметь извлекать корень квадратный из произвольного отрицательного числа, достаточно уметь извлекать его из числа -1. Таким образом, наличие в новой системе чисел невиданного ранее элемента i (мнимой единицы) со свойством $i^2 = -1$ является тем новым требованием, которое мы предъявляем к новой системе чисел.

Поле комплексных чисел определяется как минимальное поле $< \mathbb{C}; +, \cdot >$, содержащее поле $< \mathbb{R}\,; \,+\,, \,\cdot >$ действительных чисел и элемент i со свойством $i^2 = -1$. Элементы поля комплексных чисел называются *комплексными числами*.

Лемма о строении поля комплексных чисел звучит следующим образом: *поле $\mathbb{C}$, содержащее поле действительных чисел $\mathbb{R}$ в качестве подполя и элемент i со свойством $i^2 = -1$, будет минимальным (т. е. полем комплексных чисел) тогда и только тогда, когда каждый элемент x из $\mathbb{C}$ можно представить в виде: $x = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$; причём, такое представление единственно.*

27. Вопрос о существовании поля комплексных чисел решается его конструктивным построением на основе поля действительных чисел. При этом, на данном этапе построение очередной числовой системы происходит необычайно просто и наглядно. Элементами нового поля $\mathbb{C}$ объявляются всевозможные упорядоченные пары (a, b) действительных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, т. е. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

В этом множестве вводятся две бинарные алгебраические операции: $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$, $(a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$. При этом здесь уже нет никакой необходимости переходить к классам. Без труда доказывается, что алгебраическая система $< \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ +,\ \cdot >$ является полем. Наконец, показывается, что это поле является полем комплексных чисел. Значит, теория комплексных чисел непротиворечива, если непротиворечива теория действительных чисел.

Из теорем теории комплексных чисел, отличающих её от теорий всех предыдущих систем чисел, интересно отметить теорему о том, что *поле комплексных чисел не может быть линейно упорядочено*.

28. Без труда устанавливается изоморфизм любых двух полей комплексных чисел. При этом существенно используется тот факт, что содержащиеся в них подполя действительных чисел изоморфны.

О ДАЛЬНЕЙШИХ ОБОБЩЕНИЯХ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

29. Возможны и дальнейшие расширения понятия числа. Но при этом приходится отказываться от каких-либо привычных свойств чисел и, в первую очередь, — от коммутативности умножения. Обобщением комплексных чисел являются *гиперкомплексные числа*. Исторически первой системой таких чисел была *система кватернионов*, открытая У. Р. Гамильтоном в 1843 году. В 1877 году Ф. Фробениусом было доказано, что система комплексных чисел и система кватернионов являются при некоторых ограничениях единственно возможными расширениями системы действительных чисел.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Более детальное изложение вопросов построения числовых систем можно найти в [8–12], вопросов, связанных с обобщениями действительных чисел — в [13–16].

Новейшая история. В конце XIX – начале XX вв. в теории множеств, лежащей в основаниях математики, были обнаружены парадоксы (противоречия). Снова встал вопрос об обосновании математики и, в первую очередь, арифметики натуральных чисел. Важную роль в преодолении этого кризиса сыграла математическая логика, значительно развившаяся к этому времени. Одна из попыток выхода из кризиса была сделана немецким математиком Д. Гильбертом (1862–1943). Он предложил формализовать с помощью математической логики не только математические утверждения, но и процесс доказательства в математических теориях. Теории при этом принимают формально-логический характер: любое утверждение теории представляется в виде формулы, содержащей конечное число математических и логических символов, а доказательство — в виде конечной цепочки формул, образованной по определённым правилам из первичных формул, называемых аксиомами. Гильберт надеялся получить на этом пути доказательство непротиворечивости формализованной арифметики натуральных чисел. Но эти надежды не оправдались. В 1931 г. К. Гёдель (1906–1978) доказал, что всякая формальная теория, формализующая арифметику натуральных чисел, неполна, т. е. в ней найдётся такая формула, что ни она сама, ни её отрицание не могут быть выведены в этой теории. Он показал также, что в непротиворечивой формальной теории, включающей формальную арифметику, имеется формула, выражающая её непротиворечивость, и что эта формула недоказуема в этой теории. Это означает, что непротиворечивость такой формальной теории может быть доказана только средствами более сильными, нежели те, которые формализованы в данной теории. В 1936 г. Г. Генцен (1909–1945) доказал непротиворечивость формальной арифметики, использовав так называемую трансфинитную индукцию.

XX век принёс и другие обобщения понятия числа. Среди них гипердействительные числа: к действительным числам добавляются бесконечно малые и бесконечно большие числа. Их построение осуществляется с помощью методов математической логики (см., например, [16]). Они используются для обоснования теории пределов и дифференциального исчисления в так называемом нестандартном анализе (идея их построения восходит к Г.-В. Лейбницу (1646–1716)). С созданной Г. Кантором теорией множеств связаны кардинальные (мощностные) и ординальные (порядковые, трансфинитные) числа. Но эти темы выходят за рамки данного курса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов. 4-е изд. — М.: Издательский центр “Академия”, 2010. 448 с.
2. Игошин В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. 4-е изд. — М.: Издательский центр “Академия”, 2008. 304 с.
3. Игошин В. И. Математическая логика как педагогика математики. — Саратов: Издательский центр “Наука”, 2009. 360 с.
4. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973. 400 с.
5. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. 392 с.
6. Кусраев А. Г. Булевы алгебры и булевозначные модели // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 9. С. 116–122.
7. Игошин В. И. Михаил Яковлевич Суслин (1894–1919). — М.: Наука – Физматлит, 1996. 160 с.
8. Ландау Э. Основы анализа. (Действия над целыми, рациональными, иррациональными, комплексными числами) / Пер. с нем. — М.: ГИИЛ, 1947. 184 с.
9. Феферман С. Числовые системы. (Обоснования алгебры и анализа) / Пер. с англ. — М.: Наука, 1971.
10. Проскуряков И. В. Числа и многочлены. — М.: Просвещение, 1965. 284 с.
11. Нечаев В. И. Числовые системы. — М.: Просвещение, 1975.
12. Ларин С. В. Числовые системы. — М.: Издательский центр “Академия”, 2001. 160 с.
13. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973.
14. Понтрягин Л. С. Обобщения чисел. — М.: Наука, 1986. 120 с. (Б-ка "Квант", вып. 54)
15. Сильвестров В. В. Системы чисел // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 8. С. 121–127.
16. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ. — М.: Наука, 1987. 128 с.

Поступило 28.03.2010

SUBJECT “NUMBER SYSTEMS” FOR PEDAGOGICAL UNIVERSITY

V. I. Igoshin

Systems of natural, integer, rational, real, complex and hypercomplex numbers as models of corresponding axiomatic theories are considered. The characterization of these axiomatic theories is given.

Keywords: natural number system, integer ring, rational number field, real number field, complex number field, axiomatic theory.